KRZYWE ELIPTYCZNE, Lista 3

Niech $n \in \mathbb{N}_{>0}$ i K będzie ciałem algebraicznie domkniętym.

1. Niech R będzie UFD, $r \in R$ elementem nierozkładalnym i L ciałem ułamków R. Udowodnić, że:

   (a) Funkcja
   $$v_r : L^* \to \mathbb{Z}, \quad v_r(\alpha) = n, \text{ gdzie } \alpha = r^n \frac{a}{b}, \; r \nmid a, b \in R$$
   jest waluacją.

   (b) $\mathcal{O}_{v_r} = R_{(r)}$.

   (c) Dla każdej waluacji $v : L^* \to \mathbb{Z}$ pierścień $\mathcal{O}_v$ jest DVR.

2. Udowodnić, że:

   (a) Podzbiory algebraiczne $\mathbb{A}^n$ to zbiory domknięte pewnej topologii na $\mathbb{A}^n$.

   (b) Powyższa przestrzeń topologiczna jest noetherowska, tzn. dowolny zstępujący ciąg zbiorów domkniętych stabilizuje się.

   (c) Podprzestrzeń przestrzeni noetherowskiej jest noetherowska.

   (d) Noetherowska przestrzeń topologiczna rozkłada się na skończoną sumę zbiorów domkniętych nierozkładalnych, tzn. takich które nie są nietrywialną sumą podzbiorów domkniętych.

   (e) Jeśli $V \subseteq \mathbb{A}^n$ jest zbiorem algebraicznym, to V jest rozmaitością wtedy i tylko wtedy, gdy V jest nierozkładalny.

3. Niech $I \trianglelefteq K[Y_1, \ldots, Y_n]$. Udowodnić, że $V(I)$ jest skończony wtedy i tylko wtedy, gdy $\dim_K K[Y_1, \ldots, Y_n]/I$ jest skończony.

4. Niech V będzie krzywą (afiniczną lub rzutową) i $W \subsetneq V$ właściwym podzbiorem algebraicznym. Udowodnić, że W jest skończony.

5. Niech V będzie gładką krzywą (afiniczną lub rzutową) i $\alpha \in K(V)^*$. Udowodnić, że α ma skończenie wiele zer i skończenie wiele biegunów.

6. Niech $f, g \in K[X, Y] \setminus K$. Udowodnić, że zbiór $V(f, g) \subseteq \mathbb{A}^2$ jest skończony wtedy i tylko, wtedy gdy f i g nie mają wspólnych dzielników nierozkładalnych w $K[X, Y]$.

7. Udowodnić, że dla każdego skończonego $W \subset \mathbb{P}^2$ istnieje $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^2)$ taki, że $\phi(W) \cap V(Z) = \emptyset$.