PROBABILITY
AND
MATHEMATICAL STATISTICS
Vol. 11, Fasc. 1 (1990), p. 37-46

# COMPARAISON ET NON-CONFLUENCE DES SOLUTIONS D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES STOCHASTIQUES UNIDIMENSIONNELLES

PAR

YOUSSEF OUKNINE (MARRAKECH)

*Résumé.* Dans ce papier nous établissons un théorème général de comparaison des E.D.S. Les résultats que nous avons obtenus étendent ceux de [11] et [6]. Lorsque les coefficients de diffusion sont les mêmes, nous retrouvons les théorèmes de comparaison de [4].

La non-confuence des solutions d'E.D.S. a été étudiée par Emery [2], Uppman [12], Yor [15] et Revuz–Yor [10]; tous ces auteurs considèrent des E.D.S. à coefficients lipschitziens.

Un résultat récent de Yamada [13] étudie la non-confluence pour les E.D.S. homogènes à coefficient de diffusion non dégénéré. On se propose de généraliser le résultat de [13] et d'en donner une démonstration sans régularisation des coefficients. Notre méthode est basée sur les martingales exponentielles et un lemme de Yoeurp–Yor [16].

**Notations et définitions.** Les processus qui interviennent dans l'article sont relatifs à une base stochastique $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}, P)$ qui satisfait les conditions habituelles de la théorie des processus. Pour $i = 1, 2$ nous noterons $X^i$ la solution de l'E.D.S. $lx_i(\sigma_i, b_i)$ donnée par

$$X_t^i = x^i + \int_0^t \sigma_i(s, X_s^i)\, dB_s + \int_0^t b_i(s, X_s^i)\, ds.$$

$(B_t)_{t\geqslant 0}$ désigne un mouvement brownien réel nul en 0, $x^i \in R$, $\sigma_i$, $b_i$ sont des fonctions mesurables bornées de $R_+ \times R$ à valeurs réelles.

Pour éviter des problèmes de localisation et recollement nous supposons que les processus $X^i$ sont majorés par une constante $M$, indépendante de $t$ et de $\omega \in \Omega$.

Nous définissons l'opérateur différentiel $\mathscr{L}$ par

$$\forall f \in \mathscr{C}^{1,2}(R_+ \times R)\colon\ \mathscr{L}f(t, x, y) = \frac{\partial f}{\partial t} + b_1(t, x)\frac{\partial f}{\partial x} + b_2(t, y)\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{2}\left\{\sigma_1^2(t, x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \sigma_2^2(t, y)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2\sigma_1(t, x)\sigma_2(t, y)\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right\}.$$

Soit $\lambda$ une fonction continue de $R_+ \times R_+$ à valeurs dans $R_+$. Nous dirons que $\lambda$ *vérifie* (A) si:

(i) $\forall t \in R_+$; $\lambda(t, \cdot)$ est croissante concave et nulle en 0.

(ii) La solution maximale de l'équation

$$(*) \qquad u'(t) = \lambda(t, u(t)), \quad u(0) = 0$$

est la fonction nulle.

1. Théorème. *Nous supposons qu'il existe une suite de fonctions $W^m$ satisfaisant les conditions suivantes:*

1. $W^m \in C^{1,2,2}(R_+ \times R \times R, R_+)$ *et* $W^m(0, x^1, x^2) = 0$.

2. $W^m$ *converge presque partout vers une fonction* $W$: $W(t, x, y) = 0 \Rightarrow x \leqslant y$.

3. *Il existe une fonction $\lambda$ vérifiant* (A) *et une fonction $f_m$ telles que* $\mathscr{L} W^m(t, x, y) \leqslant \lambda(t, W(t, x, y)) + f_m(t)$ *et*

$$\int_0^T |f_m(s)|\, ds \to 0 \text{ quand } m \to +\infty; \forall T > 0.$$

*Alors* $P\{X_t^1 \leqslant X_t^2; \forall t \geqslant 0\} = 1$.

Démonstration. Nous appliquons la formule d'Itô au processus $W^m(t, X^1, X^2)$. Nous avons

$$W^m(t, X_t^1, X_t^2) = W^m(0, x^1, x^2) + \text{Martingale} + \int_0^t \mathscr{L} W^m(s, X_s^1, X_s^2)\, ds,$$

d'où

$$EW^m(t, X_t^1, X_t^2) = E\int_0^t \mathscr{L} W^m(s, X_s^1, X_s^2)\, ds$$

$$\leqslant \int_0^t \lambda(s, EW(s, X_s^1, X_s^2))\, ds + E\int_0^t |f_m(s)|\, ds.$$

En utilisant le lemma de Fatou, nous avons

$$EW(t, X_t^1, X_t^2) \leqslant \int_0^t \lambda(s, EW(s, X_s^1, X_s^2))\, ds.$$

Il en résulte d'après les inégalités différentielles que $EW(t, X_t^1, X_t^2) \leqslant 0$, car 0 est la solution maximale de l'équation $(*)$. Donc $W(t, X_t^1, X_t^2) = 0$ p.s., d'où $X_t^1 \leqslant X_t^2$ p.s. $\forall t \in R_+$. En utilisant la continuité des processus $X^1$ et $X^2$, on a $P\{X_t^1 \leqslant X_t^2; \forall t \geqslant 0\} = 1$.

2. Remarque. Le théorème 1 généralise celui de Takeuchi [11] qui considère le cas particulier suivant:

$$x^1 = x^2, \quad \sigma_1 = \sigma_2 \text{ et } \lambda(t, x) = \Phi(t)\Psi(x), \quad b_1 < b_2.$$

3. COROLLAIRE. *Si, pour $i = 1, 2$, $X^i$ désigne la solution de*

$$X_t^i = x^i + \int_0^t \sigma_i(X_s^i)\,\partial B_s + \int_0^t b_i(X_s^i)\,ds$$

*($\partial B$ désigne la dérivée au sens de Stratonovich) avec $\sigma_i \in \mathscr{C}^1(R, R_+^*)$, $b_i$ mesurable bornée.*

*Alors sous les hypothèses* (1) *et* (2) *suivantes:*

$$\forall x \in R\colon \int_{x^1}^{x} \sigma_1^{-1}(u)\,du \geqslant \int_{x^2}^{x} \sigma_2^{-1}(u)\,du, \tag{1}$$

$$b_1 \sigma_1^{-1}(x) \leqslant b_2 \sigma_2^{-1}(y)\ \forall x \in R,\ \forall y \in R, \tag{2}$$

*nous avons $P\{X_t^1 \leqslant X_t^2, \forall t \geqslant 0\} = 1$.*

Démonstration. Il est clair d'après (1) que $x^1 < x^2$.

Soit $(\varphi_n)$ une suite de fonctions de classe $C^2$ telle que $\varphi_n(x) \to x^+$ quand $n \to +\infty$, chaque fonction $\varphi_n$ étant croissante.

On pose

$$W^m(t, x, y) = \varphi_m\Big(\int_{x^1}^{x} \sigma_1^{-1}(u)\,du - \int_{x^2}^{y} \sigma_2^{-1}(u)\,du\Big).$$

Il est facile de voir que $W^m$ satisfait les hypothèses (i) et (ii) du théorème 1. Un calcul direct donne:

$$\mathscr{L} W^m(t, x, y) = \big(b_1 \sigma_1^{-1}(x) - b_2 \sigma_2^{-1}(y)\big)\,\varphi_m'(\cdot).$$

Les dérivées $\varphi_n'$ sont positives et, d'après la condition (2), on a $\mathscr{L} W^m(t, x, y) \leqslant 0$. Par suite, on obtient $P\{X_t^1 \leqslant X_t^2, \forall t \geqslant 0\} = 1$.

4. Remarque. Le corollaire reste valable si on suppose uniquement que $b_1 \sigma_1^{-1}(x) \leqslant b_2 \sigma_2^{-1}(y)$, $x$ et $y$ vérifiant $x \leqslant y$.

Ce corollaire est une extension d'un théorème d'O'Brien [6] qui considère le cas $b_1 = b_2 = 0$. Comme corollaire du théorème 1 nous avons le résultat suivant dû à Ikeda–Watanabe [4].

5. COROLLAIRE. *Soit $X^i$ une solution de l'équation $l_{x_i}(\sigma, b_i)$. On suppose que les conditions suivantes sont vérifiées:*

1. *il existe $\varrho\colon [0, +\infty[ \to [0, +\infty[$ nulle en 0 croissante et*

$$\int_{0^+} \varrho^{-2}(u)\,du = +\infty, \qquad |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leqslant \varrho(|x-y|);$$

2. *$b_1$ et $b_2$ sont continues et, pour tout réel positif $t$, $b_1(t, x) < b_2(t, x)$;*
3. *$x^1 \leqslant x^2$.*

*Alors $P\{X_t^1 \leqslant X_t^2, \forall t \geqslant 0\} = 1$.*

Pour la démonstration de ce théorème à partir du théorème 1, on pourra consulter l'article [11].

**Non-confluence des solutions d'équations différentielles stochastiques.** Dans cette partie nous nous intéressons à la non-confluence des solutions d'équations différentielles stochastiques d'un type assez général. Notre approche est basée sur la méthode des exponentielles utilisées par Uppman [12] et reprises par Yor [15] et Revuz–Yor [10] afin de rafiner certains théorèmes de comparaison dans le cas lipschitzien.

Nous rappelons ce théorème dû à Yor [15].

**6.** THÉORÈME. *Si $X^i$ vérifie $e_x(\sigma, b_i)$, si $b_1$ et $b_2$ sont deux fonctions continues telles que $b_1 \geqslant b_2$ et $\sigma$ est une fonction lipschitzienne, si on suppose en outre satisfaite l'une des deux hypothèses suivantes:*

(i) *pour tout $y \in R$, $b_1(y) > b_2(y)$,*

(ii) *$|\sigma| \geqslant \varepsilon > 0$, $b_1$ est lipschitzienne et il existe un voisinage $V(x)$ de $x$ tel que*

$$\int_{V(x)} da\big(b_1(a) - b_2(a)\big) > 0,$$

*alors, on a $P\{\forall t > 0, X_t^1 > X_t^2\} = 1$.*

Remarque. La démonstration de ce théorème est basée sur la continuité et la positivité du temps local $L_t^a(X^1)$ pour $t > 0$.

Nous utiliserons quelques résultats techniques pour établir notre résultat de non-confluence.

**7.** LEMME (Yoeurp–Yor [16]). *Si $(A_t)$ et $(C_t)$ sont deux semi-martingales continues, l'unique solution de l'équation*

$$Z_t = A_t + \int_0^t Z_s \, dC_s$$

*peut s'écrire sous la forme*

$$Z_t = \varepsilon(C_t)\{A_0 + \int_0^t \varepsilon(C_s)^{-1}(dA_s - d\langle C, A\rangle_s)\} \quad \text{avec } \varepsilon(C_t) = \exp\left\{C_t - \frac{1}{2}\langle C\rangle_t\right\}.$$

Nous aurons également besoin de ce théorème dû à Krylov [5].

**8.** THÉORÈME. *Pour tous réels $M > 0$ et $r > 0$ tels que si $B$ désigne un mouvement brownien sur $R^d$, $d \geqslant 1$, défini sur $\big(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t \geqslant 0}, P\big)$ et $\Phi$ et $\Psi$ deux processus progressivement mesurables,*

$$\Phi\colon \Omega \times [0, r] \to R^d,$$

$$\Psi\colon \Omega \times [0, r] \to \mathscr{M}_{R^d} \text{ (Matrice)},$$

*vérifiant $\|\Psi\| + \|\Phi\| + |\det \Psi^{-1}| \leqslant M$,*

$$X_0 \in R^d \quad \text{et} \quad X_t = X_0 + \int_0^t \Phi_s \, ds + \int_0^t \Psi_s \, dB_s.$$

*Alors, pour toute fonction h définie de* $[0, r] \times R^d$ *à valeurs dans* $R_+$, *on a*

$$E\left(\int_0^r h(t, X_t)\, dt\right) \leqslant K \, \|h\|_{L^{d+1}([0,r] \times R^d)}.$$

Ce théorème reste vrai lorsque $X_0 = X_0(\omega)$ est une variable aléatoire bornée.

Pour $i = 1, 2$ nous considérons les équations d'un type assez général,

$$X_t^i = x^i + \int_0^t \sigma(s, X_s^i)\, dB_s + V_t^i(B),$$

où $V_0^i(B)$ est un processus continu, nul en zéro, absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue sur $R_+$, de densité bornée. On suppose également que $V^i(B)$ est adapté à la filtration engendrée par $B$, et que $\sigma$ est progressivement mesurable.

Bien sûr, pour parler de non-confluence, nous supposons que les E.D.S. considérés jouissent de l'unicité trajectorielle. Les E.D.S. d'Itô correspondent au cas

$$V_t^i(B) = \int_0^t b^i(X_s^i)\, ds.$$

En effet le processus $\int_0^t b^i(X_s^i)\, ds$ satisfait toutes les hypothèses exigées de $V^i(B)$.

Nous notons:

$$A = \{x^1 < x^2;\ V^1 - V^2 \text{ décroissant}\},$$

$$A' = \{x^1 \leqslant x^2;\ V^1 - V^2 \text{ strictement décroissant}\}.$$

Notre théorème principal est le suivant:

**9.** Théorème. *Soit* $\sigma$ *une fonction de* $R_+ \times R$ *à valeurs dans* $R$, *vérifiant*:
(i) $x \to \sigma(t, x)$ *est absolument continue et*

$$\frac{\partial}{\partial x} \sigma(t, x) \in L^4_{\mathrm{loc}}(R_+ \times R);$$

(ii) *il existe deux constantes* $M > 0$ *et* $\varepsilon > 0$ *telles que* $M \geqslant |\sigma| \geqslant \varepsilon$.
*Alors on a*:
*sur l'ensemble* $A$, $P\{X_t^1 < X_t^2, t \geqslant 0\} = 1$;
*sur l'ensemble* $A'$, $P\{X_t^1 < X_t^2, t > 0\} = 1$.

Démonstration. Nous avons

$$X_t^1 - X_t^2 = x^1 - x^2 + \int_0^t [\sigma(s, X_s^1) - \sigma(s, X_s^2)]\, dB_s + V_t^1(B) - V_t^2(B).$$

En écrivant l'identité valable pour les fonctions absolument continues,

$$\sigma(s, x)-\sigma(s, y) = (x-y)\int_0^1 \frac{\partial \sigma}{\partial x}(s, \alpha x+(1-\alpha)y)\,d\alpha,$$

il vient que

$$X_t^1-X_t^2$$

$$= x^1-x^2+\int_0^t\int_0^1 \frac{\partial \sigma}{\partial x}(s, \alpha X_s^1+(1-\alpha)X_s^2)(X_s^1-X_s^2)\,d\alpha\,dB_s+V_t^1(B)-V_t^2(B).$$

On pose

$$H_s = \int_0^1 \frac{\partial \sigma}{\partial x}(s, \alpha X_s^1+(1-\alpha)X_s^2)\,d\alpha,$$

$$E\int_0^t H_s^2\,ds \leqslant E\int_0^t\int_0^1 \left|\frac{\partial \sigma}{\partial x}(s, \alpha X_s^1+(1-\alpha)X_s^2)\right|^2 d\alpha\,ds.$$

Par le théorème de Fubini on a

$$E\int_0^t H_s^2\,ds \leqslant \int_0^1 E\int_0^t \left|\frac{\partial \sigma}{\partial x}(s, \alpha X_s^1+(1-\alpha)X_s^2)\right|^2 ds\,d\alpha;$$

en utilisant l'estimation de N. V. Krylov, on a

$$E\int_0^t H_s^2\,ds \leqslant K_T\int_0^1 \left\|\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right\|^2_{L^4_{\mathrm{loc}}(R_+\times R)}, \quad t\leqslant T.$$

Il en résulte donc que le processus $M_t$, défini par

$$M_t = \int_0^t H_s\,dB_s,$$

est une martingale de carré intégrable sur $[0, T]$ et

$$X_t^1-X_t^2 = x^1-x^2+\int_0^t (X_s^1-X_s^2)\,dM_s+V_t^1(B)-V_t^2(B).$$

En utilisant le lemma on a

$$X_t^1-X_t^2 = \varepsilon(M_t)\left\{x^1-x^2+\int_0^t \frac{d(V_s^1-V_s^2)}{\varepsilon(M_s)}\right\}.$$

Comme $\varepsilon(M_t) > 0$, $\forall t \geqslant 0$, on a le résultat désiré.

**10.** Remarque. Si on suppose que $\sigma(t, x)$ ne dépend pas de la variable $t$, la condition (1) peut être affaiblie en (1′) ci-dessous:

(1′) $\sigma$ est absolument continue et $d\sigma/dx \in L^2_{\text{loc}}(R)$.

C'est précisément sous cette hypothèse que le théorème a été démontré par Yamada [14].

Dans le cas (1′) (cas homogène), on peut se passer de l'estimée de N. V. Krylov, l'usage des temps locaux suffit.

**11.** Remarque. Le théorème de non-confluence que nous venons d'établir n'est pas le plus général possible. En effet, on peut mélanger les conditions du théorème 9 et celles d'Ogura–Yamada [7], c'est-à-dire, prendre $\sigma(t, x) = \sigma_1(t, x)\sigma_2(t, x)$, où $\sigma_1$ vérifie les hypothèses du théorème 9 et $\sigma_2$ localement lipschitzienne en $x$ et non dégénérée.

Il est bien connu que, pour les équations d'Itô à coefficients lipschitziens, les résultats de non-confluence s'étendent en dimension finie quelconque [2, 12]. Cependant nous n'avons pas réussi à étendre le théorème 9 en dimension supérieure à un.

**N.B.** Après avoir rédigé l'essentiel de cet article M. Yor nous a appris que des résultats de non-confluence des solutions d'équations différentielles stochastiques lipschitziennes ont été obtenus par lui-même dans [15].

**Annexe.** Dans le cas de la dimension $d = 1$, nous donnons une démonstration purement probabiliste de l'estimée de Krylov (cette démonstration nous été suggerée par M. Yor).

Dans un premier temps, on suppose que

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)\, ds + \beta_t$$

où $b$ est une fonction bornée et $\beta$ est le mouvement brownien.

Pour toute fonction borélienne positive $h$ on a

$$E\left[\int_0^r h(s, X_s)\, ds\right] = E\left[\int_0^r h(s, \beta_s)\, ds \exp\left(\int_0^r b(s, \beta_s)\, d\beta_s - \frac{1}{2}\int_0^r b^2(s, \beta_s)\, ds\right)\right].$$

Ceci est obtenu par le théorème de Girsanov. Nous avons alors

$$E\left[\int_0^r h(s, X_s)\, ds\right] \leqslant E\left[\left(\int_0^r h(s, \beta_s)\, ds\right)^2\right]^{1/2} I,$$

où

$$I^2 = E\left[\exp 2\int_0^r b(s, \beta_s)\, d\beta_s - 2\int_0^r b^2(s, \beta_s)\, ds\right] \exp \int_0^r b^2(s, \beta_s)\, ds.$$

Comme $b$ est bornée, $|b| \leqslant K$, cette expression est majorée par $\exp(rK^2)$. On se ramène donc à montrer que

$$E\left[\left(\int_0^r h(s,\beta_s)\,ds\right)^2\right] \leqslant C\,\|h\|^2_{L^2([0,r]\times R)}.$$

On a

$$E\left[\left(\int_0^r h(s,\beta_s)\,ds\right)^2\right] = 2E\left[\int_0^r h(s,\beta_s)\,ds\int_s^r h(u,\beta_u)\,du\right],$$

soit, en utilisant la propriété de Markov,

$$E\left(\int_0^r h(s,\beta_s)\,ds\right)^2 = 2\int_0^r ds\int_s^r du\int p_s(x_0,x)\,h(s,x)\,dx\int p_{u-s}(x,y)\,h(u,y)\,dy$$

$$\leqslant 2\int_0^r ds\int p_s(x_0,x)\,h(s,x)\,dx\int_0^r du\int p_u(x,y)\,h(u,y)\,dy$$

$$\leqslant 2\int_0^r ds\int p_s(x_0,x)\,h(s,x)\,dx\left(\int_0^r du\int p_u^2(x,y)\,dy\right)^{1/2}\|h\|_{L^2([0,r]\times R)}.$$

Soit

$$E\left(\int_0^r h(s,\beta_s)\,ds\right)^2 \leqslant C\,\|h\|^2_{L^2_{\mathrm{loc}}}\int_0^r du\int \frac{e^{-y^2/2u}}{u}\,dy$$

par changement de variable nous nous ramenons à

$$E\left(\int_0^r h(s,\beta_s)\,ds\right)^2 \leqslant \tilde{C}\,\|h\|^2_{L^2([0,r]\times R)}.$$

Dans le cas général nous allons essayer de nous ramener au cas précédent modulo quelques hypothèses:

$$X_t = x + \int_0^t b(s,X_s)\,ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)\,d\beta_s.$$

On pose

$$A_t = \int_0^t \sigma^2(s,X_s)\,ds, \qquad \tau_t = \inf\{u;\, Au > t\}.$$

On a:

$$d\tau_s = \frac{ds}{\sigma^2(\tau_s, X_{\tau_s})},$$

$$E\int_0^r h(s,X_s)\,ds = E\left[\int_0^r h(\tau_{A_s}, X_{\tau_{A_s}})\frac{dA_s}{\sigma^2(s,X_s)}\right] = E\int_0^{A_r} h(\tau_u, X_{\tau_u})\,du,$$

$$X_{\tau_u} = a + \int_0^u b(\tau_s, X_{\tau_s})\,d\tau_s + \beta'_u = x + \int_0^u b\sigma^{-2}(\tau_s, X_{\tau_s})\,ds + \beta'_u.$$

Pour pouvoir appliquer le théorème de Girsanov, comme précédemment il faut que $\tau_s$ soit adapté. C'est le cas par exemple si $\sigma$ est lipschitzienne en $s$ uniformément en $x$. Donc sous cette hypothèse on a l'estimation voulue.

Enfin pour passer au cas général, où

$$X_t = x + \int_0^t \varphi_s\, ds + \int_0^t \psi_s\, d\beta_s,$$

nous utilisons un résultat de Gyöngy [3] qui montre qu'il existe $\bar{X}$ qui satisfait une équation non homogène d'Itô telle que $\bar{X}_t \overset{\text{Loi}}{=} X_t$, $\forall t \geqslant 0$, et par suite l'estimation s'écrit

$$E\int_0^r h(s, X_s)\, ds = \int_0^r Eh(s, \bar{X}_s)\, ds \leqslant C\, \|h\|_{L^2_{[0,r]\times R}}$$

ceci d'après ce qui précède.

## REFERENCES


[1] N. J. Cutland, *Simplified existence for solutions to stochastic differential equations*, Stochastics 14 (1985), p. 319–325.

[2] M. Emery, *Non-confluence des solutions d'une équation stochastique lipschitzienne*, Séminaire de Probabilités XV, 1979–1980, L. N. Math., Springer-Verlag, p. 587–589.

[3] I. Gyöngy, *Mimicking the one-dimensional marginal distributions of processes having an Itô differential*, Probab. Th. Rel. Fields 71 (1986), p. 501–516.

[4] N. Ikeda and S. Watanabe, *Stochastic differential equations and diffusion processes*, North-Holland, 1981.

[5] N. V. Krylov, *Some estimates of the probability density of a stochastic integral*, Math. USSR, Izvestija, 1974, p. 233–254.

[6] G. L. O'Brien, *A new comparison theorem for solution of stochastic differential equations*, Stochastics 3 (1980), p. 245–249.

[7] Y. Ogura, *On the nearness of two solutions in comparison theorems for one-dimensional stochastic differential equations*, Stoch. Anal. Appl. 7 (1989), p. 353–365.

[8] Y. Ouknine, *Sur l'unicité des solutions d'équations différentielles stochastiques*, Ann. de Clermont II.6, 1986.

[9] — *Comparaison des solutions d'équations différentielles stochastiques*, C. R. Acad. Sc. Paris 304.5, Série A, 1987.

[10] D. Revuz et M. Yor — livre à paraître.

[11] K. Takeuchi, *Comparison theorems for solutions of stochastic differential equations*, Memoirs of the Faculty of Science, Kyushu Univ., 35.1, Ser. A, 1981.

[12] A. Uppman, *Sur le flot d'une équation différentielle stochastique*, Séminaire de Probabilités XVI, 1982, L. N. Math., Springer-Verlag, p. 201–208.

[13] T. Yamada, *On the non-confluent property of solutions of one-dimensional stochastic differential equations*, Stochastics 17 (1986), p. 111–124.

[14] T. Yamada and Y. Ogura, *On the Strong theorems for solutions of stochastic differential equations*, Z. W. G. 56 (1981), p. 3–19.

[15] M. Yor, *Notes de Cours*, 1983 (non publiés).
[16] Yoeurp–Yor, *Espace orthogonal à une semi-martingale*, 1977 (non publié).

Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Marrakech, Maroc

*Received on 9. 2. 1988*