KRZYWE ELIPTYCZNE, Lista 4

Niech $n, m \in \mathbb{N}_{>0}$ i K będzie ciałem algebraicznie domkniętym.

1. Dla $I \trianglelefteq K[Y_1, \ldots, Y_n]$ załóżmy, że $V(I) = \{P_1, \ldots, P_m\}$. Udowodnić, że funkcja
$$K[Y_1, \ldots, Y_n]/I \ni f + I \mapsto (f + IK[\mathbb{A}^n]_{P_i})_i \in \prod_{i=1}^{m} K[\mathbb{A}^n]_{P_i}/IK[\mathbb{A}^n]_{P_i}$$
jest izomorfizmem K-algebr.

2. Niech C będzie gładką krzywą w $\mathbb{P}^2$ i L prostą w $\mathbb{P}^2$. Udowodnić, że $I([0:0:1], L \cap C) > 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $L = T_{[0:0:1]}C$.

3. Niech R będzie pierścieniem, I ideałem pierwszym R oraz $\mathfrak{m}$ ideałem maksymalnym R takim, że $I \subseteq \mathfrak{m}$. Udowodnić, że $IR_{\mathfrak{m}} \cap R = \mathfrak{m}$.

4. Załóżmy, że $\operatorname{char}(K) \neq 2, 3$. Udowodnić, że krzywa rzutowa
$$C : Y^2Z = X^3 + aXZ^2 + bZ^3$$
jest gładka wtedy i tylko wtedy, gdy $4a^3 + 27b^2 \neq 0$.

5. Udowodnić, że dla każdej gładkiej kubiki C i punktu $O \in C$ istnieje gładka kubika E, taka że $[0:1:0] \in E$ jest potrójnym punktem przecięcia E z $V(Z)$ oraz, że istnieje izomorfizm $\phi : C \cong E$ taki, że $\phi(O) = [0:1:0]$.

6. Udowodnić, że zanurzenie Segre'a
$$\varphi : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \to \mathbb{P}^N$$
jest różnowartościowe, oraz że dla każdych $V \subseteq \mathbb{P}^n, W \subseteq \mathbb{P}^m$ rozmaitości rzutowych, $\varphi(V \times W) \subseteq \mathbb{P}^N$ jest rozmaitością.

7. Udowodnić, że $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \cong V$, gdzie $V = V(X_1X_2 - X_3X_4) \subseteq \mathbb{P}^3$.

8. Niech $E : Y^2 = X^3 + 17$ będzie gładką kubiką w $\mathbb{A}^2$. Udowodnić, że
$$(-1, 4) \oplus (2, 5) = \left(-\frac{8}{9}, -\frac{109}{27}\right).$$