PROBABILITY
AND
MATHEMATICAL STATISTICS

Vol. 10, Fasc. 1 (1989), p. 57–63

SUR LES SOLUTIONS FAIBLES D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES

PAR

OUKNINE YOUSSEF (MARRAKECH)

Abstract. A characterization of the existence of the solutions of stochastics differential equations on R – for any initial data – has been given by Engelbert and Schmidt in [5]. In this paper we propose to give a necessary and sufficient condition for the equation

$$(*) \qquad X_t = x_0 + \int_0^t \sigma(X_s)\, dB_s$$

to admit a weak solution. By using a theorem of convergence for continuous local martingals and its connection with the local time, we prove a lemma which generalizes theorem (3) of [3]. Then we deduce that if equation (*) admits a solution verifying $\langle x\rangle_\infty = +\infty$, then the diffusion coefficient σ cannot vanish on strictly positive Lebesgue measure set and, if $\sigma(x_0) \neq 0$, then σ^{-2} is locally integrable in a neighbourhood of x_0. We finish with an extending the preceding results to equations with no zero drift.

Les processus qui interviennent dans cette note sont supposés continus et définis sur une base stochastique $(\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{F}_t, P)$ qui satisfait aux conditions habituelles.

Nous rappelons le théorème suivant dû à Sharpe [7].

1. THÉORÈME. *Soit M une martingale locale continue, nous avons à des ensembles négligeables près*:

$$\{\lim_{t\to\infty} M_t \text{ existe et est finie}\} = \{\langle M, M\rangle_\infty < +\infty\}$$
$$= \{\limsup_{t\to\infty} M_t < +\infty\} = \{L_\infty^0 < +\infty\},$$

où l'on a noté $L_t^0(M)$ le temps local associé à la martingale M par la formule de Tanaka.

2. REMARQUE. Le théorème précédent est dû en grande partie à Lenglart [6], la contribution de J. Sharpe est la liaison avec le temps local en zéro de M. Pour une démonstration de ce théorème, voir [7].

3. REMARQUE. En considérant, pour $a \in R$, la martingale $M-a$, on voit que l'on peut remplacer l'ensemble $\{L_\infty^0(M) < \infty\}$ par $\{L_\infty^a(M)\}$ dans le théorème précédent.

Le lemme suivant est une généralisation du théorème (3) de [3].

4. LEMME. *Soit M une martingale locale continue telle que $\langle M, M\rangle_\infty = +\infty$ p.s.; et soit f une fonction borelienne positive vérifiant:*

$$\int_R 1_{\{x/f(x)>0\}}\, dx > 0.$$

Alors

$$\int_0^{+\infty} f(M_s)\, d\langle M\rangle_s = +\infty \quad p.s.$$

Démonstration. Comme $\langle M, M\rangle_\infty = +\infty$, nous avons, d'après la remarque précédente et le théorème 1, $L_\infty^a(M) = +\infty$ pour tout $a \in R$, et, par la formule de densité d'occupation,

$$\int_0^{+\infty} f(M_s)\, d\langle M\rangle_s = \int_R f(a)\, L_\infty^a(M)\, da \geqslant (+\infty) \int_{\{x/f(x)>0\}} f(a)\, da = +\infty,$$

ce qui établit le lemme.

5. REMARQUE. Si on suppose seulement que $P[\langle M, M\rangle_\infty = +\infty] > 0$, avec la même hypothèse sur f (celle du lemme 4) on a

$$P\Big[\int_0^{+\infty} f(M_s)\, d\langle M\rangle_s = +\infty\Big] > 0.$$

Dans la suite nous considérons l'équation différentielle stochastique sur R:

$$X_t = x_0 + \int_0^t \sigma(X_s)\, dB_s, \tag{1}$$

où $x_0 \in R$ est fixé et B désigne le mouvement brownien standard sur R.

6. THÉORÈME. *Si une solution de* (1) *existe et vérifie $\langle X\rangle_\infty = +\infty$ p.s., alors l'ensemble $\{x/\sigma(x) = 0\}$ est de mesure de Lebesgue nulle.*

Démonstration. On note $\mathcal{N} = \{x \in R/\sigma(x) = 0\}$. Si $\mathcal{N}$ est de mesure de Lebesgue strictement positive, alors la fonction indicatrice de l'ensemble $\mathcal{N}$ vérifie l'hypothèse du lemme 4; et puisque X est une martingale locale continue vérifiant $\langle X\rangle_\infty = +\infty$ p.s. on a, d'après le lemme 4,

$$\int_0^{+\infty} 1_N(X_s)\, d\langle X\rangle_s = +\infty.$$

Mais

$$\int_0^{+\infty} 1_N(X_s)\,d\langle X\rangle_s = +\infty = \int_0^{+\infty} 1_N(X_s)\sigma^2(X_s)\,ds = 0,$$

ce qui est absurde, donc $\sigma \neq 0$ presque partout.

7. Remarque. La conclusion du théorème 6 reste vraie si on suppose uniquement que

$$P\left[\int_0^{+\infty} \sigma(X_s)\,ds = +\infty\right] > 0$$

(il suffit d'utiliser le remarque 5).

Le théorème suivant est dû à Engelbert et Schmidt [5].

8. Théorème. *L'équation différentielle stochastique sur R,*

$$dX_t = a(X_t)\,dB_t \tag{2}$$

admet une solution non triviale vérifiant $X_0 = x$ (pour tout $x \in R$) si et seulement si a^{-2} est localement intégrable.

N. B. Ce théorème est une conséquence de la loi 0-1 pour les fonctionnelles browniennes établie dans [3].

Notre but dans la suite c'est de localiser ce théorème, c'est-à-dire de donner une caractérisation de l'existence d'une solution de (2) pour une valeur initiale donnée $x_0 \in R$, ce qui rend le théorème d'existence plus maniable.

9. Théorème. *Nous avons l'existence d'une solution faible de l'équation* (1) *si et seulement si $\sigma(x_0) = 0$ ou σ^{-2} est localement intégrable dans un voisinage de x_0.*

Avant de passer à la démonstration du théorème 9 nous donnons quelques corollaires.

10. Corollaire. *Si σ est continue, alors l'équation* (1) *admet une solution pour tout $x_0 \in R$.*

11. Corollaire (Barlow-Perkins)[1]. *Si σ est localement bornée, admet*

---

[1] Le théorème de Perkins et Barlow donne une condition suffisante d'existence pour l'équation

$$X_t = \int_0^t \sigma(X_s)\,dB_s + V_t(B), \quad \text{où } V\colon \mathscr{C}[0, +\infty[\to \mathscr{C}[0, +\infty[$$

est à variation bornée et continue adaptée à la filtration de B, et donc le corollaire 11 correspond à $V_t(B) = x$ pour tout $t \in R_+$. Nous l'avons signalé pour comparer avec la démonstration de Barlow et Perkins qui est fondée sur l'analyse non standard qui n'est pas très familière.

des limites à droite et à gauche en chaque point de R et vérifiant (B.P)

$$|\sigma(x^+)| \wedge |\sigma(x^-)| = 0 \to \sigma(x) = 0 \qquad \textit{pour tout } x \in R,$$

alors l'équation (1) *admet une solution réelle faible pour toute valeur initiale* x_0 *donnée.*

Démonstration du théorème 9. La démonstration est basée sur le changement de temps et inspirée de (1).

Supposons que $\sigma(x_0) \neq 0$. Soit X une solution de (1); il est évident que X n'est pas triviale. Posons

$$A_t = \langle X \rangle_t = \int_0^t \sigma^2(X_s)\, ds.$$

Puisque X n'est pas triviale, on a $\mathrm{P}[\langle X \rangle_\infty > 0] > 0$.

Soit T_t l'inverse de A défini par $T_t = \inf(s \geqslant 0; A_s > t)$. Il existe $t > 0$ tel que $\mathrm{P}[A_\infty > t] > 0$. On a $T_t < +\infty$ sur l'ensemble $\{A_\infty > t\}$:

$$t \geqslant \int_0^t \sigma^{-2}(X_s)\, \sigma^2(X_s)\, 1_{\{\sigma^2(X_s) > 0\}}\, ds,$$

$$t \geqslant \int_0^t \sigma^{-2}(X_s)\, 1_{\{\sigma^2(X_s) > 0\}}\, d\langle X \rangle_s.$$

Si on note $\mathcal{N}(\omega) = \{s \in [0, t]/\sigma(X_s(\omega)) = 0\}$, on a

$$\int_0^t 1_{\{\sigma^2(X_s(\omega)) = 0\}}\, d\langle X \rangle_s = 0,$$

ce qui veut dire que $\mathcal{N}(\omega)$ est de mesure nulle pour la mesure $d\langle X \rangle_s(\omega)$, donc $\int_{\mathcal{N}(\omega)} (+\infty)\, d\langle X \rangle_s(\omega) = 0$.

Soit

$$\int_0^t 1_{\{\sigma^2(X_s(\omega)) = 0\}} \frac{1}{\sigma^2(X_s(\omega))}\, d\langle X \rangle_s(\omega) = 0.$$

De là on tire que

$$t \geqslant \int_0^t \sigma^{-2}(X_s)\, d\langle X \rangle_s.$$

En particulier, sur l'ensemble $\{T_t < +\infty\}$, on a

$$T_t \geqslant \int_0^{T_t} \sigma^{-2}(X_s)\, d\langle X \rangle_s.$$

Mais sur l'ensemble $\{T_t < +\infty\}$ on a la représentation de X: $X_s =$

$x_0+B_{\langle X\rangle s}$, d'où, pour tout $t < A_\infty$, on a

$$+\infty > T_t \geqslant \int_0^{T_t} \sigma^{-2}(x_0+B_{\langle X\rangle s})\, d\langle X\rangle_s \geqslant \int_0^t \sigma^{-2}(x_0+B_s)\, ds.$$

Si $\Omega_0 = \{A_\infty > 0\}$, on a $\mathrm{P}(\Omega_0) > 0$; il existe $\tau > 0$ temps fixe tel que $P(A_\infty > \tau) > 0$. On note $\Omega_\tau = \{A_\infty > \tau\}$. On a

$$\mathrm{P}\big(\Omega_\tau \cap \{\int_0^\tau \sigma^{-2}(x_0+B_s)\, ds < +\infty\}\big) > 0 \to \mathrm{P}\big(\{\int_0^\tau \sigma^{-2}(x_0+B_s)\, ds < +\infty\}\big) > 0.$$

Par le lemme 4 de [3] on conclut qu'il existe un voisinage V_{x_0} de x_0 tel que $\sigma^{-2} \in L^1_{\mathrm{loc}}(V_{x_0})$.

Réciproquement, si $\sigma(x_0) = 0$, alors $X_t = x_0$ est solution de (1).

Supposons alors que $\sigma^{-2} \in L^1_{\mathrm{loc}}(V_{x_0})$. Soit $\varepsilon > 0 / I_\varepsilon =]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[\subset V_{x_0}$. Alors pour K compact inclus dans I_ε, on a

$$\int_K \sigma^{-2}(u)\, du < +\infty$$

et par le théorème (5) de [3] on conclut que l'équation (1) admet une solution faible.

Exemple. L'équation

$$X_t = x_0 + \int_0^t 1_{\{X_s \in Q\}}\, dB_s$$

admet une solution si $x_0 \in R \backslash Q$ et elle n'admet pas de solution si $x_0 \in Q$.

De même, si $\sigma(x) = 1_{\{x > x_0\}}$, l'E.D.S. n'admet pas de solution, mais admet une solution si $\sigma(x) = 1_{\{x \geqslant x_0\}}$.

A l'aide du théorème 9 nous pouvons donner un renforcement du théorème 6 à comparer à un résultat de [4].

12. Théorème. *Si l'équation* (1) *admet une solution vérifiant*

$$\int_0^{+\infty} \sigma^2(X_s)\, ds = +\infty \quad p.s.,$$

alors:

1° $\mathcal{N} = \{x/\sigma(x) = 0\}$ *est de mesure de Lebesgue nulle*;

2° σ^{-2} *est localement intégrable au voisinage de* x *pour tout* $x \in \mathcal{N}^c$.

Démonstration. 1° a été démontré au théorème 6. Nous allons démontrer que l'E.D.S.

$$X_t = x + \int_0^t \sigma(X_s)\, dB_s$$

admet une solution pour tout x appartenant à R et en utilisant le théorème 9 on a le résultat.

Par hypothèse, l'équation

$$X_t = x_0 + \int_0^t \sigma(X_s)\, dB_s$$

admet une solution vérifiant $\langle X \rangle_\infty = +\infty$. X est donc une martingale locale continue et $\langle X \rangle_\infty = +\infty$, c'est donc un mouvement brownien avec l'échelle de temps $t \to \langle X \rangle_t$, et par suite tout point de R est atteint par X en un temps fini. Soit $T = \inf(s \geqslant 0;\ X_s = x)$.

On a $T < +\infty$ p.s. et X est un processus de Markov fort. Si on pose $\tilde{X}_t = \tilde{X}_{T+t}$, $\tilde{\mathscr{F}}_t = \mathscr{F}_{T+t}$, $\tilde{B}_t = B_{T+t} - B_T$, on voit facilement que $(\tilde{X}, \tilde{B}, \tilde{\mathscr{F}})$ vérifie l'équation

$$X_t = x + \int_0^t \sigma(X_s)\, dB_s.$$

EXTENSIONS DES RESULTATS AUX EQUATIONS AVEC DRIFT

Nous considérons l'équation différentielle stochastique sur R,

$$\text{(II)} \qquad X_t = x_0 + \int_0^t \sigma(X_s)\, dB_s + \int_0^t b(X_s)\, ds,$$

où les fonctions σ et b sont supposées localement bornées.

Si on fait l'hypothèse suivante: $b\sigma^{-2} \in L^1_{\text{loc}}(]x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon[)$ pour un certain $\varepsilon > 0$, nous obtenons le théorème suivant:

13. Théorème. *L'équation* (II) *admet une solution faible non triviale si et seulement si σ^{-2} est localement intégrable dans un voisinage de x_0.*

Si maintenant on fait l'hypothèse $b\sigma^{-2} \in L^1(R)$, nous avons le

14. Théorème. *Si une solution de* (II) *existe et vérifie la condition*

$$\int_0^t \sigma^2(X_s)\, ds = +\infty \ \text{p.s.},$$

alors $\{x \in R / \sigma(x) = 0\}$ est de mesure de Lebesgue nulle.

15. Remarque. Ces deux théorèmes se démontrent de la même manière que les précédents, en utilisant la transformation de Zvonkin définie par la formule

$$F(x) = \int_0^t e^{-2\left\{\int_0^y \frac{b(u)}{\sigma^2(u)}\right\}} du$$

et en posant $F(X_t) = Y_t$.

REMERCIEMENT. Je remercie Madame Mastrangelo de m'avoir posé ce problème et de l'aide qu'elle m'a apportée lors de la préparation de cet article.

REFERENCES

[1] M. T. Barlow and E. Perkins, *Strong existence, uniqueness and non-uniqueness in an equation involving local time*, L. N. Séminaire de Probabilité XVII (1981-1982), p. 32–61.

[2] C. Betz et H. Gzyl, *Remarks on the equation* $dX_t = a(X_t)dB_t$, Stochastic Processes and their applications (1981), p. 313–315.

[3] H. J. Engelbert et W. Schmidt, *On the behaviour of certain functionals of the Wiener process and applications to stochastic differential equations*, L. N. in control and Information Sciences 36 (1981), p. 47–50.

[4] – *On one-dimensional stochastic differential equations with generalized drift*, ibidem 25.

[5] – *On solutions of one-dimensional stochastic differential equations without drift*, Z. W. Gebiete 68 (1985), p. 287–314.

[6] E. Lenglart, *Sur la convergence presque sûre des martingales*, C. R. Acad. Sci. Paris 284 (1977), p. 1085–1088.

[7] M. J. Sharpe, *Local times and singularities of continuous local martingales*, Séminaire de Probabilité XIV (1978-1979), p. 76–101.

Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences
Department de Mathématiques
Marrakech, Maroc

Received on 15. 6. 1987