KRZYWE ELIPTYCZNE, Lista 2

Niech $d, m, n \in \mathbb{N}_{>0}$, $Y = (Y_1, \ldots, X_n)$, $X = (X_0, \ldots, X_n)$, K to ciało algebraicznie domknięte, $W \subseteq \mathbb{A}^n$ to rozmaitość afiniczna, $V \subseteq \mathbb{P}^n$ to rozmaitość rzutowa, $i \in \{0, \ldots, n\}$ oraz

$$\varphi_i : \mathbb{A}^n \to \mathbb{P}^n, \quad \varphi_i(y_1, \ldots, y_n) = [y_1 : \ldots : y_i : 1 : y_{i+1} : \ldots : y_n].$$

1. Niech $f \in K[X]$ będzie jednorodny i $g, h \in K[Y]$. Rozważmy operacje ujednorodnienia i odjednorodnienia względem i-tej zmiennej. Udowodnić, że:

   (a) $(g^*)_* = g$,

   (b) $(f_*)^* = f/X_i^v$, gdzie $v := \max\{l \in \mathbb{N} \ : \ X_i^l | f\}$,

   (c) $(gh)^* = g^*h^*$.

2. Dla dziedziny R i ideału maksymalnego $\mathfrak{m} \trianglelefteq R$ utożsamiamy $R_{\mathfrak{m}}$ z odpowiednim podpierścieniem ciała ułamków R. Udowodnić, że

$$R = \bigcap_{\mathfrak{m}} R_{\mathfrak{m}}.$$

3. Niech $I \subseteq K[W]$. Udowodnić, że I jest ideałem maksymalnym wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $P \in W$ taki, że $I = \{f \in K[W] \,| f(P) = 0\}$.

4. Udowodnić, że dla $f \in K(W)$, $\mathrm{dom}(f) = W$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f \in K[W]$.

5. Załóżmy, że $P \in V \cap \varphi_i(\mathbb{A}^n)$. Niech $V_i := \varphi_i^{-1}(V)$ i $P_i := \varphi_i^{-1}(P)$. Rozważmy funkcję

$$\Psi_i : \bar{K}(V_i) \to \bar{K}(V), \quad \Psi_i \left(\frac{g + I(V_i)}{h + I(V_i)} \right) = \frac{g^* X_i^{\deg(h^*)} + I(V)}{h^* X_i^{\deg(g^*)} + I(V)}.$$

   Udowodnić, że Ψ_i jest izomorfizmem oraz, że $\Psi_i(K[V_i]_{P_i}) = K[V]_P$.

6. Udowodnić, że złożenie morfizmów jest morfizmem i że id_V jest morfizmem.

7. Niech $f_0, \ldots, f_m \in K[X]_d$ będą wielomianami bez wspólnego dzielnika i $\phi = [f_0 : \ldots : f_m] : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^m$. Udowodnić, że

$$\mathrm{dom}(\phi) = \mathbb{P}^n \setminus V(f_0, \ldots, f_m).$$

8. Niech $V_1 = V(X_0^2 + X_1^2 - X_2^2)$ oraz $V_2 = V(X_0^2 + X_1^2 - 3X_2^2)$ będą krzywymi rzutowymi zdefiniowanymi nad $\mathbb{Q}$. Udowodnić, że:

   (a) V_1 nie jest izomorficzna z V_2 nad $\mathbb{Q}$.

   (b) V_1 jest izomorficzna z V_2 nad $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$.