KRZYWE ELIPTYCZNE, Lista 1

Niech $n, d \in \mathbb{N}_{>0}$, $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$, $X = (X_0, \ldots, X_n)$, K będzie ciałem, $\bar{K}$ algebraicznym domknięciem K, $A \subseteq \bar{K}[Y]$ i $V = V(A)$.

1. Udowodnić, że istnieje skończony podzbiór $A_0 \subseteq A$ taki, że $V = V(A_0)$.
2. Udowodnić, że $I(V) = \sqrt{(A)}$.
3. Niech $W \subseteq \mathbb{A}^n$ będzie algebraiczny. Udowodnić, że $V \subseteq W$ wtedy i tylko wtedy, gdy $I(W) \subseteq I(V)$.
4. Znaleźć $A \subseteq K[Y]$ taki, że $V(A)$ nie jest zdefiniowany nad K.
5. Załóżmy, że V/K i niech $I(V/K) := I(V) \cap K[Y]$. Udowodnić, że
   (a) $I(V)$ jest generowany przez $I(V/K)$ jako $\bar{K}$-przestrzeń liniowa,
   (b) istnieje V/K taki, że $I(V/K)$ jest pierwszy, ale V nie jest rozmaitością.
6. Niech $P \in V$. Udowodnić, że $\dim_{\bar{K}} \mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$ jest skończony.
7. Niech $f \in \bar{K}[Y]$ będzie nierozkładalny i $P \in V(f)$. Udowodnić, że:
   (a) $\dim(V(f)) = n - 1$,
   (b) punkt P jest nieosobliwy, wtedy i tylko wtedy gdy
   $$\dim_{\bar{K}} \mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2 = \dim(V(f)).$$
8. Niech $x_0, \ldots, x_n \in \bar{K}$. Udowodnić, że $[x_0 : \ldots : x_n] \in \mathbb{P}(K)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje i takie, że $x_i \neq 0$ oraz $\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i} \in K$.
9. Niech $f = \sum_k f_k \in \bar{K}[X]$, gdzie każdy f_k jest jednomianem. Niech $\sum_j i_j$ będzie stopniem jednomianu $aX_0^{i_0} \cdot \ldots \cdot X_n^{i_n}$. Udowodnić, że f jest jednorodny stopnia d wtedy i tylko wtedy, gdy stopień każdego f_k to d.
10. Udowodnić, że dowolne dwie proste w $\mathbb{P}^2$ mają niepusty przekrój.
11. Niech $I \trianglelefteq \bar{K}[X]$ będzie jednorodny. Udowodnić, że I jest pierwszy wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdych $f, g \in \bar{K}[X]$ jednorodnych, jeśli $fg \in I$, to $f \in I$ lub $g \in I$.