Warsztaty KFnrD, *Równania diofantyczne*, Lista 2, 7.12.2019 (sobota)

Niech K będzie podciałem $\mathbb{C}$. Przez $\mathcal{O}_K$ oznaczamy podpierścień $\mathbb{C}$ składający się z tych $a \in K$, że a jest algebraiczny stopnia $n > 0$ oraz istnieją $k_0, \ldots, k_{n-1} \in \mathbb{Z}$, takie że:

$$k_0 + k_1 a + \ldots + k_{n-1} a^{n-1} + a^n = 0.$$

Niech R będzie pierścieniem (zawsze przemiennym z jedynką); $r, s \in R$ oraz $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

$$R^* := \{r \in R \mid (\exists r' \in R)\ rr' = 1\}.$$

- Mówimy, że $r, s \in R$ są *względnie pierwsze* (w R), gdy istnieją $x, y \in R$, takie że
$$rx + sy = 1.$$
- Mówimy, że r *dzieli* s (w R), oznaczane $r|s$, gdy istnieje $x \in R$, taki że $s = rx$.
- Mówimy, że r jest *nierozkładalny* (w R), gdy $r \neq 0$, $r \notin R^*$ oraz dla każdych $x, y \in R$ jeśli $r = xy$, to $x \in R^*$ lub $y \in R^*$.
- Mówimy, że r jest *pierwszy* (w R), gdy $r \neq 0$, $r \notin R^*$ oraz dla każdych $x, y \in R$ jeśli $r|xy$, to $r|x$ lub $r|y$.

(1) Niech $a \in \mathbb{C}$ będzie liczbą algebraiczną stopnia n. Udowodnić, że istnieją **jedyne** $q_0, q_1, \ldots, q_{n-1} \in \mathbb{Q}$, takie że:
$$q_0 + q_1 a + \ldots + q_{n-1} a^{n-1} + a^n = 0.$$

(2) Niech $d \in \mathbb{Z}$ będzie niepodzielna przez kwadrat żadnej liczby pierwszej. Udowodnić, że
$$\mathcal{O}_{\mathbb{Q}[\sqrt{d}]} = \begin{cases} \mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{d}}{2}\right] = \left\{m + n\frac{1+\sqrt{d}}{2} \mid m, n \in \mathbb{Z}\right\} & \text{gdy } 4|d-1, \\ \mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \left\{m + n\sqrt{d} \mid m, n \in \mathbb{Z}\right\} & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

(3) Niech $d \in \mathbb{Z}$ będzie niepodzielna przez kwadrat żadnej liczby pierwszej oraz
$$N : \mathbb{Q}\left[\sqrt{d}\right] \longrightarrow \mathbb{Q}$$
będzie jak w Zadaniu (5) z Listy 1. Udowodnić, że:
 (a) dla każdego $x \in \mathcal{O}_{\mathbb{Q}[\sqrt{d}]}$ mamy $N(x) \in \mathbb{Z}$;
 (b) dla każdego $x \in \mathcal{O}_{\mathbb{Q}[\sqrt{d}]}$ mamy:
$$x \in \left(\mathcal{O}_{\mathbb{Q}[\sqrt{d}]}\right)^* \quad \Longleftrightarrow \quad N(x) = \pm 1.$$

(4) Niech $d \in \mathbb{Z}_{<0}$ będzie niepodzielna przez kwadrat żadnej liczby pierwszej. Udowodnić, że:
$$\left(\mathcal{O}_{\mathbb{Q}[\sqrt{d}]}\right)^* = \begin{cases} \{1, -1, i, -i\} & \text{gdy } d = -1, \\ \{1, -1, \frac{1+\sqrt{d}}{2}, -\frac{1+\sqrt{d}}{2}, (\frac{1+\sqrt{d}}{2})^2, -(\frac{1+\sqrt{d}}{2})^2\} & \text{gdy } d = -3, \\ \{1, -1\} & \text{gdy } d < -3. \end{cases}$$

(5) Niech p będzie nieparzystą liczbą pierwszą i $a, b \in \mathbb{Z}$. Udowodnić, że w pierścieniu $\mathbb{Z}[\zeta_p]$ zachodzi następująca równość:
$$a^p + b^p = (a + b) \cdot (a + \zeta_p b) \cdot \ldots \cdot \left(a + \zeta_p^{p-2} b\right) \cdot \left(a + \zeta_p^{p-1} b\right).$$

(6) Dla dowolnego pierścienia R zdefiniować pierścień wielomianów $R[X]$.

(7) Udowodnić, że w pierścieniu $\mathbb{Z}[X]$ zachodzi:
 (a) dla każdego $f \in \mathbb{Z}[X] \setminus \mathbb{Z}[X]^*$ mamy $f \nmid 2$ lub $f \nmid X$;
 (b) elementy 2 i X **nie** są względnie pierwsze.

(8) Udowodnić, że jeśli r jest pierwszy w R, to r jest nierozkładalny w R.