PROBABILITY
AND
MATHEMATICAL STATISTICS
Vol. 11, Fasc. 1 (1990), p. 47-78

MOUVEMENTS BROWNIENS ASYMÉTRIQUES MODIFIÉS EN DIMENSION FINIE ET OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS À COEFFICIENTS DISCONTINUS

PAR

MICHÈLE MASTRANGELO ET MOULOUD TALBI (PARIS)
avec la collaboration de Victor MASTRANGELO et Youssef OUKNINE

Abstract. We consider a partial differential equation of parabolic type on $\mathscr{E} = \boldsymbol{R}^d$ $(d \in N_*)$,

$$(1) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= Lu(x, t), \quad x \in \mathscr{E},\ t \in \boldsymbol{R}_+, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad u(\cdot, t)/\partial\mathscr{E} = 0 \end{aligned}$$

where $L = (C1_{\mathscr{V}} + D1_{\mathscr{W}})\Delta + \delta_{\mathscr{S}} A\nabla$, $\mathscr{V}$ and $\mathscr{W}$ being two subdomains of $\mathscr{E}$ such that $\mathscr{E} = \mathscr{V} \cup \mathscr{W} \cup \mathscr{S}$, $\mathscr{V} \cap \mathscr{W} = \emptyset$, and $\mathscr{S}$ being a $\mathscr{C}^2$-variety. The functions C and D are $\mathscr{C}^2$ on $\mathscr{E}$, $\delta_{\mathscr{S}}$ is the surface-vector-measure on $\mathscr{S}$, A is a function defined on $\mathscr{S}$ which will be precised later on, $\delta_{\mathscr{S}} A$ is a generalized drift, ∇ [resp. Δ] is the classical gradient [resp. Laplacian operator] on $\boldsymbol{R}^d$.

We give, via a modified skew Brownian motion, a stochastic resolution of (1) — L being considered as a generalized infinitesimal generator — and we study the continuity properties of the transition probability densities and of their derivatives at the neighbourhood of $\mathscr{S}$.

INTRODUCTION

L'étude est faite sur un domaine $\mathscr{E}$ de $\boldsymbol{R}^d$ pour des opérateurs différentiels paraboliques $\partial/\partial t + L$ ou $\partial/\partial t - L$, où L est un opérateur elliptique de la forme $\Gamma\Delta + \delta_{\mathscr{S}} A\nabla$ dont les coefficients A et Γ, au moins dans cette première étape, ne dépendent pas du temps, et dépendent seulement de la variable spatiale.

Une étude plus complète pourrait être ensuite effectuée lorsque les coefficients de L dépendent du temps.

Comme les coefficients de L sont indépendants du temps, il est équivalent de considérer la résolution de

$$(1) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= Lu(x, t), \quad t \geqslant 0, \\ u(x, 0) &= f(x) \quad \text{(donnée "initiale")}, \quad u/\partial\mathscr{E} \equiv 0 \end{aligned}$$

ou bien

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + Lu(x, t) = 0, \qquad t \leqslant t_0,$$

$$u(x, t_0) = f(x) \qquad \text{(donnée “finale”)},$$

$$u/\partial\mathscr{E} \equiv 0.$$

Nous nous attacherons donc, par exemple, au premier problème (avec donnée “initiale”). Nous supposons que $\mathscr{E}$ peut s'écrire comme

$$\mathscr{E} = \boldsymbol{R}^d = \mathscr{V} \cup \mathscr{W} \cup \mathscr{S}, \qquad \mathscr{V} \cap \mathscr{W} = \varnothing,$$

où $\mathscr{V}$ et $\mathscr{W}$ sont deux sous-ouverts de $\mathscr{E}$ et où $\mathscr{S}$ est une variété de dimension $d-1$, de classe $\mathscr{C}^2$ et à courbure bornée. Nous nous plaçons dans le cas où l'opérateur L est “de classe $\mathscr{C}^2$ par morceaux”,

(2) $$L = \big(C(x)\,\mathbf{1}_{\mathscr{V}} + D(x)\,\mathbf{1}_{\mathscr{W}}\big)\Delta + \delta_{\mathscr{S}}\,A(x)\,\nabla,$$

où C et D sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\boldsymbol{R}^d$, à dérivées secondes bornées.

Δ désigne le Laplacien usuel dans $\boldsymbol{R}^d$:

$$\Delta = \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}.$$

∇ désigne le gradient usuel:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_d}\right)^t.$$

Le générateur infinitésimal généralisé L est alors défini par:

Pour tout couple (φ, ψ) de fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathscr{E}$, à supports compacts,

$$\int_{\mathscr{E}} \varphi(x)\,L\psi(x)\,dx = \int_{\mathscr{V}} \varphi(x)\,C(x)\,\Delta\psi(x)\,dx + \\ + \int_{\mathscr{W}} \varphi(x)\,D(x)\,\Delta\psi(x)\,dx + \int_{\mathscr{S}} \varphi(x)\,A(x)\,\langle n_x \cdot \nabla\psi(x)\rangle\,dS(x),$$

où n_x désigne la normale unitaire à $\mathscr{S}$, dirigée de $\mathscr{V}$ vers $\mathscr{W}$, $\langle\cdot\rangle$ est le produit scalaire usuel dans $\boldsymbol{R}^d$ et dS est la mesure surfacique sur $\mathscr{S}$.

Cet article s'inspire, à son début, de travaux de Portenko [16, 17] qui étudie des équations aux dérivées partielles de type parabolique dont les coefficients de diffusion sont globalement réguliers et comportent un drift généralisé porté par une surface. Il s'inspire aussi de travaux effectués par Gaveau et Okada [7], étudiant, en dimension 1, des équations dont le coefficient de diffusion est régulier par morceaux avec des drifts généralisés portés par des points de discontinuité du coefficient de diffusion.

Mais, le problème abordé ici, en dimension finie quelconque est plus difficile car, contrairement aux problèmes de réflexion de processus sans discontinuité des coefficients, on ne peut jamais se ramener directement à la dimension 1.

En effet, même dans le cas simple où la surface de discontinuité est un hyperplan et où les coefficients sont tous constants, il n'y a pas factorisation des probabilités de transition. Ceci est dû au fait que les probabilités de transition "pour les composantes parallèles à l'hyperplan" dépendent du coefficient de diffusion, lui-même fonction de la composante normale à l'hyperplan.

Dans ce travail, nous avons considéré le cas relativement simple, mais important par ses applications, où la matrice de diffusion est diagonale. Dans ce cas particulier, un changement de coefficient de diffusion peut se traduire directement par un changement d'échelle des temps, ce qui nous conduit à une définition assez naturelle du "mouvement brownien asymétrique modifié" correspondant à un coefficient de diffusion régulier par morceaux.

TABLE DES DÉFINITIONS ET PROPOSITIONS

1. Proposition. Construction des probabilités de transition d'un mouvement brownien asymétrique dans R^d.

2. Proposition. Calcul du générateur infinitésimal généralisé d'un mouvement brownien asymétrique dans R^d.

3. Définition. Drift généralisé.

4. Définition. Bijection aléatoire de R_+, correspondant à un changement d'échelle des temps et destinée à modifier le générateur infinitésimal d'un processus.

6. Définition. Mouvement brownien asymétrique modifié.

7 et **8.** Proposition et Corollaire. Différentielle stochastique du mouvement brownien asymétrique modifié.

9. Proposition. Une propriété de la fonction

$$R^\alpha(x, s, z, t) = P^\alpha(x, s, z, t)\mathbf{1}_{\mathscr{V}}(z) + Q^\alpha(x, s, z, t)\mathbf{1}_{\mathscr{W}}(z).$$

10. Théorème. Etude d'un potentiel par rapport à R^α.

11. Proposition. Construction, au moyen d'une série, du noyau ψ intervenant dans l'expression donnant les densités des probabilités de transition d'un mouvement brownien asymétrique modifié.

12. Lemme. Un résultat de régularité assurant la convergence de la série de somme ψ.

13. Proposition. Etude des densités des probabilités de transition des mouvements browniens asymétriques modifiés (relation de Kolmogoroff).

14. Proposition. Continuité, à la surface de discontinuité des coefficients $\mathscr{S}$, des densités des probabilités de transition.

15. Lemme. Etude du gradient des densités des probabilités de transition dans deux cas particuliers.

16. Lemme. Discontinuité, à la surface $\mathscr{S}$, du gradient des densités des probabilités de transition d'un mouvement brownien asymétrique.

17 et **18.** Proposition et Corollaire. Expression du gradient des densités des probabilités de transition d'un mouvement brownien asymétrique modifié.

19. Proposition. Etude du recollement du gradient des densités des probabilités de transition, d'un mouvement brownien asymétrique modifié.

20. Théorème. Etude, dans le cas où $\mathscr{S}$ est un hyperplan, et où α, C et D sont des constantes de la continuité du recollement de la composante normale du gradient ou du "courant", produit de $(C\mathbf{1}_{\mathscr{V}}+D\mathbf{1}_{\mathscr{W}})$ par la composante normale du gradient suivant les valeurs de α.

21. Théorème. Calcul du générateur infinitésimal généralisé d'un mouvement brownien asymétrique modifié dans $\boldsymbol{R}^d$.

22. Théorème. Unicité trajectorielle et unicité en loi de $X^{\alpha,\beta}$ dans un cas particulier.

23. Remarque. Sur la construction du mouvement brownien asymétrique modifié dans le cas particulier où C et D sont des constantes.

24. Proposition. Sous les hypothèses du théorème 20, étude des mouvements browniens asymétriques modifiés correspondant aux générateurs infinitésimaux

(a) sans drift: $L = [C\mathbf{1}_{\mathscr{V}}+D\mathbf{1}_{\mathscr{W}}]\,\Delta$,
(b) auto-adjoint: $L = \nabla\,[(C\mathbf{1}_{\mathscr{V}}+D\mathbf{1}_{\mathscr{W}})\,\nabla]$,

et étude des propriétés de recollement des densités des probabilités de transition, de leurs gradients et de leurs laplaciens, dans les deux cas précédents.

I. MOUVEMENTS BROWNIENS ASYMÉTRIQUES

Dans ce premier paragraphe, nous supposons que $C = D$, c'est-à-dire que le recollement au voisinage de $\mathscr{S}$ est de classe $\mathscr{C}^2$.

Notant $B(t)$ le mouvement brownien standard, nous désignons par $X(t)$ le processus stochastique de différentielle stochastique

$$dX(t) = \sqrt{2C\,[X(t)]}\,dB(t).$$

Nous notons $X^\alpha(t)$ le processus sur $\mathscr{E}$ qui "se réfléchit sur $\mathscr{S}$ avec une probabilité $\alpha(y)$ du côté de $\mathscr{W}$ et une probabilité $(1-\alpha(y))$ du côté de $\mathscr{V}$, où α est une fonction continue sur $\mathscr{S}$".

La définition de la différentielle stochastique de X^α fait intervenir la notion de temps local en $\mathscr{S}$.

Le temps local d'une semi-martingale continue Y en $\mathscr{S}$ est défini par

$$L_t^{\mathscr{S}}(Y) = \lim_{\varepsilon\to 0}(2\varepsilon)^{-1}\int_0^t \mathbf{1}_{B(\mathscr{S},\varepsilon)}[Y(s)]\,d\langle Y, Y\rangle_s, \tag{3}$$

où $B(\mathscr{S}, \varepsilon)$ désigne la "boule" de centre $\mathscr{S}$ et rayon ε:

$$B(\mathscr{S}, \varepsilon) = \{y\in\boldsymbol{R}^d\colon \operatorname{dist}(y, \mathscr{S}) < \varepsilon\}.$$

La différentielle stochastique de $X^\alpha(t)$ s'écrit alors

$$(4)\qquad \begin{aligned} dX^\alpha(t) &= dX(t)+(2\alpha-1)\,dL_t^{\mathscr{S}}(X^\alpha),\\ dX^\alpha(t) &= \sqrt{2C[X^\alpha(t)]}\,dB(t)+(2\alpha-1)\,dL_t^{\mathscr{S}}(X^\alpha),\end{aligned}$$

avec

$$L_t^{\mathscr{S}}(X^\alpha) = \lim_{\varepsilon\to 0}(2\varepsilon)^{-1}\int_0^t \mathbf{1}_{B(\mathscr{S},\varepsilon)}[X^\alpha(s)]\,2C[X^\alpha(s)]\,ds.$$

Nous allons maintenant donner la construction des probabilités de transition des processus $X(t)$ et $X^\alpha(t)$.

Nous rappelons tout d'abord très brièvement la construction des densités des probabilités de transition X, inspirée de [6], car cette construction est ensuite reprise pour le processus $X^\alpha(t)$, après quelques modifications. Pour tout couple $(x, y)\in\mathscr{E}^2$ et $(s, t)\in \boldsymbol{R}_+^2$ vérifiant $s\leqslant t$, on pose

$$(5)\qquad Z(x, s, y, t) = [4\pi C(y)(t-s)]^{-d/2}\exp\left[-\frac{\|x-y\|^2}{4C(y)(t-s)}\right]$$

et, pour tout $x\in\mathscr{E}$ et tout $z\in\mathscr{E}$, on définit un noyau $\Phi(x, s, z, t)$ par

$$(6)\qquad \Phi(x, s, z, t) = \left(L_X-\frac{\partial}{\partial t}\right)Z(x, s, z, t)+$$

$$+\int_s^t\int_{\mathscr{E}}\left(L_x-\frac{\partial}{\partial t}\right)Z(x, \sigma, y, t)\,\Phi(y, s, z, \sigma)\,dy\,d\sigma,$$

où $L_x Z(x, s, z, t) = C(x)\Delta_x Z(x, s, z, t)$.

Pour tout couple $(x, y)\in\mathscr{E}^2$ et $s<t$, les probabilités de transition de $X(t)$ sont données par

$$(7)\qquad p(x, s, y, t) = p_{t-s}(x, y)$$

$$= Z(x, s, y, t)+\int_s^t\int_{\mathscr{E}} Z(x, \sigma, z, t)\,\Phi(z, s, y, \sigma)\,dz\,d\sigma.$$

Nous rappelons maintenant la construction des probabilités de transition de X^α [16, 17]. Pour $x\in\mathscr{S}$, $z\in\mathscr{E}$, $t\geqslant 0$, nous considérons le noyau $K(t, x, z)$ solution de l'équation aux dérivées partielles,

$$(8)\qquad (2C(x))^{-1}K(t, x, z)$$

$$= \frac{\partial}{\partial n_x}p_t(x, z)+\int_0^t d\sigma\int_{\mathscr{S}}\frac{\partial p_{t-\sigma}}{\partial n_x}(x, y)\,K(\sigma, y, z)\,q(y)\,dS(y),$$

où S est la mesure superficielle sur $\mathscr{S}$ et $q(y) = 2\alpha(y)-1$. Pour tout couple

$(x, y) \in \mathscr{E}^2$ et $s < t$ on pose:

(9) $$P^\alpha(x, s, y, t) = P^\alpha_{t-s}(x, y)$$

$$= p(x, s, y, t) + \int_s^t d\tau \int_{\mathscr{S}} p(x, \tau, z, t) K(\tau - s, z, y) q(z) dS(z)$$

$$= Z(x, s, y, t) + \int_s^t \int_{\mathscr{E}} Z(x, \sigma, z, t) \Phi(z, s, y, \sigma) dz\, d\sigma +$$

$$+ \int_{\tau \in [s,t]} \int_{u \in \mathscr{S}} K(\tau - s, u, y) [Z(x, \tau, u, t) +$$

$$+ \int_{\sigma \in [\tau, t]} \int_{z \in \mathscr{E}} Z(x, \sigma, z, t) \Phi(z, s, u, \sigma) dz\, d\sigma] dS(u) d\tau.$$

Exemple de référence. Si $\mathscr{S}$ est un hyperplan, $\mathscr{S} = \{y \in \boldsymbol{R}^d \colon \langle y \cdot n \rangle = 0\}$, on voit que

$$K(t, x, z) = 2C(x) \frac{\partial}{\partial n} p_t(x, z) = \frac{\langle n \cdot (z - x) \rangle}{2t} p_t(x, z).$$

En effet, cette formulation de K vérifie bien l'équation (11) car, si x appartient à $\mathscr{S}$, pour tout y de $\mathscr{S}$ on a

$$\frac{\partial p_{t-s}}{\partial n}(x, y) = \frac{\langle n \cdot (y - x) \rangle}{2C(x) t} p_{t-s}(x, y) = 0,$$

à cause de l'orthogonalité de n et de $y - x$. Il en résulte que

$$P^\alpha_t(x, y) = p_t(x, y) + \int_0^t d\tau \int_{\mathscr{S}} 2C(z) p_{t-\tau}(x, y) \frac{\partial}{\partial n} p_\tau(z, y) q(z) dS(z)$$

$$= p_t(x, y) + \int_0^t d\tau \int_{\mathscr{S}} p_{t-\tau}(x, z) \frac{\langle n \cdot (z - y) \rangle}{2\tau} p_\tau(z, y) q(z) dS(z).$$

Si $\mathscr{S}$ est un hyperplan, $\mathscr{S} = \{y \in \boldsymbol{R}^d \colon \langle y \cdot n \rangle = 0\}$, et si C et α sont des constantes, alors P^α_t est donné par

$$P^\alpha_t(x, y) = \frac{1}{(4\pi C t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{\|x - y\|^2}{4Ct}\right) +$$

$$+ q \int_0^t 2C\, d\tau \int_{z \in \mathscr{S}} \frac{1}{[4\pi C(t - \tau)]^{d/2}} \exp\left(-\frac{\|\tilde{x} - z\|^2}{4C(t - \tau)}\right) \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{\langle x \cdot n \rangle^2}{4C(t - \tau)}\right) \frac{\langle y \cdot n \rangle}{4C\tau\, [4\pi C\tau]^{d/2}} \exp\left(-\frac{\|\tilde{y} - z\|^2}{4C\tau}\right) \exp\left(-\frac{\langle y \cdot n \rangle^2}{4C\tau}\right) dS(z)$$

ou encore

$$P_t^\alpha(x, y) = \frac{1}{(4\pi Ct)^{d/2}} \exp\left[-\frac{\|x-y\|^2}{4Ct}\right] + \frac{q}{(4\pi Ct)^{(d-1)/2}} \exp\left[-\frac{\|\tilde{x}-\tilde{y}\|^2}{4Ct}\right] \times$$

$$\times \int_0^t 2Cd\tau \frac{1}{(4\pi C(t-\tau))^{1/2}} \exp\left[-\frac{\langle x\cdot n\rangle^2}{4C(t-\tau)}\right] \frac{\langle y\cdot n\rangle}{4C\tau(4\pi C\tau)^{1/2}} \exp\left[-\frac{\langle y\cdot n\rangle^2}{4C\tau}\right],$$

où $\tilde{x}$ [resp. $\tilde{y}$] désigne la projection de x [resp. y] sur $\mathscr{S}$. Ceci nous conduit à la

1. Proposition. *Si $\mathscr{S}$ est l'hyperplan, $\mathscr{S} = \{y \in R^d\colon \langle y\cdot n\rangle = 0\}$, $\mathscr{V} = \{\langle y\cdot n\rangle < 0\}$, $\mathscr{W} = \{\langle y\cdot n\rangle > 0\}$, où n est un vecteur fixe de R^d et si C et α sont des constantes, alors P_t^α est donné par*

$$(10)\qquad P_t^\alpha(x, y) = \frac{1}{(4\pi Ct)^{d/2}}\left[\exp\left(-\frac{\|x-y\|^2}{4Ct}\right) + \right.$$

$$\left. + \operatorname{sg}(y)(2\alpha-1)\exp\left(-\frac{(\|x-\tilde{x}\|+\|y-\tilde{y}\|)^2+\|\tilde{x}-\tilde{y}\|^2}{4Ct}\right)\right],$$

où $\tilde{x}$ [resp. $\tilde{y}$] désigne le projeté orthogonal de x [resp. y] sur $\mathscr{S}$ et où $\operatorname{sg} y = +1$ *si $y \in \mathscr{W}$, -1 si $y \in \mathscr{V}$.*

Démonstration. Posant

$$\tilde{p}_t(x, y) = \frac{1}{(4\pi Ct)^{(d-1)/2}} \exp\left(-\frac{\|\tilde{x}-\tilde{y}\|^2}{4Ct}\right),$$

nous avons, en utilisant la formule (12),

$$P_t^\alpha(x, y) = \tilde{p}_t(x, y)\left[\frac{1}{(4\pi Ct)^{1/2}} \exp\left(-\frac{|\langle x\cdot n\rangle - \langle y\cdot n\rangle|^2}{4Ct}\right) + \right.$$

$$\left. +(2\alpha-1)\int_0^t \frac{\langle y\cdot n\rangle}{8\pi C^2(t-\tau)^{1/2}\tau^{3/2}} \exp\left(-\frac{\langle x\cdot n\rangle^2}{4C(t-\tau)}\right) \exp\left(-\frac{\langle y\cdot n\rangle^2}{4C\tau}\right) 2C\,d\tau\right].$$

Il nous suffit donc d'établir que

$$(11)\qquad \frac{\operatorname{sg}(y)}{(4\pi Ct)^{1/2}} \exp\left(-\frac{(|\langle x\cdot n\rangle| + |\langle y\cdot n\rangle|)^2}{4Ct}\right)$$

$$= \int_0^t \frac{2C\langle y\cdot n\rangle}{8\pi C^2(t-\tau)^{1/2}\tau^{3/2}} \exp\left(-\frac{\langle x\cdot n\rangle^2}{4C(t-\tau)}\right) \exp\left(-\frac{\langle y\cdot n\rangle^2}{4C\tau}\right) d\tau$$

ou encore, en posant $a = |\langle x\cdot n\rangle| \geqslant 0$ et $b = |\langle y\cdot n\rangle| \geqslant 0$, $ct = u$, $c\tau = v$,

$$(12)\qquad \frac{1}{(4\pi u)^{1/2}}\exp\left(-\frac{(a+b)^2}{4u}\right)$$
$$=\int_0^u \frac{2b}{8\pi(u-v)^{1/2}v^{3/2}}\exp\left(-\frac{a^2}{4(u-v)}\right)\exp\left(-\frac{b^2}{4v}\right)dv.$$

Nous notons:

$$F(u)=\frac{1}{2(\pi u)^{1/2}}\exp\left(-\frac{(a+b)^2}{4u}\right),$$

$$G(u)=\int_0^u \frac{2b}{8\pi(u-v)^{1/2}v^{3/2}}\exp\left(-\frac{a^2}{4(u-v)}\right)\exp\left(-\frac{b^2}{4v}\right)dv.$$

Pour tout réel $\alpha>0$ et tout réel $a\in \boldsymbol{R}_+^*$, nous définissons la fonction

$$\varphi_a^\alpha(t)=\begin{cases} t^{-\alpha}\exp(-a^2/4t) & \text{si } t>0,\\ 0 & \text{si } t\leqslant 0.\end{cases}$$

Nous voyons alors que G est la convolée:

$$G(u)=\frac{2b}{8\pi}\varphi_a^{1/2}*\varphi_b^{3/2}(u).$$

Comme $\operatorname{supp}\varphi_a^{1/2}$ et $\operatorname{supp}\varphi_b^{3/2}$ sont contenus dans $\boldsymbol{R}_+$, la transformée de Laplace de $4\pi G/b$ est le produit des transformées de Laplace:

$$\mathscr{L}G(s)=\frac{b}{4\pi}(\mathscr{L}\varphi_a^{1/2})(s)(\mathscr{L}\varphi_b^{3/2})(s).$$

Or,

$$\mathscr{L}\varphi_a^{1/2}(s)=\sqrt{\pi}\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}},\qquad \mathscr{L}\varphi_b^{3/2}(s)=\frac{2\sqrt{\pi}}{b}e^{-b\sqrt{s}}.$$

Il s'ensuit que

$$\mathscr{L}G(s)=\frac{b}{4\pi}\frac{2\pi}{b\sqrt{s}}e^{-(a+b)\sqrt{s}}=\frac{1}{2\sqrt{s}}e^{-(a+b)\sqrt{s}}=\mathscr{L}F(s).$$

Les fonctions F et G coïncident donc, ce qui démontre la proposition.

2. Proposition. *Le générateur infinitésimal généralisé de P_t^α ou de $X^\alpha(t)$ est*

$$(13)\qquad L^\alpha=C\Delta+\delta_{\mathscr{V},\mathscr{W}}(2\alpha-1)2C\nabla,$$

où $\delta_{\mathscr{V},\mathscr{W}}$ est la "mesure de Dirac" en $\mathscr{S}$ définie ci-dessous et où ∇ est le gradient usuel.

3. DÉFINITION. Nous appelons *mesure de Dirac* en $\mathcal{S}$ et notons $\delta_{\mathcal{V},\mathcal{W}}$ la distribution-mesure, à valeurs dans $\boldsymbol{R}^d$, dérivée, au sens des distributions sur $\boldsymbol{R}^d$, de la fonction $h_{\mathcal{V},\mathcal{W}}$ définie par:

$$h_{\mathcal{V},\mathcal{W}} = \mathbf{1}_{\mathcal{W}} \text{ (fonction caractéristique de } \mathcal{W}).$$

Nous avons, pour tout champ de vecteurs V, de classe $\mathscr{C}^1$, à support compact,

$$-\int_{\mathcal{S}} V(z)\,\delta_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(dz) = -\int_{\mathcal{W}} \operatorname{div} V(z)\,dz.$$

L'énoncé de la proposition 6 signifie alors que, pour tout couple de fonctions f et g, à supports compacts dans $\mathscr{E}$ et de classe $\mathscr{C}^\infty$, nous avons

$$\lim_{t\to 0} t^{-1} \iint_{\mathscr{E}^2} [P_t^\alpha(x, y) f(y)\,dy - f(x)]\, g(x)\,dx$$
$$= \int_{\mathscr{E}} C(x)\Delta f(x) g(x)\,dx + \int_{\mathcal{S}} g(x)[2\alpha(x)-1]\, 2C(x)\nabla f(x)\,\delta_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(dx).$$

Démonstration de la proposition 2. Nous calculons (si elle existe)

$$\Lambda = \lim_{t\to 0} t^{-1} \int_{\mathscr{E}} \Big[\int_{\mathscr{E}} P_t^\alpha(x, y) f(y)\,dy - f(x)\Big]\, g(x)\,dx,$$

où f et g sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ à support compact dans $\mathscr{E}$.

Comme f et g sont bornées ainsi que les dérivées de f,

$$\Lambda = \lim_{t\to 0} t^{-1} \int_{\mathscr{E}}\int_{\mathscr{E}} P_t^\alpha(x, y)[f(y)-f(x)]\,dy\, g(x)\,dx.$$

Or, utilisant la formule de Taylor,

$$f(y)-f(x) = \nabla f(x)(y-x) + \frac{1}{2}\nabla^2 f(x)[(y-x), (y-x)] + O(\|y-x\|^3).$$

Par suite

$$\Lambda = \lim_{t\to 0} t^{-1} \int_{\mathscr{E}} \Big[\nabla f(x) \int_{\mathscr{E}} P_t^\alpha(x, y)(y-x)\,dy\Big]\, g(x)\,dx +$$
$$+ (2t)^{-1} \int_{\mathscr{E}} \Big[\nabla^2 f(x) \int_{\mathscr{E}} P_t^\alpha(x, y)[(y-x), (y-x)]\,dx\Big]\, g(x)\,dx.$$

On utilise les formules dues à Portenko [16, 17],

$$(*)\quad \begin{aligned} &\lim_{t\searrow 0} \int_{\boldsymbol{R}^d} \varphi(x)\left[\frac{1}{t}\int_{\boldsymbol{R}^d} \langle y-x, \theta\rangle P_t^\alpha(x, y)\,dy\right] dx = \int_{\mathcal{S}} \varphi(x)\langle N(x), \theta\rangle q(x)\,dS(x),\\ &\lim_{t\searrow 0} \int_{\boldsymbol{R}^d} \varphi(x)\left[\frac{1}{2}\int_{\boldsymbol{R}^d} \langle y-x, \theta\rangle^2 P_t^\alpha(x, y)\,dy\right] dx = \int_{\boldsymbol{R}^d} \varphi(x)\langle 2C(x)\theta, \theta\rangle\,dx, \end{aligned}$$

où θ désigne un vecteur de $\boldsymbol{R}^d$, $q(x) = 2\alpha(x)-1$, $N(x) = 2C(x)n(x)$, $n(x)$ étant la normale unitaire à $\mathcal{S}$ en x dirigée vers W, φ est continu à support compact.

On utilise la première ligne de $(*)$ pour étudier la limite relative au gradient de f en posant $\varphi(x) = \partial f/\partial x_i$ et $\theta = e_i$, puis on considère la seconde ligne de $(*)$ pour calculer la limite relative à la dérivée seconde de f. Pour les dérivées de la forme $\partial^2 f/\partial x_i^2$ on identifie: $\varphi(x) = \partial^2 f/\partial x_i^2$ et $\theta = e_i$; alors que pour les dérivées de la forme $\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j$ $(i \neq j)$, on pose $\varphi(x) = \partial^2 f/\partial x_i \partial x_j$ et, successivement, $\theta = e_i + e_j$, e_i et e_j en remarquant que $2(y_i - x_i)(y_j - x_j) = (y_i - x_i + y_j - x_j)^2 - (y_i - x_i)^2 - (y_j - x_j)^2$. Ce qui démontre la proposition.

II. LES MOUVEMENTS BROWNIENS ASYMÉTRIQUES MODIFIÉS

Nous considérons le domaine $\mathscr{E} = \mathbf{R}^d$ $(d \in \mathbf{N}_*)$ et nous supposons que $\mathscr{E}$ peut s'écrire $\mathscr{E} = \mathscr{V} \cup \mathscr{W} \cup \mathscr{S}$, où $\mathscr{V}$ et $\mathscr{W}$ sont deux sous-domaines de $\mathscr{E}$ et où $\mathscr{S}$ est une variété de classe $\mathscr{C}^2$ et de dimension $d-1$.

Nous considérons deux fonctions $C(x)$ et $D(x)$, définies sur $\mathscr{E}$, de classe $\mathscr{C}^2$, à différentielles premières et secondes bornées, et nous leur associons les opérateurs différentiels (généralisés) $L_0 = [C\mathbf{1}_{\mathscr{V}} + D\mathbf{1}_{\mathscr{W}}]\Delta$ (sans drift) ou $L_{\mathrm{Ad}} = \nabla[(C\mathbf{1}_{\mathscr{V}} + D\mathbf{1}_{\mathscr{W}})\nabla]$ (auto-adjoint), ou bien, plus généralement,

$$L = [C\mathbf{1}_{\mathscr{V}} + D\mathbf{1}_{\mathscr{W}}]\Delta + \delta_{\mathscr{S}} A\nabla. \tag{14}$$

Ces opérateurs différentiels sont dits *généralisés* au sens que, si φ est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathscr{E}$ à support compact et si ψ est une fonction continue sur $\mathscr{E}$, de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathscr{V} \cup \mathscr{W}$, la distribution $L\psi$ vérifie

$$\int_{\mathscr{E}} \varphi(x) L_0 \psi(x)\, dx = \int_{\mathscr{V}} C(x)\varphi(x)\Delta\psi(x)\, dx + \int_{\mathscr{W}} D(x)\varphi(x)\Delta\psi(x)\, dx$$

ou

$$\int_{\mathscr{E}} \varphi(x) L_{\mathrm{Ad}} \psi(x)\, dx = \int_{\mathscr{V}} C(x)\varphi(x)\Delta\psi(x)\, dx +$$

$$+ \int_{\mathscr{W}} D(x)\varphi(x)\Delta\psi(x)\, dx + \int_{\mathscr{S}} [D(x) - C(x)]\,\varphi(x)\frac{\partial\psi}{\partial n}(x)\, dS(x),$$

ou bien

$$\int_{\mathscr{E}} \varphi(x) L\psi(x)\, dx = \int_{\mathscr{V}} C(x)\varphi(x)\Delta\psi(x)\, dx +$$

$$+ \int_{\mathscr{W}} D(x)\varphi(x)\Delta\psi(x)\, dx + \int_{\mathscr{S}} \varphi(x) A(x)\frac{\partial\psi}{\partial n}(x)\, dS(x),$$

n étant la normale unitaire à $\mathscr{S}$ dirigée de $\mathscr{V}$ vers $\mathscr{W}$ et $dS(x)$ étant la mesure surfacique sur la surface $\mathscr{S}$.

Le processus X^α, correspondant à un coefficient de diffusion $C(x) > 0$ et à une réflexion sur $\mathscr{S}$ avec une probabilité $\alpha(y)$ du côté de $\mathscr{W}$ et $1-\alpha(y)$ du côté de $\mathscr{V}$ étant construit, nous allons maintenant définir un processus $X^{\alpha,\beta}$ correspondant au coefficient de diffusion $C(x) > 0$ sur $\mathscr{V}$ et $D(x) > 0$ sur $\mathscr{W}$, où C et D sont des fonctions bornées ainsi que leurs inverses $1/C(x)$ et $1/D(x)$, de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\boldsymbol{R}^d$, de différentielles premières et secondes bornées.

4. Définition. (a) Nous notons β la fonction strictement positive, définie sur $\mathscr{E}$ par

$$\beta^2(x) = \left[\mathbf{1}_{\mathscr{V}} + \frac{D(x)}{C(x)}\mathbf{1}_{\mathscr{W}}\right](x).$$

(b) Pour toute trajectoire X^α_ω, continue, on définit une bijection croissante $\chi_\beta = \chi_\beta(\omega)$, de $\boldsymbol{R}_+$ sur lui-même par

$$\chi_\beta(t) = \int_0^t \beta^2\left[X^\alpha(\chi_\beta(u))\right] du.$$

5. Remarque. Pour $\boldsymbol{P}$-presque chaque trajectoire ω, la fonction χ_β est lipschitzienne; elle est dérivable en Lebesgue presque tout t et sa dérivée est donnée par $\chi'_\beta(t) = \beta^2\left[X^\alpha(\chi_\beta(t))\right]$.

6. Définition. Nous appelons *mouvement brownien asymétrique modifié* le processus stochastique

$$X^{\alpha\beta}(t) = X^\alpha[\chi_\beta(t)]. \tag{15}$$

7. Proposition. *Le mouvement brownien asymétrique β-modifié $X^{\alpha\beta}(t)$ admet pour différentielle stochastique*:

(a) *si* $X^{\alpha\beta}(t) \notin \mathscr{S}$,

$$dX^{\alpha\beta}(t) = 2^{1/2}\left[C^{1/2}\mathbf{1}_{\mathscr{V}} + D^{1/2}\mathbf{1}_{\mathscr{W}}\right]\left[X^{\alpha\beta}(t)\right] dB(t);$$

(b) *si* $X^{\alpha\beta}(t) = x \in \mathscr{S}$,

$$dX^{\alpha\beta}(t) = \begin{cases} 2^{1/2} D^{1/2}(x)\left[d\left(|B(t)\,n_x|\right)n_x + dY(t)\right] & \textit{avec une probabilité } \alpha(x), \\ 2^{1/2} C^{1/2}(x)\left[-d\left(|B(t)\,n_x|\right)n_x + dY(t)\right] & \textit{avec une probabilité } 1-\alpha(x), \end{cases}$$

où Y est la composante de $X(t)$ orthogonale à n_x.

Démonstration. En effet, si nous considérons le processus $W(t)$ défini pour $t \notin (X^{\alpha\beta})^{-1}(\mathscr{S})$ par

$$dW(t) = \frac{dX^{\alpha\beta}(t)}{2^{1/2}C^{1/2}\left[X^{\alpha\beta}(t)\right]\beta\left[X^{\alpha\beta}(t)\right]}$$

et, pour $t \in (X^{\alpha\beta})^{-1}(\mathscr{S})$, posant $X^{\alpha\beta}(t) = y$, et $\varepsilon = \pm 1$, par

$$dW(t) = \varepsilon \frac{\mathbf{1}_{\{dX^{\alpha\beta}(t)\cdot n_y < 0\}}}{2^{1/2}D^{1/2}\left[X^{\alpha\beta}(t)\right]} dX^{\alpha\beta}(t) \text{ avec une probabilité } \frac{1}{2\alpha(y)}$$

et

$$dW(t) = \varepsilon \frac{\mathbf{1}_{\{dX^{\alpha\beta}(t)\cdot n_y < 0\}}}{2^{1/2} C^{1/2} [X^{\alpha\beta}(t)]} dX^{\alpha\beta}(t) \text{ avec une probabilité } \frac{1}{2(1-\alpha(y))},$$

le calcul montre alors que, pour tout $u > 0$ et $h > 0$,

$$\mathbf{E}\left[(W(u+h) - W(u))/\mathscr{F}_u\right] = 0$$

et

$$\mathbf{E}\left[(W(u+h) - W(u))^2/\mathscr{F}_u\right] = \mathbf{E}\left[\left(\int_u^{u+h} \frac{dX^{\alpha\beta}(t)}{2^{1/2} C^{1/2} [X^{\alpha\beta}(t)]\, \beta[X^{\alpha\beta}(t)]}\right)^2 /\mathscr{F}_u\right]$$

$$= \mathbf{E}\left[\int_u^{u+h} \left(\frac{\dfrac{dX^{\alpha}}{d\chi_\beta(t)}(\chi_\beta(t))}{2^{1/2} C^{1/2} [X^{\alpha\beta}(t)]\, \beta[X^{\alpha\beta}(t)]}\right)^2 d[\chi_\beta(t)]/\mathscr{F}_u\right]$$

$$= \mathbf{E}\left[\int_u^{u+h} \left(\frac{2^{1/2} C^{1/2} [X^{\alpha\beta}(t)]}{2^{1/2} C^{1/2} [X^{\alpha\beta}(t)]\, \beta[X^{\alpha\beta}(t)]}\right)^2 \beta^2 [X^{\alpha\beta}(t)]\, dt/\mathscr{F}_u\right]$$

$$= \mathbf{E}\left[h/\mathscr{F}_u\right] = h.$$

$W(t)$ est donc bien un processus de Wiener que nous pouvons identifier à $B(t)$.

8. Corollaire. *La différentielle stochastique de $X^{\alpha\beta}$ s'exprime, au moyen du mouvement brownien standard par:*

si $X^{\alpha\beta}(t) \notin \mathscr{S}$,

$$dX^{\alpha\beta}(t) = (2C\,\mathbf{1}_{\mathscr{V}} + 2D\,\mathbf{1}_{\mathscr{W}})^{1/2} [X^{\alpha\beta}(t)]\, dB(t)$$

et, si $X^{\alpha\beta}(t) \in \mathscr{S}$, décomposant le mouvement brownien B en $B = B_1 + B_2$, où B_1 est le brownien linéaire le long de $n_{X^{\alpha\beta}(t)}$ et B_2 le brownien dans l'hyperplan tangent à $\mathscr{S}$ au point $X^{\alpha\beta}(t)$,

$$dX^{\alpha\beta}(t) = \left(2D[X^{\alpha\beta}(t)]\right)^{1/2} \left(d|B_1(t)| + dB_2(t)\right) \text{ avec une probabilité } \alpha[X^{\alpha\beta}(t)]$$

et

$$\left(2C[X^{\alpha\beta}(t)]\right)^{1/2} \left(d(-|B_1(t)|) + dB_2(t)\right) \text{ avec une probabilité } 1 - \alpha[X^{\alpha\beta}(t)].$$

On peut aussi définir la différentielle stochastique de $X^{\alpha,\beta}$ en utilisant le temps local sur $\mathscr{S}$. Pour cela on définit le temps local à droite et à gauche de $\mathscr{S}$ pour une semi-martingale Y,

$$L_t^{\mathscr{S}+}(Y) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mathbf{1}_{B(\mathscr{S},\varepsilon)\cap\mathscr{W}}(Y(s))\, d\langle Yn, Yn\rangle_s$$

et

$$L_t^{\mathscr{S}-}(Y) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mathbf{1}_{B(\mathscr{S},\varepsilon)\cap\mathscr{V}}(Y(s))\, d\langle Yn, Yn\rangle_s$$

où $L_t^{\mathscr{S}+}(Y)$ désigne le temps local à droite et $L_t^{\mathscr{S}-}(Y)$ le temps local à gauche. On a alors

$$L_t^{\mathscr{S}}(Y) = \frac{1}{2}[L_t^{\mathscr{S}+}(Y) + L_t^{\mathscr{S}-}(Y)].$$

Nous aurons alors, en utilisant [7], avec $p = 1$ et $q = \sqrt{D/C}$,

$$dX^{\alpha,\beta}(t) = \left[\mathbf{1}_{\mathscr{V}}(X^{\alpha,\beta}(t)) + \sqrt{\frac{D}{C}}\mathbf{1}_{\mathscr{W}}(X^{\alpha,\beta}(t))\right] 2C^{1/2}(X^{\alpha,\beta}(t))\, dB(t) +$$

$$+ \frac{(\alpha-1) + \sqrt{\frac{D}{C}}\alpha}{(1-\alpha) + \sqrt{\frac{D}{C}}\alpha}\, dL_t^{\mathscr{S}}(X^{\alpha,\beta})$$

avec, dans le cas présent,

$$L_t^{\mathscr{S}+}(X^{\alpha,\beta}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^t \mathbf{1}_{B(\mathscr{S},\varepsilon)\cap\mathscr{W}}(X^{\alpha,\beta}(s))\, 2D\,[X^{\alpha,\beta}(s)]\, ds$$

et

$$L_t^{\mathscr{S}-}(X^{\alpha,\beta}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^t \mathbf{1}_{B(\mathscr{S},\varepsilon)\cap\mathscr{V}}(X^{\alpha,\beta}(s))\, 2C\,[X^{\alpha,\beta}(s)]\, ds.$$

Au paragraphe I, nous avons construit via la formule (12), les probabilités de transition P^α du processus X^α de générateur infinitésimal généralisé:

$$L^\alpha = C\Delta + \delta_{\mathscr{V},\mathscr{W}}(2\alpha - 1)\, 2C\nabla.$$

Nous allons maintenant donner les probabilités de transition du processus $X^{\alpha\beta}$. Nous notons Γ la classe de fonctions, définie sur $\mathscr{E} = \mathbf{R}^d$, par $\Gamma = C\mathbf{1}_{\mathscr{V}} + D\mathbf{1}_{\mathscr{W}}$.

De manière analogue à ce qui a été fait au paragraphe 1, on peut construire, via la formule (9) modifiée, les probabilités de transition Q_α du processus Y^α de générateur infinitésimal généralisé:

$$\Lambda^\alpha = D\Delta + \delta_{\mathscr{V},\mathscr{W}}(2\alpha - 1)\, 2D\nabla.$$

Pour tout couple $(x, z) \in (\mathscr{E}\setminus\mathscr{S})^2$ et tout couple de réels (s, t) vérifiant $s < t$, on définit un noyau $\psi(x, s, z, t)$ par

(16) $$\psi(x, s, z, t) = \left(L_x - \frac{\partial}{\partial t}\right)(P^\alpha \mathbf{1}_{\mathscr{V}}(z) + Q^\alpha \mathbf{1}_{\mathscr{W}}(z))(x, s, z, t) +$$

$$+ \int_s^t \int_{\mathscr{E}} \left(L_x - \frac{\partial}{\partial t}\right)(P^\alpha \mathbf{1}_{\mathscr{V}}(y) + Q^\alpha \mathbf{1}_{\mathscr{W}}(y))(x, \sigma, y, t)\psi(y, s, z, \sigma)\,dy\,d\sigma,$$

où $L_x R(x, s, z, t) = (C\mathbf{1}_{\mathscr{V}}(x) + D\mathbf{1}_{\mathscr{W}}(x))\Delta_x R(x, s, z, t)$. Notant que

$$R^\alpha(x, s, z, t) = P^\alpha(x, s, z, t)\mathbf{1}_{\mathscr{V}}(z) + Q^\alpha(x, s, z, t)\mathbf{1}_{\mathscr{W}}(z),$$

nous posons, pour tout couple $(x, y) \in (\mathscr{E} \setminus \mathscr{S})^2$ et tout $s < t$,

(17) $$P^{\alpha,C,D}(x, s, y, t) = P^{\alpha,C,D}_{t-s}(x, y)$$

$$= R^\alpha(x, s, y, t) + \int_s^t \int_{\mathscr{E}} R^\alpha(x, \sigma, z, t)\psi(z, s, y, \sigma)\,dz\,d\sigma.$$

9. Proposition. *Si f est une fonction continue et bornée sur $\mathscr{E} = \mathbf{R}^d$, alors*

$$\varphi(x, s, t) = \int_{\mathscr{E}} R^\alpha(x, s, y, t) f(y)\,dy$$

est une fonction continue en (x, s, t) sur $\mathscr{E} \times \{s < t\}$ et

$$\lim_{t-s \to 0} \varphi(x, s, t) = f(x), \qquad x \in \mathscr{E}.$$

La démonstration de cette proposition est immédiate.

10. Théorème. *Si f est une fonction continue et bornée sur $\mathscr{E} \times \mathbf{R}_+$, localement höldérienne en $x \in \mathscr{E}$ et uniformément en $t \in \mathbf{R}_+$, alors la fonction*

$$V(x, t) = \int_0^t \int_{\mathscr{E}} R^\alpha(x, s, y, t) f(y, s)\,dy\,ds$$

est de classe $\mathscr{C}^2$ en $x \in \mathscr{E}$, $\mathscr{C}^1$ en t, elle vérifie

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} V(x, t) = \int_0^t \int_{\mathscr{E}} \frac{\partial^2 R^\alpha}{\partial x_i \partial x_j}(x, s, y, t) f(y, s)\,dy\,ds$$

et, si $x \in \mathscr{E} \setminus \mathscr{S}$,

(18) $$\frac{\partial V}{\partial t}(x, t)$$

$$= \int_0^t \int_{\mathscr{E}} [C(x)\mathbf{1}_{\mathscr{V}}(y) + D(x)\mathbf{1}_{\mathscr{W}}(y)]\,\Delta_x R^\alpha(x, s, y, t) f(y, s)\,dy\,ds + f(x, t).$$

Nous allons maintenant étudier les propriétés du noyau ψ. Nous voyons que

$$\left(L_x - \frac{\partial}{\partial t}\right) R^\alpha(x, s, z, t) = [\Gamma(x) - C(x)\mathbf{1}_{\mathscr{V}}(z) - D(x)\mathbf{1}_{\mathscr{W}}(z)]\,\Delta_x R^\alpha(x, s, z, t).$$

On construit par récurrence, pour tout entier $\nu \geqslant 1$,

$$R_1(x, s, y, t) = \left(L_x - \frac{\partial}{\partial t}\right) R^\alpha(x, s, y, t),$$

(19) $\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$R_{\nu+1}(x, s, y, t) = \int_s^t \int_{\mathscr{E}} \left(L_x - \frac{\partial}{\partial t}\right) R^\alpha(x, \sigma, z, t)\, R_\nu(z, s, y, \sigma)\, dz\, d\sigma.$$

11. PROPOSITION. *Pour tout (x, s, y, t), tel que x et y n'appartienne pas à $\mathscr{S}$ et $s < t$, la série*

$$\psi(x, s, y, t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} R_\nu(x, s, y, t)$$

converge uniformément sur tout compact de $\mathscr{E}$ ne rencontrant pas $\mathscr{S}$.

Démonstration. Nous voyons que

$$\left(L_x - \frac{\partial}{\partial t}\right) R^\alpha(x, s, y, t)$$
$$= \{C(x)[\mathbf{1}_{\mathscr{V}}(x) - \mathbf{1}_{\mathscr{V}}(y)] + D(x)[\mathbf{1}_{\mathscr{W}}(x) - \mathbf{1}_{\mathscr{W}}(y)]\}\,\Delta R^\alpha(x, s, y, t).$$

Si x n'appartient pas à $\mathscr{S}$, il existe une boule, $B(x, \varrho)$, qui ne rencontre pas $\mathscr{S}$. Nous supposons, par exemple, que $B(x, \varrho)$ est contenue dans $\mathscr{V}$. Nous avons alors

$$\left(L_x - \frac{\partial}{\partial t}\right) R^\alpha(x, s, z, t) = 0 \qquad \text{pour tout } z \in B(x, \varrho).$$

Il en résulte que l'on a la majoration

$$|R_1(x, s, y, t)| = \left|\left(L_x - \frac{\partial}{\partial t}\right) R^\alpha(x, s, y; t)\right| \leqslant \frac{C^{te}\,\mathbf{1}_{CB(x,\varrho)}(y)}{(t-s)^\mu\,(\|x-y\|)^{d+1-2\mu}}, \quad \frac{1}{2} < \mu < 1.$$

On est donc ramené à une inégalité de même type que l'inégalité 4.3 de [6].

Nous utiliserons le lemme suivant analogue du lemme 2, § 4, chap. 1 de [6].

12. LEMME. *Si G est un ouvert borné de $\mathbf{R}^d$ et si $0 < \alpha$ et $0 < \beta < d$, alors*

$$\int_G \frac{\mathbf{1}_{\{z \notin B(x,\varrho_1)\} \cap \{z \notin B(y,\varrho_2)\}}\, dz}{\|x-z\|^\alpha\, \|y-z\|^\beta} \leqslant \begin{cases} \dfrac{C^{te}}{\varrho_1^\alpha\, \|x-y\|^{\beta-d}} + \dfrac{C^{te}}{\|x-y\|^{\alpha+\beta-d}}, & si\ \alpha+\beta > d, \\ C^{te}, & si\ \alpha+\beta < d. \end{cases}$$

Démonstration. Nous voulons majorer

$$\int_G \frac{\mathbf{1}_{\{\|z-x\|>\varrho_1\}\cap\{\|z-y\|>\varrho_2\}}\,dz}{\|z-x\|^\alpha\,\|z-y\|^\beta} = I_1+I_2+I_3,$$

où I_1 est l'intégrale sur $A_1 = G\cap\{\varrho_1 < \|z-x\|\}\cap\{\varrho_2 < \|z-y\|\}\cap\{\|z-y\| < \|x-y\|/2\}$, I_2 est l'intégrale sur $A_2 = G\cap\{\varrho_1 < \|z-x\|\}\cap\{\varrho_2 < \|z-y\|\}\cap\{\|z-x\| < \|x-y\|/2\}$, et I_3 est l'intégrale sur $A_3 = G\cap\{\|z-y\| \geqslant \|x-y\|/2\}\cap\{\|z-x\| > \|x-y\|/2\}$. Nous avons alors, si $\beta < d$:

$$I_1 \leqslant \int_{A_1} \frac{dz}{\varrho_1^\alpha\,\|z-y\|^\beta} \leqslant \int_{B(0,\|x-y\|/2)} \frac{dz}{\varrho_1^\alpha\,\|z\|^\beta} \leqslant C^{te}\int_0^{\|x-y\|/2} \frac{\varrho^{d-1}\,d\varrho}{\varrho_1^\alpha\,\varrho^\beta} = \frac{C^{te}}{\varrho_1^\alpha\,\|x-y\|^{\beta-d}}.$$

De même,

$$I_2 \leqslant \int_{G\cap\{\varrho_1<\|z-x\|<\|x-y\|/2\}\cap\{\|z-y\|<3\|x-y\|/2\}} \ldots dz.$$

Cette inégalité n'utilise que l'inégalité triangulaire, $\|z-y\| \leqslant \|z-x\| + \|x-y\| \leqslant \|x-y\|/2+\|x-y\|$.

Nous pouvons déduire, comme pour I_1, que

$$I_2 \leqslant \int_{B(0,3\|x-y\|/2)} \frac{dz}{\varrho_1^\alpha\,\|z\|^\beta} \leqslant \frac{C^{te}}{\varrho_1^\alpha\,\|x-y\|^{\beta-d}}.$$

Nous majorons enfin I_3. Notons que $\varrho = \inf(\|z-y\|, \|z-x\|)$. Alors, à une constante près, nous avons

$$I_3 \leqslant C^{te} \int_{\{\varrho>\|x-y\|/2\}}^{\infty} \frac{\varrho^{d-1}\,d\varrho}{\varrho^\alpha\,\varrho^\beta}.$$

Lorsque $\alpha+\beta > d$, cette intégrale converge et

$$I_3 \leqslant \frac{C^{te}}{\|x-y\|^{\alpha+\beta-d}}.$$

Si $\alpha+\beta < d$, l'assertion du lemme se déduit directement du lemme 2, § 4, ch. 1 de [6] qui fournit une majoration évidente.

Suite de la démonstration de la proposition 11. Nous avons ensuite la majoration

$$|R_2(x, s, y, t)| = \int_s^t \int_{z\notin B(x,\varrho(x))\cap B(x,\varrho(y))} R_1(x, \sigma, z, t)\,R_1(z, s, y, \sigma)\,dz\,d\sigma$$

— où $\varrho(z)$ est la distance de z à $\mathscr{S}$ —

$$\leqslant \int_s^t \frac{1}{(t-\sigma)^\mu} \frac{1}{(\sigma-s)^\mu} d\sigma \left(\frac{C^{te}}{\varrho^\alpha(x)\,\|x-y\|^{\alpha-d}} + \frac{1}{\|x-y\|^{2\alpha-d}} \right),$$

— où $\alpha(=\beta) = d+1-2\mu < d$, car $\frac{1}{2} < \mu < 1$ —

$$\leqslant \frac{C^{te}}{(t-s)^{2\mu-1}} \left(\frac{1}{\varrho^\alpha(x)\,\|x-y\|^{\alpha-d}} + \frac{1}{\|x-y\|^{2\alpha-d}} \right).$$

La récurrence conduit donc, comme au § 4, chap. 1 de [6], à une série convergente, la convergence ayant lieu uniformément sur tout compact ne rencontrant pas $\mathscr{S}$.

13. Proposition. *Les noyaux $P^{\alpha,C,D}_{t-s}(x, y)$ définis à la formule* (17) *par*

$$P^{\alpha,C,D}_{t-s}(x, y) = R^\alpha(x, s, y, t) + \int_s^t \int_{\mathscr{E}} R^\alpha(x, \sigma, z, t)\,\psi(z, s, y)\,dz\,d\sigma$$

vérifient, pour $x \in \mathscr{E} \setminus \mathscr{S}$, la relation de Kolmogorov:

$$\frac{\partial P^{\alpha,C,D}_{t-s}}{\partial t}(x, y) = L_x P^{\alpha,C,D}_{t-s}(x, y). \tag{20}$$

Démonstration. Nous notons $P^{\alpha,C,D} = P$.

La démonstration se déduit du théorème 10, en employant la formule (18).

Pour simplifier les notations, nous supposons $s = 0$:

$$\frac{\partial P_t(x, y)}{\partial t} = \frac{\partial R^\alpha}{\partial t} + \int_s^t \int_{\mathscr{E}} \frac{\partial R^\alpha}{\partial t}(x, \sigma, z, t)\,\psi(z, s, y, \sigma)\,dz\,d\sigma + \psi(x, s, y, t).$$

Comme ψ vérifie l'équation intégrale de Volterra (16)

$$\psi(x, s, y, t) = \left(L_x - \frac{\partial}{\partial t} \right) R^\alpha(x, s, y, t) +$$
$$+ \int_s^t \int_{\mathscr{E}} \left(L_x - \frac{\partial}{\partial t} \right) R^\alpha(x, \sigma, z, t)\,\psi(z, s, y, \sigma)\,dz\,d\sigma,$$

en reportant cette expression dans la relation qui définit $\partial P_t(x, y)/\partial t$, nous obtenons:

$$\frac{\partial P_t(x, y)}{\partial t} = L_x R^\alpha(x, s, y, t) + \int_s^t \int_{\mathscr{E}} L_x R^\alpha(x, \sigma, z, t)\,\psi(z, s, y, \sigma)\,dz\,d\sigma$$
$$= L_x P_t(x, y).$$

Nous allons maintenant étudier les propriétés de continuité, de part et d'autre de $\mathscr{S}$, des probabilités de transition $P_t^{\alpha,C,D}(x, y)$ ainsi que de leurs gradients.

14. Proposition. *L'application* $\left(x \rightsquigarrow P_{t-s}^{\alpha,C,D}(x, y)\right)$ *est continue sur* $\mathscr{E} \supset \mathscr{S}$.

Démonstration. Il est évident que

$$(x, s, t) \rightsquigarrow R^\alpha(x, s, z, t) = P^\alpha(x, s, z, t)\mathbf{1}_{\mathscr{V}}(z) + Q^\alpha\left((x, s, z, t)\mathbf{1}_{\mathscr{W}}(z)\right)$$

est, lorsque z est fixé, une fonction continue de (x, s, t). La proposition 9 permet alors de conclure que $\left((x, s, t) \rightsquigarrow P_{t-s}^{\alpha,C,D}(x, y)\right)$ est encore une fonction continue par rapport au triplet $(x, s, t) \in \mathscr{E} \times \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*$, $s < t$.

15. Lemme. *Si* $p_t(x, y)$ *est la densité de probabilité de transition, définie à la formule* (7) *et correspondant à un coefficient de diffusion* C,

(a) *constant sur* $\mathscr{E} = \mathbf{R}^d$,

(b) *de classe* $\mathscr{C}^2$ *sur* $\mathscr{E} = \mathbf{R}$,

alors l'application $\left(x \rightsquigarrow \nabla_x p_t(x, y)\right)$ *est continue et vérifie, respectivement,*

(a) $\nabla_x p_t(x, y) = 2\dfrac{(y-x)}{4Ct} p_t(x, y)$,

(b) $\dfrac{\partial p_t(x, y)}{\partial x} = \left[\dfrac{C'(x)}{4C(x)} + \dfrac{2\int_x^y \frac{dz}{C^{1/2}(z)}}{4C^{1/2}(x)\, t}\right] p_t(x, y)$.

Démonstration. (a) Si C est constant et si la dimension est $d \in \mathbf{N}$, il est immédiat que

$$\frac{\partial p_t(x, y)}{\partial x_i} = 2\frac{(y_i - x_i)}{4Ct} p_t(x, y).$$

Par suite, on a

$$\nabla_x p_t(x, y) = 2\frac{(y-x)}{4Ct} p_t(x, y).$$

(b) Si C est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ et si le domaine spatial est de dimension 1, on sait que

$$p_t(x, y) = \frac{1}{[4\pi C(y)t]^{1/2}}\left[\frac{C(x)}{C(y)}\right]^{1/4} \exp\left\{-\frac{1}{4t}\left(\int_x^y \frac{dz}{C^{1/2}(z)}\right)^2\right\}.$$

Par conséquent,

$$\frac{\partial p_t}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{[4\pi C(y)t]^{1/2}[C(y)]^{1/4}} \exp\left\{-\frac{1}{4t}\left(\int_x^y \frac{dz}{C^{1/2}(z)}\right)^2\right\} \times$$

$$\times\left[\frac{1}{4}\frac{C'(x)}{[C(x)]^{3/4}}+\frac{C^{1/4}(x)}{4t}2\left(\int_x^y\frac{dz}{C^{1/2}(z)}\right)\frac{1}{C^{1/2}(x)}\right]=\left[\frac{C'(x)}{4C(x)}+\frac{2\int_x^y\frac{dz}{C^{1/2}(z)}}{4tC^{1/2}(x)}\right]p_t(x,y).$$

16. LEMME. *Si $P_t^\alpha(x, y)$ est la densité de probabilité de transition définie à la formule* (9) *et correspondant à un coefficient de diffusion C constant sur $\mathscr{E}=\mathbb{R}^d$, alors l'application $(x \rightsquigarrow \nabla_x P_t^\alpha(x, y))$ est discontinue en $\mathscr{S}$ et vérifie*

$$\nabla_x P_t^\alpha(x,y)=\frac{y-x}{2Ct}p_t(x,y)+ \tag{21}$$

$$+\int_0^t d\tau\int_{z\in\mathscr{S}}\frac{z-x}{2C(t-\tau)}p_{t-\tau}(x,z)K(\tau,z,y)q(z)dS(z).$$

Démonstration. Nous supposons d'abord que $\mathscr{S}$ est un hyperplan, puis nous étudions le cas général.

(i) Utilisant la proposition 8, nous savons que, si $\mathscr{V}=\{y\cdot n<0\}$, $\mathscr{S}=\{y\cdot n=0\}$ et $\mathscr{W}=\{y\cdot n>0\}$, où n est un vecteur unitaire fixe de $\mathbb{R}^d$,

$$P_t^\alpha(x,y)=\frac{1}{(4\pi Ct)^{d/2}}\left[\exp\left(-\frac{\|x-y\|^2}{4Ct}\right)+\right.$$

$$\left.+\operatorname{sg}(y)(2\alpha-1)\exp\left(-\frac{(|\langle xn\rangle|+|\langle yn\rangle|)^2+\|\tilde{x}-\tilde{y}\|^2}{4Ct}\right)\right].$$

Par suite,

$$\nabla_x P_t^\alpha(x,y)=\frac{2(y-x)}{4Ct}p_t(x,y)+\left(-\operatorname{sg}(x)\frac{2(|\langle xn\rangle|+|\langle yn\rangle|)}{4Ct}n+\frac{\tilde{y}-\tilde{x}}{4Ct}\right)\times \tag{22}$$

$$\times\frac{1}{(4\pi Ct)^{d/2}}\operatorname{sg}(y)(2\alpha-1)\exp\left(-\frac{(|\langle xn\rangle|+|\langle yn\rangle|)^2+\|\tilde{x}-\tilde{y}\|^2}{4Ct}\right).$$

Il s'ensuit que $(x\rightsquigarrow\nabla_x P_t^\alpha(x,y)\cdot m)$ se prolonge continûment sur $\mathscr{S}$ si $m\perp n$ et que

$$(x\rightsquigarrow\nabla_x P_t^\alpha(x,y)\cdot n)=\frac{2(\langle yn\rangle-\langle xn\rangle)}{4Ct}p_t(x,y)-$$

$$-\frac{1}{(4\pi Ct)^{d/2}}\operatorname{sg}(x)\operatorname{sg}(y)(2\alpha-1)\frac{2(|\langle xn\rangle|+|\langle yn\rangle|)}{4Ct}\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{(|\langle xn\rangle|+|\langle yn\rangle|)^2+\|\tilde{x}-\tilde{y}\|^2}{4Ct}\right)$$

$$\simeq\left(x\rightsquigarrow\left(1-\operatorname{sg}(x)(2\alpha-1)\frac{2\langle yn\rangle}{4Ct}p_t(x,y)\right)\right)$$

ne se prolonge pas continûment en $\mathscr{S}$.

(ii) Dans le cas général, $P_t^\alpha(x, y)$ est donné par la formule (9):

$$P_t^\alpha(x, y) = p_t(x, y) + \int_0^t d\tau \int_{\mathcal{S}} p_{t-\tau}(x, z) K(\tau, z, y) q(z) dS(z).$$

Il en résulte que

$$\nabla_x P_t^{\beta\alpha}(x, y) = \frac{2(y-x)}{4Ct} p_t(x, y) +$$

$$+ \int_0^t d\tau \int_{z \in \mathcal{S}} \frac{2(z-x)}{4C(t-\tau)} p_{t-\tau}(x, z) K(\tau, z, y) q(z) dS(z).$$

Utilisant les formules (20) du n° 1 de [17], on peut alors démontrer que, notant pour tout point $x_0 \in \mathcal{S}$, $f(x_0+)$ [resp. $f(x_0-)$] la limite, lorsqu'elle existe de $f(y)$ lorsque y tend vers x_0 en restant dans un cône fermé de sommet x_0, contenu dans $\mathcal{W}$ [resp. $\mathcal{V}$], on a

$$\langle \nabla_x P_t^\alpha(x_0+, y) \cdot n_{x_0} \rangle = [1 + q(x_0)] C(x_0) K(t, x_0, y)$$

et

$$\langle \nabla_x P_t^\alpha(x_0-, y) \cdot n_{x_0} \rangle = [1 - q(x_0)] C(x_0) K(t, x_0, y)$$

Nous allons maintenant étudier le comportement du gradient, par rapport à x, de $P_t^{\alpha, C, D}(x, y)$.

Utilisant la formule (17), nous savons que

$$P_t^{\alpha, C, D}(x, y) = R^\alpha(x, 0, y, t) + \int_0^t \int_{\mathcal{E}} R^\alpha(x, \sigma, z, t) \psi(z, s, y, \sigma) dz\, d\sigma, \tag{23}$$

où $R^\alpha(x, s, y, t) = P_{t-s}^\alpha(x, y) \mathbf{1}_{\mathcal{V}}(y) + Q_{t-s}^\alpha(x, y) \mathbf{1}_{\mathcal{W}}(y)$.

Nous conservons la notion $\Gamma = C\mathbf{1}_{\mathcal{V}} + D\mathbf{1}_{\mathcal{W}}$ et alors

$$\nabla_x P_t^{\alpha, C, D}(x, y) = \frac{y-x}{2\Gamma(y) t} p_t^{(y)}(x, y) +$$

$$+ \int_0^t d\tau \int_{z \in \mathcal{S}} \frac{z-x}{2\Gamma(y)(t-\tau)} p_{t-\tau}^{(y)}(x, z) K(\tau, z, y) q(z) dS(z) +$$

$$+ \int_0^t d\sigma \int_{\xi \in \mathcal{E}} \frac{\xi - x}{2\Gamma(\xi)(t-\sigma)} p_{t-\sigma}^{(\xi)}(x, \xi) +$$

$$+ \int_\sigma^t d\tau \int_{z \in \mathcal{S}} \frac{z-x}{2\Gamma(\xi)(t-\tau)} p_{t-\tau}^{(\xi)}(x, z) K(\tau - \sigma, z, \xi) q(z) dS(z) \psi(\xi, 0, y, \sigma) d\xi\, d\sigma,$$

où

$$p_t^{(\xi)}(x, y) = \frac{1}{(4\pi\Gamma(\xi)t)^{d/2}} \exp\left[-\frac{\|x-y\|^2}{4\Gamma(\xi)t}\right]$$

et

$$K(\tau, z, \zeta) = 2\Gamma(\zeta)\left[\frac{\partial p_t^{(\zeta)}(z, \zeta)}{\partial n_z} + \int_0^\tau du \int_{y\in\mathscr{S}} \frac{\partial p_{t-\tau}^{(\zeta)}}{\partial n_z}(x, y)\, K(\tau, y, \zeta)\, q(y)\, dS(y)\right].$$

On peut encore écrire:

$$\nabla_x P_t^{\alpha,C,D}(x, y) = \frac{y-x}{2\Gamma(y)t} p_t^{(y)}(x, y) + \tag{24}$$
$$+ \int_0^t d\sigma \int_{\xi\in\mathscr{E}} \frac{\xi - x}{2\Gamma(\xi)(t-\sigma)} p_{t-\sigma}^{(\xi)}(x, \xi)\, \psi(\xi, 0, y, \sigma)\, d\xi\, d\sigma +$$
$$+ \int_{z\in\mathscr{S}} \int_{\tau=0}^{t} d\tau \left[\frac{z-x}{2\Gamma(y)(t-\tau)} p_{t-\tau}^{(y)}(x, z)\, K(\tau, z, y) + \right.$$
$$\left. + \int_{\sigma=0}^{\tau} \int_{\xi\in\mathscr{E}} \frac{z-x}{2\Gamma(\xi)(t-\tau)} p_{t-\tau}^{(\xi)}(x, z)\, K(\tau-\sigma, z, \xi)\, \psi(\xi, 0, y, \sigma)\, d\xi\, d\sigma\right] q(z)\, dS(z),$$

Dans le cas où $\mathscr{S}$ est l'hyperplan de $\boldsymbol{R}^d$, $\mathscr{S} = \{y \in \boldsymbol{R}^d \colon \langle y \cdot n\rangle = 0\}$, nous avons vu que

$$K(t, x, z) = \frac{\langle n(z-x)\rangle}{2t} p_t^{(z)}(x, z).$$

Nous obtenons alors la proposition suivante:

17. Proposition. *Si $\mathscr{S}$ est l'hyperplan, $\mathscr{S} = \{y \in \boldsymbol{R} \colon \langle y \cdot n\rangle = 0\}$, si C et D sont constants, alors la formule* (24) *s'écrit*:

$$\nabla_x P_t^{\alpha,C,D}(x, y) = \frac{y-x}{2\Gamma(y)t} p_t^{(y)}(x, y) + \tag{25}$$
$$+ \int_0^t d\sigma \int_{\xi\in\mathscr{E}} \frac{\xi - x}{2\Gamma(\xi)(t-\sigma)} p_{t-\sigma}^{(\xi)}(x, \xi)\, \psi(\xi, 0, y, \sigma)\, d\xi\, d\sigma +$$
$$+ \int_{z\in\mathscr{S}} \int_{\tau=0}^{t} d\tau \left[\frac{\langle (y-z)n\rangle (z-x)}{4\Gamma(y)(t-\tau)\tau} p_{t-\tau}^{(y)}(x, z)\, p_\tau^{(y)}(z, y) + \right.$$
$$\left. + \int_{\sigma=0}^{\tau} \int_{\xi\in\mathscr{E}} \frac{\langle (\xi-z)n\rangle (z-x)}{4\Gamma(\xi)(t-\tau)(\tau-\sigma)} p_{t-\tau}^{(\xi)}(x, z)\, p_{\tau-\sigma}^{(\xi)}(z, \xi)\, \psi(\xi, 0, y, \sigma)\, d\xi\, d\sigma\right] q(z)\, dS(z).$$

Cette expression nous conduit au corollaire suivant:

18. Corollaire. *Lorsque, en outre,* $q \doteq (2\alpha-1)$ *est constant, on a*

$$\nabla_x P_t^{\alpha,C,D}(x,y) = \frac{y-x}{2\Gamma(y)t} p_t^{(y)}(x,y) + \tag{26}$$

$$+(2\alpha-1)\int_{z\in\mathscr{S}}\int_{\tau=0}^{t} d\tau \frac{\langle (y-z)n\rangle (z-x)}{4\Gamma(y)(t-\tau)\tau} p_{t-\tau}^{(y)}(x,z)\, p_\tau^{(y)}(z,y)\, dS(z) +$$

$$+\int_0^t d\sigma \int_{\xi\in\mathscr{E}} \Bigg[\frac{\xi-x}{2\Gamma(\xi)(t-\sigma)} p_{t-\sigma}^{(\xi)}(x,\xi) +$$

$$+(2\alpha-1)\int_{z\in\mathscr{S}}\int_{\tau=\sigma}^{\tau} \frac{\langle (\xi-z)n\rangle (z-x)}{4\Gamma(\xi)(t-\tau)(\tau-\sigma)} p_{t-\tau}^{(\xi)}(x,z)\, p_{\tau-\sigma}^{(\xi)}(z,\xi)\, dS(z)\, d\tau\Bigg] \times$$

$$\times \Big([\mathbf{1}_{\mathscr{V}}(y)\mathbf{1}_{\mathscr{V}}(\xi)+\mathbf{1}_{\mathscr{W}}(y)\mathbf{1}_{\mathscr{W}}(\xi)]\Big[\sum_{\substack{\nu=2n+2\\ n\in N}} R_\nu(\xi,0,y,\sigma)\Big]+$$

$$+[\mathbf{1}_{\mathscr{V}}(y)\mathbf{1}_{\mathscr{W}}(\xi)+\mathbf{1}_{\mathscr{W}}(y)\mathbf{1}_{\mathscr{V}}(\xi)]\Big[\sum_{\substack{\nu=2n+1\\ n\in N}} R_\nu(\xi,0,y,\sigma)\Big]\Big)\, d\xi\, d\sigma.$$

Démonstration. Utilisant la proposition 11, nous pouvons écrire que

$$\psi(\xi,0,y,\sigma) = \sum_{\nu=1}^{\infty} R_\nu(\xi,0,y,\sigma)$$

avec

$$R_1(\xi,0,y,\sigma) = [\Gamma(\xi)-\Gamma(y)]\Delta_\xi R^\alpha(\xi,0,y,\sigma)$$
$$= [C-D][\mathbf{1}_{\mathscr{V}}(\xi)\mathbf{1}_{\mathscr{W}}(y)\Delta_\xi Q^\alpha(\xi,0,y,\sigma)-\mathbf{1}_{\mathscr{W}}(\xi)\mathbf{1}_{\mathscr{V}}(y)\Delta_\xi P^\alpha(\xi,0,y,\sigma)].$$

Pour simplifier les notations, les ensembles $\mathscr{V}$ et $\mathscr{W}$ ayant des rôles identiques, nous supposons, par exemple, que y appartient à $\mathscr{W}$. Nous avons alors

$$R_1(\xi,0,y,\sigma) = [C-D]\mathbf{1}_{\mathscr{V}}(\xi)\Delta_\xi Q^\alpha(\xi,0,y,\sigma),$$

$$R_2(\xi,0,y,\sigma) = \int_{\tau=0}^{\sigma}\int_{z\in\mathscr{E}} R_1(\xi,\tau,z,\sigma) R_1(z,0,y,\tau)\, dz\, d\tau$$

$$= -[C-D]^2\mathbf{1}_{\mathscr{W}}(\xi)\int_{\tau=0}^{\sigma}\int_{z\in\mathscr{V}} \Delta_\xi P^\alpha(\xi,\tau,z,\sigma)\Delta_\xi(z,0,y,\tau)\, dz\, d\tau$$

$$= -[C-D]^2\mathbf{1}_{\mathscr{W}}(\xi)\int_{\tau=0}^{\sigma}\int_{z\in\mathscr{V}} \frac{2(1-\alpha)}{[4\pi C(\sigma-\tau)]^{d/2}}\Delta_\xi Q^\alpha \exp\left[-\frac{\|z-\xi\|^2}{4C(\sigma-\tau)}\right]\times$$

$$\times \frac{2\alpha}{(4\pi D\tau)^{d/2}}\Delta_z \exp\left[-\frac{\|z-y\|^2}{4D\tau}\right] dz\, d\tau,$$

$$R_3(\xi, 0, y, \sigma) = [C-D]^3 \mathbf{1}_{\mathscr{V}}(\xi) \int_{\tau_1=0}^{\sigma} \int_{\tau_2=0}^{\tau_1} \int_{z_1\in\mathscr{W}} \int_{z_2\in\mathscr{V}} \Delta_\xi Q^\alpha(\xi, \tau_1, z_1, \sigma)\times$$

$$\times \Delta_{z_1} P^\alpha(z_1, \tau_2, z_2, \tau_1)\Delta_y Q^\alpha(z_2, 0, y, \tau_2)\,dz_1\,dz_2\,d\tau_1\,d\tau_2,$$

. . . .

$$\psi(\xi, 0, y, \sigma) = \mathbf{1}_{\mathscr{V}}(\xi) \sum_{\substack{v=2n+1\\ n\in N}} R_v(\xi, 0, y, \sigma) + \mathbf{1}_{\mathscr{W}}(\xi) \sum_{\substack{v=2n+2\\ n\in N}} R_v(\xi, 0, y, \sigma).$$

Nous allons maintenant établir la proposition suivante:

19. Proposition. *Si $\mathscr{S}$ est un hyperplan de $\boldsymbol{R}^d$, $\mathscr{S} = \{y\in\boldsymbol{R}^d: \langle yn\rangle = 0\}$, et si α, C et D sont des constantes*

(i) *quelles que soient les valeurs de α, C et D, la composante de*

$$[C^{1/2}\mathbf{1}_{\mathscr{V}}(x)+D^{1/2}\mathbf{1}_{\mathscr{W}}(x)]\,\nabla_x P_t^{\alpha,C,D}(x, y)$$

parallèlement à $\mathscr{S}$ se prolonge continûment — par rapport à x — au voisinage de $\mathscr{S}$;

(ii) *si φ est une fonction réelle de variable réelle, la composante de $\varphi(x_1)\nabla_x P_t^{\alpha,C,D}(x, y)$ se prolonge continûment — par rapport à x — au voisinage de $\mathscr{S}$ si et seulement si le produit de $\varphi(x_1)$ par la dérivée, par rapport à x_1, de la densité de probabilité en dimension 1, $\hat{P}_t^{\alpha,C,D}(x_1, y_1)$, se prolonge continûment — par rapport à x_1 — au voisinage de $\{0\}$.*

Démonstration. Conservant des notations précédemment utilisées, nous écrivons pour tout $x\in\boldsymbol{R}^d$, $\tilde{x} = x-\langle x\cdot n\rangle n$ et $\hat{x} = \langle x\cdot n\rangle n = x_1 n$.

Nous avons, d'après la formule (10) de la proposition 1,

$$P_t^\alpha(x, y) = \frac{1}{(4\pi Ct)^{d/2}}\left[\exp\left(-\frac{\|x-y\|^2}{4Ct}\right)+ \right.$$

$$\left. +\operatorname{sg}(y)(2\alpha-1)\exp\left(-\frac{(|x_1|+|y_1|)^2+\|\tilde{x}-\tilde{y}\|^2}{4Ct}\right)\right],$$

où $x = \tilde{x}+x_1 n$ et $y = \tilde{y}+y_1 n$.

De même, nous avons

$$Q_t^\alpha(x, y) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{d/2}}\left[\exp\left(-\frac{\|x-y\|^2}{4Dt}\right)+ \right.$$

$$\left. +\operatorname{sg}(y)(2\alpha-1)\exp\left(-\frac{(|x_1|+|y_1|)^2+\|\tilde{x}-\tilde{y}\|^2}{4Dt}\right)\right],$$

$$R_t^\alpha(x, y) = \frac{1}{(4\pi\Gamma(y)\,t)^{d/2}}\left[\exp\left(-\frac{\|x-y\|^2}{4\Gamma(y)\,t}\right)+ \right.$$

$$\left. +\operatorname{sg}(y)(2\alpha-1)\exp\left(-\frac{(|x_1|+|y_1|)^2+\|\tilde{x}-\tilde{y}\|^2}{4\Gamma(y)\,t}\right)\right].$$

Considérant, par exemple, $P_t^\alpha(x, y)$, nous pouvons le factoriser en

$$P_t^\alpha(x, y) = \hat{P}_t^\alpha(x_1, y_1)\tilde{P}_t(\tilde{x}, \tilde{y}).$$

Par suite $\nabla_{\tilde{x}} P_t^\alpha(x, y) = \hat{P}_t^\alpha(x_1, y_1)\nabla_{\tilde{x}}\tilde{P}_t(\tilde{x}, \tilde{y})$. Comme $(x \rightsquigarrow \hat{P}_t^\alpha(x_1, y_1))$ et $(x \rightsquigarrow \nabla_{\tilde{x}}\tilde{P}_t(\tilde{x}, \tilde{y}))$ se prolongent tous deux continûment au voisinage de $\mathscr{S}$, il en est de même pour $(x \rightsquigarrow \nabla_{\tilde{x}} P_t^\alpha(x, y))$. La reflexion n'induit donc pas de discontinuité de la composante du gradient parallèle à $\mathscr{S}$.

De la même manière qu'au (b) du lemme 15 on voit que

$$[C^{1/2}(x)\mathbf{1}_{\mathscr{V}}(x)+D^{1/2}(x)\mathbf{1}_{\mathscr{W}}(x)]\nabla_{\tilde{x}} P_t^{1/2,C,D}(x, y)$$

se prolonge continûment au voisinage de $\mathscr{S}$ et, par suite,

$$x \rightsquigarrow [C^{1/2}(x)\mathbf{1}_{\mathscr{V}}(x)+D^{1/2}(x)\mathbf{1}_{\mathscr{W}}(x)]\nabla_{\tilde{x}} P_t^{\alpha,C,D}(x, y)$$

se prolonge continûment au voisinage de $\mathscr{S}$.

Utilisant la formule (26), nous pouvons calculer la composante du gradient — par rapport à y — le long du vecteur n orthogonal à $\mathscr{S}$:

$$\begin{aligned}\langle\nabla_x P_t^{\alpha,C,D}(x, y)\cdot n\rangle &= \frac{\partial}{\partial n_x} P_t^{\alpha,C,D}(x, y) = \frac{(y_1-x_1)}{2\Gamma(y)t}p_t^{(y)}(x, y)+\\ &+(2\alpha-1)\int_{\tilde{z}\in\mathscr{S}}\int_{\tau=0}^{t} d\tau\left(-\frac{y_1 x_1}{4\Gamma(y)(t-\tau)\tau}\right)p_{t-\tau}^{(y)}(x, \tilde{z})+p_\tau^{(y)}(\tilde{z}, y)\,d\tilde{z}+\\ &+\int_{\sigma=0}^{t} d\sigma\int_{\xi\in\mathscr{E}}\frac{\xi_1-x_1}{2\Gamma(\xi)(t-\sigma)}p_{t-\sigma}^{(\xi)}(x, \xi)\,\psi(\xi, 0, y, \sigma)\,d\xi\,d\sigma+\\ &+(2\alpha-1)\int_{\sigma=0}^{t}\int_{\xi\in\mathscr{E}}\int_{\tau=\sigma}^{t}\int_{\tilde{z}\in\mathscr{S}}\left(-\frac{\xi_1 x_1}{4\Gamma(\xi)(t-\tau)(\tau-\sigma)}\right)\times\\ &\qquad\times p_{t-\tau}^{(\xi)}(x, \tilde{z})\,p_{\tau-\sigma}^{(\xi)}(\tilde{z}, \xi)\,d\tilde{z}\,d\tau\,\psi(\xi, 0, y, \sigma)\,d\xi\,d\sigma.\end{aligned}$$

Nous pouvons alors utiliser le raisonnement conduisant aux formules (20) de [17], n° 2.

Pour tout point x_0 appartenant à $\mathscr{S}$ et pour toute fonction φ définie sur un voisinage de x_0, on dit que φ admet une *limite à droite de* x_0, notée $\varphi(x_0+)$, si $\varphi(x)$ converge vers une limite lorsque x tend vers x_0, $x \neq x_0$, x restant dans un cône fermé de sommet x_0 et contenu dans $\mathscr{W}\cup\{x_0\}$.

De manière "symétrique", on dit que φ admet une *limite à gauche de* x_0, notée $\varphi(x_0-)$, si $\varphi(x)$ converge vers une limite lorsque x tend vers x_0, $x \neq x_0$, x restant dans un cône fermé de sommet x_0 et contenu dans $\mathscr{V}\cup\{x_0\}$.

Les calculs menés dans [17] conduisent aux formules (20) qui donnent ici que $\partial/\partial n_x [P_t^{\alpha,C,D}(x_0-,y)]$ existe, ainsi que $\partial/\partial n_x [P_t^{\alpha,C,D}(x_0+,y)]$, et l'on a

$$\frac{\partial}{\partial n_x} P_t^{\alpha,C,D}(x_0-,y) = (1+q(x))\langle \nabla_x P_t^{1/2,C,D}(x_0-,y)n\rangle$$

et

$$\frac{\partial}{\partial n_x} P_t^{\alpha,C,D}(x_0+,y) = (1-q(x))\langle \nabla_x P_t^{1/2,C,D}(x_0+,y)n\rangle.$$

Nous voyons donc que $\varphi(x_1)\cdot\partial/\partial n_x [P_t^{\alpha,C,D}(x,y)]$ admet un prolongement continu si

$$\frac{1}{2C^{1/2}}\varphi(x_1-)(1+q(x)) + \frac{1}{2D^{1/2}}\varphi(x_1+)(1-q(x))$$

admet un prolongement continu, ce qui est la même condition qu'en dimension 1.

20. Théorème. *Si $\mathscr{S}$ est un hyperplan de $\boldsymbol{R}^d$, $\mathscr{S} = \{y\in \boldsymbol{R}^d: \langle yn\rangle = 0\}$, où n est vecteur unitaire fixé dans $\boldsymbol{R}^d$, et si α, C et D sont des constantes, décomposant tout vecteur $z\in\boldsymbol{R}^d$ en $z = z_1 n + \tilde{z}$, où $\tilde{z}$ appartient à $\mathscr{S}$,*

(i) *quelles que soient les valeurs de α, C et D*

$$[C^{1/2}\mathbf{1}_{\mathscr{V}}(x) + D^{1/2}\mathbf{1}_{\mathscr{W}}(x)]\nabla_{\tilde{x}} P_t^{\alpha,C,D}(x,y)$$

et

$$[C\mathbf{1}_{\mathscr{V}}(x) + D\mathbf{1}_{\mathscr{W}}(x)]\Delta_{\tilde{x}} P_t^{\alpha,C,D}(x,y)$$

se prolongent continûment — relativement à x — au voisinage de $\mathscr{S}$;

(ii) (a) *si $\alpha = \sqrt{C}/(\sqrt{C}+\sqrt{D})$, alors $\nabla_{x_1} P_t^{\alpha,C,D}(x,y)$, $[C\mathbf{1}_{\mathscr{V}}(x)+D\mathbf{1}_{\mathscr{W}}(x)]\times \Delta_{x_1} P_t^{\alpha,C,D}(x,y)$ et $[C\mathbf{1}_{\mathscr{V}}(x)+D\mathbf{1}_{\mathscr{W}}(x)]\Delta_x P_t^{\alpha,C,D}(x,y)$ se prolongent continûment — relativement à x — au voisinage de $\mathscr{S}$;*

(b) *si $\alpha = \sqrt{D}/(\sqrt{C}+\sqrt{D})$, alors $[C\mathbf{1}_{\mathscr{V}}(x)+D\mathbf{1}_{\mathscr{W}}(x)]\nabla_{x_1} P_t^{\alpha,C,D}(x,y)$, $\nabla_{x_1}([C\mathbf{1}_{\mathscr{V}}(x)+D\mathbf{1}_{\mathscr{W}}(x)]\nabla_{x_1})P_t^{\alpha,C,D}(x,y)$, $\nabla_x([C\mathbf{1}_{\mathscr{V}}(x)+D\mathbf{1}_{\mathscr{W}}(x)]\nabla_x)P_t^{\alpha,C,D}(x,y)$ se prolongent continûment — relativement à x — au voisinage de $\mathscr{S}$.*

Démonstration. Le (i) se déduit du (i) de la proposition 19.

Démonstration de (ii). On reprend l'assertion (ii) de la proposition 19 avec $\varphi \equiv 1$ pour le (a) et $\varphi = C\mathbf{1}_{\mathscr{V}} + D\mathbf{1}_{\mathscr{W}}$, pour le (b). On a

$$\hat{P}_t^{\alpha,C,D}(x_1,y_1) = \frac{\mathbf{1}_{\mathscr{V}}(y)+\sqrt{C/D}\,\mathbf{1}_{\mathscr{W}}(y)}{(4\pi C t)^{1/2}}\left\{\exp\left[-\frac{(x_1'-y_1')^2}{4Ct}\right]+\right.$$
$$\left. +\operatorname{sg}(y)(2\alpha-1)\exp\left[-\frac{(|x_1'|+|y_1'|)^2}{4Ct}\right]\right\}$$

où $z_1' = \mathbf{1}_{\mathscr{V}}(z)z_1 + \sqrt{C/D}\,\mathbf{1}_{\mathscr{W}}(z)z_1$.

On voit alors que

$$\nabla_{x_1} \hat{P}_t^{\alpha,C,D}(x_1, y_1) = \frac{[\mathbf{1}_{\mathscr{V}}(y)+\sqrt{C/D}\,\mathbf{1}_{\mathscr{W}}(y)]\,[\mathbf{1}_{\mathscr{V}}(x)+\sqrt{C/D}\,\mathbf{1}_{\mathscr{W}}(x)]}{(4\pi Ct)^{1/2}} \times$$

$$\times \left\{ \frac{y_1'-x_1'}{2Ct} \exp\left[-\frac{(x_1'-y_1')^2}{4Ct}\right] - \right.$$

$$\left. -(2\alpha-1)\,\mathrm{sg}(y)\,\mathrm{sg}(x)\frac{|x_1'|+|y_1'|}{2Ct}\exp\left[-\frac{(|x_1'|+|y_1'|)^2}{2Ct}\right]\right\}.$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que $\nabla_{x_1} \hat{P}_t^{\alpha,C,D}(x_1, y_1)$ se prolonge continûment au voisinage de $x_1 = 0$ est alors que α soit égal à $\alpha_0 = \sqrt{C}/(\sqrt{C}+\sqrt{D})$.

De même, une condition nécessaire et suffisante pour que $[C\mathbf{1}_{\mathscr{V}}(x)+D\mathbf{1}_{\mathscr{W}}(x)]\,\nabla_{x_1} \hat{P}_t^{\alpha,C,D}(x_1, y_1)$ se prolonge continûment au voisinage de $x_1 = 0$ est que α soit égal à $\alpha_1 = \sqrt{D}/(\sqrt{C}+\sqrt{D})$.

En itérant la dérivation on voit que

$$\Delta_{x_1} \hat{P}_t^{\alpha,C,D}(x_1, y_1) = \frac{[\mathbf{1}_{\mathscr{V}}(y)+\sqrt{C/D}\,\mathbf{1}_{\mathscr{W}}(y)]\,[\mathbf{1}_{\mathscr{V}}(x)+C/D\,\mathbf{1}_{\mathscr{W}}(x)]}{(4\pi Ct)^{1/2}} \times$$

$$\times \left\{ \left[\left(\frac{y_1'-x_1'}{2Ct}\right)^2 - \frac{1}{2Ct}\right] \exp\left[-\frac{(x_1'-y_1')^2}{4Ct}\right] + \right.$$

$$\left. +(2\alpha-1)\,\mathrm{sg}(y)\left[\left(\frac{|x_1'|+|y_1'|}{2Ct}\right)^2 - \frac{1}{2Ct}\right]\exp\left[-\frac{(|x_1'|+|y_1'|)^2}{4Ct}\right]\right\}.$$

Par conséquent, quel que soit le coefficient de réflexion α, la fonction $[C\mathbf{1}_{\mathscr{V}}(x)+D\mathbf{1}_{\mathscr{W}}(x)]\,\Delta_{x_1} \hat{P}_t^{\alpha,C,D}(x_1, y_1)$ se prolonge continûment au voisinage de $x_1 = 0$.

Les assertions (ii) (a) et (ii) (b) se déduisent alors immédiatement.

21. Théorème. *Les générateurs infinitésimaux généralisés de $X^{\alpha\beta}(t)$ et de $P_t^{\alpha,C,D}$ vérifient tous deux la formule*

$$L^{\alpha,\beta} = L^{\alpha,C,D} = (C\mathbf{1}_{\mathscr{V}}+D\mathbf{1}_{\mathscr{W}})\Delta + \delta_{\mathscr{V},\mathscr{W}}(\sqrt{C}+\sqrt{D})(\alpha\sqrt{D}+(\alpha-1)\sqrt{C})\nabla. \tag{27}$$

Démonstration. Jusqu'ici nous avons admis mais non prouvé rigoureusement le fait que les probabilités de transition $P^{\alpha,C,D}$ sont bien celles du processus de Wiener asymétrique modifié $X^{\alpha,C,D} = X^{\alpha,\beta}$.

Nous allons ici effectuer deux démonstrations indépendantes. Dans la première (A), nous établirons que le générateur infinitésimal généralisé de $X^{\alpha\beta}$ est bien donné par la formule (27). Dans la seconde (B), nous établirons que le générateur infinitésimal généralisé de la famille $P_t^{\alpha,C,D}$ est aussi donné par la formule (27).

(A) Nous avons, au sens du générateur infinitésimal généralisé,

$$L^{\alpha\beta} f(x) = \lim_{t\to 0} t^{-1} \{\mathbf{E}[f X^{\alpha\beta}_{x,0}(t) - f(x)]\} = (C\mathbf{1}_{\mathscr{V}} + D\mathbf{1}_{\mathscr{W}})\Delta f(x) +$$

$$+ \lim_{t\to 0} t^{-1} \nabla f(x) \mathbf{E}[X^{\alpha\beta}_{x,0}(t) - x].$$

(a) Lorsque x n'appartient pas à $\mathscr{S}$ la limite précédente existe et est nulle en x.

(b) Pour tout point régulier appartenant à $\mathscr{S}$, on démontre, comme dans la proposition 6, que la limite existe et est donnée par

$$\lim_{t\to 0} t^{-1} \mathbf{E}[X^{\alpha,\beta}_{x,0}(t) - x] = \lim_{t\to 0} t^{-1} \mathbf{E}[\langle (X^{\alpha,\beta}_{x,0}(t) - x)\vec{n}_x\rangle]\,\vec{n}_x,$$

où n_x est, comme dans la démonstration de la proposition 6, la normale unitaire passant par x et dirigée de $\mathscr{V}$ vers $\mathscr{W}$.

On a alors ramené à une étude le long d'un axe et, utilisant les propositions 2 et 6 de [8],

$$\lim_{t\to 0} t^{-1} \mathbf{E}[\langle (X^{\alpha,\beta}_{x}(t) - x)\vec{n}_x\rangle]\,\vec{n}_x = \delta_{\mathscr{V},\mathscr{W}} (\sqrt{C} + \sqrt{D})(\alpha\sqrt{D} + (\alpha-1)\sqrt{C})\,\partial_{\vec{n}_x}.$$

Pour retrouver ce résultat, on utilise la proposition 4 de [7], en posant $(sp)^2/2 = C(x)$, $(uq)^2/2 = D(x)$ et

$$r\left(\frac{sp+uq}{p+q}\right)^2 + \frac{(sp+uq)\,pq\,(u-s)}{2(p+q)}$$

$$= (2\alpha-1)2C\left[\frac{\sqrt{2C}+\sqrt{2D}}{2\sqrt{2C}}\right]^2 + \frac{(\sqrt{2C}+\sqrt{2D})2C(\sqrt{C/D}-1)}{4\sqrt{2C}}$$

$$= [\sqrt{2C}+\sqrt{2D}]\left[\left(\frac{2\alpha-1}{4}\right)(\sqrt{2C}+\sqrt{2D}) + \frac{\sqrt{2D}-\sqrt{2C}}{4}\right]$$

$$= [\sqrt{2C}+\sqrt{2D}]\left[\frac{\alpha}{2}\sqrt{2D} + \frac{(\alpha-1)}{2}\sqrt{2C}\right] = [\sqrt{C}+\sqrt{D}][\alpha\sqrt{D} + (\alpha-1)\sqrt{C}].$$

Nous pouvons donc conclure, comme dans la proposition 1, que le générateur infinitésimal généralisé de $X^{\alpha,\beta}(t)$ s'écrit comme

$$L^{\alpha\beta} = (C\mathbf{1}_{\mathscr{V}} + D\mathbf{1}_{\mathscr{W}}) + \delta_{\mathscr{V},\mathscr{W}}(\sqrt{C}+\sqrt{D})(\alpha\sqrt{D} + (\alpha-1)\sqrt{C})\nabla.$$

(B) Pour étudier le générateur infinitésimal généralisé des $P^{\alpha,C,D}_t$, on peut, en utilisant la formule de Lindeberg, via des cartes locales et une approximation, se ramener au cas simple où α, C et D sont des constantes et où $\mathscr{S}$ est un hyperplan. Comme pour l'étude de L^{α} nous sommes conduits à étudier des limites de la forme:

$$\lim_{t\to 0} \int_{x\in \boldsymbol{R}^d} \varphi(x) \int_{y\in \boldsymbol{R}^d} \langle (y-x), \theta\rangle P_t^{\alpha,C,D}(x, y)\, dy\, dx$$

$$\text{et} \quad \lim_{t\to 0} \int_{x\in \boldsymbol{R}^d} \varphi(x) \int_{y\in \boldsymbol{R}^d} \langle (y-x), \theta\rangle^2 P_t^{\alpha,C,D}(x, y)\, dy\, dx,$$

où θ est un vecteur fixé de $\boldsymbol{R}^d$.

(B.1) Soit θ un vecteur fixé de $\boldsymbol{R}^d$. On étudie la limite suivante:

$$\lim_{t\to 0} t^{-1} \int_{y\in \boldsymbol{R}^d} \langle (y-x)\theta\rangle P_t^{\alpha,C,D}(x, y)\, dy.$$

(a) Si $\theta // \mathscr{S}$, alors

$$\int_{y\in \boldsymbol{R}^d} \langle (y-x)\theta\rangle P_t^{\alpha,C,D}(x, y)\, dy = 0.$$

(b) On considère le cas $\theta = n$. Pour cela on va établir le lemme suivant:

LEMME. *Nous avons*

$$\int_{\tilde{y}\in \boldsymbol{R}^{d-1}} P_t^{\alpha,C,D}(x, y)\, d\tilde{y} = \hat{P}_t^{\alpha,C,D}(x_1, y_1), \qquad \textit{où } y = (y_1, \tilde{y}) \textit{ avec } \tilde{y} = (y_2, \ldots, y_d).$$

Démonstration. Nous avons

$$R_t^\alpha(x, y) = \mathbf{1}_{\boldsymbol{R}^-}(y_1)\hat{P}_t^\alpha(x_1, y_1)\tilde{P}_t(\tilde{x}, \tilde{y}) + \mathbf{1}_{\boldsymbol{R}^+}(y_1)\hat{Q}^\alpha(x_1, y_1)\tilde{Q}_t(\tilde{x}, \tilde{y})$$

avec

$$\hat{P}_t^\alpha(x_1, y_1) = \frac{1}{(4\pi Ct)^{1/2}}\left\{\exp\left(-\frac{|x_1-y_1|^2}{4Ct}\right) + \operatorname{sg}(y_1)(2\alpha-1)\exp\left(-\frac{(|x_1|+|y_1|)^2}{4Ct}\right)\right\},$$

$$\tilde{P}_t(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{1}{(4\pi Ct)^{(d-1)/2}}\exp\left(-\frac{\|\tilde{x}-\tilde{y}\|^2}{4Ct}\right).$$

Posant $\hat{R}_t^\alpha(x_1, y_1) = \hat{P}_t^\alpha(x_1, y_1) + \hat{Q}_t^\alpha(x_1, y_1)$ et $\tilde{R}_t^{y_1}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \mathbf{1}_{\boldsymbol{R}^-}(y_1)\tilde{P}_t(\tilde{x}, \tilde{y}) + \mathbf{1}_{\boldsymbol{R}^+}(y_1)\tilde{Q}_t(\tilde{x}, \tilde{y})$, on a $R_t^\alpha(x, y) = \hat{R}_t^\alpha(x_1, y_1)\tilde{R}_t^{y_1}(\tilde{x}, \tilde{y})$. On démontre alors que

$$\int_{\tilde{y}\in \boldsymbol{R}^{d-1}} \tilde{R}_t^{y_1}(\tilde{x}, \tilde{y})\, d\tilde{y} = 1 \quad \text{et} \quad \int_{\tilde{y}\in \boldsymbol{R}^{d-1}} \left(L_x - \frac{\partial}{\partial t}\right) R_t^\alpha(x, y)\, d\tilde{y} = \left(L_{x_1} - \frac{\partial}{\partial t}\right)\hat{R}_t^\alpha(x_1, y_1).$$

Posant

$$\varphi_t(x_1, z_1) = \int_{\tilde{z}\in \boldsymbol{R}^{d-1}} \psi_t(x, z)\, d\tilde{z},$$

le noyau φ_t vérifie l'équation intégrale de Volterra:

$$\varphi_t(x_1, z_1) = \left(L_{x_1} - \frac{\partial}{\partial t}\right)\hat{R}_t^\alpha(x_1, z_1) +$$

$$+ \int_0^t \int_{y_1\in \boldsymbol{R}} \left(L_{x_1} - \frac{\partial}{\partial t}\right)\hat{R}_{t-\sigma}^\alpha(x_1, y_1)\,\varphi_\sigma(y_1, z_1)\, dy_1\, d\sigma.$$

Cette équation est précisément celle qui définit la fonction $\psi = \hat{\psi}$ lorsque la dimension est égale à 1, par suite $\varphi_t(x_1, z_1)$ est le noyau $\hat{\psi}_t(x_1, z_1)$ en dimension 1, d'où

$$\int_{\tilde{y}\in \mathbf{R}^{d-1}} P_t^{\alpha,C,D}(x, y)\,d\tilde{y} = \hat{R}_t^{\alpha}(x_1, y_1) + \int_{\tilde{y}\in \mathbf{R}^{d-1}} \int_0^t \int_{\tilde{z}\in \mathbf{R}^{d-1}} R_{t-\sigma}^{\alpha}(x, z)\,\psi_\sigma(z, y)\,dz\,d\tilde{y}$$

$$= \hat{R}_t^{\alpha}(x_1, y_1) + \int_0^t \int_{z_1\in \mathbf{R}} \hat{R}_{t-\sigma}^{\alpha}(x_1, z_1)\,\hat{\psi}_\sigma(z_1, y_1)\,d\sigma\,dz_1 = \hat{P}_t^{\alpha,C,D}(x_1, y_1),$$

ce qui démontre le lemme.

Suite de la démonstration (B.1). Si $\theta = n$, alors

$$\lim_{t\to 0} t^{-1} \int_{\mathbf{R}^d} \varphi(x) \int_{\mathbf{R}^d} P_t^{\alpha,C,D}(x, y)\,\langle (y-x)\,\theta\rangle\,dy\,dx$$

$$= \lim_{t\to 0} t^{-1} \int_{\mathbf{R}^d} \varphi(x) \int_{y_1\in \mathbf{R}} (y_1 - x_1)\,\hat{P}_t^{\alpha,C,D}(x_1, y_1)\,dy_1\,dx.$$

Posant $\varphi = g\,(\partial f/\partial n)$, la limite précédente donne la partie "drift" du G.I.G. et celle-ci est égale à

$$\int_{\mathscr{S}} g(x)(\sqrt{D}+\sqrt{C})(\alpha\sqrt{D}+(\alpha-1)\sqrt{C})\frac{\partial f}{\partial n}(x)\,dS(x).$$

(B.2) On calcule maintenant, pour tout vecteur unitaire $\theta \in \mathbf{R}^d$,

$$I(\theta) = \lim_{t\to 0} (2t)^{-1} \int_{x\in \mathbf{R}^d} \varphi(x) \int_{y\in \mathbf{R}^d} \langle (y-x)\,\theta\rangle^2\, P_t^{\alpha,C,D}(x, y)\,dy\,dx$$

$$= \lim_{t\to 0} (2t)^{-1} \int_{x\in B(\mathscr{S},\varepsilon)} \varphi(x) \int_{y\in \mathbf{R}^d} \langle (y-x)\,\theta\rangle^2\, P_t^{\alpha,C,D}(x, y)\,dy\,dx$$

$$+ \lim_{t\to 0} (2t)^{-1} \int_{x\in \mathbf{R}^d\setminus B(\mathscr{S},\varepsilon)} \varphi(x) \int_{y\in \mathbf{R}^d} \langle (y-x)\,\theta\rangle^2\, P_t^{\alpha,C,D}(x, y)\,dy\,dx$$

$$= I_1(\theta) + I_2(\theta).$$

Utilisant la propriété de Lindeberg, la deuxième limite existe et est donnée lorsque l'on pose $\varphi = g\,(\partial^2 f/\partial \theta^2)$; par

$$I_2(\theta) = \int_{x\in \mathbf{R}^d\setminus B(\mathscr{S},\varepsilon)} g(x)\,[C 1_{\mathscr{V}}(x) + D 1_{\mathscr{W}}(x)]\,\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}(x)\,dx.$$

Si $\theta \perp \mathscr{S}$, on est ramené à une étude unidimensionnelle le long de la normale à $\mathscr{S}$; par conséquent $I_1(\theta) \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0$.

Si $\theta /\!/ \mathscr{S}$

$$2t^{-1} \int_{y\in \mathbf{R}^d} \langle (y-x),\,\theta\rangle^2\, P_t^{\alpha,C,D}(x, y)\,dy \leqslant K_1,$$

d'où $I_1(\theta) \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0$. On a donc la partie "diffusion" du G.I.G. La proposition est alors démontrée.

Sachant que $X^{\alpha,\beta}(t)$ et $P_t^{\alpha,C,D}$ admettent même générateur infinitésimal généralisé il suffit, pour établir le fait que $X^{\alpha,\beta}$ est bien l'unique processus admettant les $P_t^{\alpha,C,D}$ comme probabilités de transition d'établir l'unicité de $X^{\alpha,\beta}$.

Nous allons ici établir cette unicité tout d'abord au sens d'Itô (unicité trajectorielle ou forte) puis au sens de l'unicité du problème de martingales (unicité faible). Via la propriété de Lindeberg et l'utilisation de cartes locales, on peut se ramener, comme pour la partie (B) de la démonstration du théorème 21 au cas où $\mathcal{S}$ est un hyperplan, et α, C et D sont des constantes.

22. Théorème. *Lorsque $\mathcal{S}$ est un hyperplan, et α, C, et D sont constants, le processus $X^{\alpha,\beta}$ dont le G.I.G. est $L^{\alpha,\beta}$ vérifie l'unicité trajectorielle ainsi que l'unicité en loi.*

Démonstration. La démonstration se fait en deux étapes:

(a) Unicité de la composante normale de $\mathcal{S}$.

(b) Unicité du processus dans $\boldsymbol{R}^d$.

On suppose que $\mathcal{S}$ est l'hyperplan orthogonal à e_1, premier vecteur de la base orthonormale.

(a) $X_1^{\alpha,\beta}$ vérifie l'équation différentielle stochastique:

$$dX_1^{\alpha,\beta}(t) = (\sqrt{2C}\,\mathbf{1}_{\boldsymbol{R}^-} + \sqrt{2D}\,\mathbf{1}_{\boldsymbol{R}^+})(X_1^{\alpha,\beta}(t))\,dB_1(t) + \frac{(\alpha-1)\sqrt{C}+\alpha\sqrt{D}}{(1-\alpha)\sqrt{C}+\alpha\sqrt{D}}\,dL_t^0(X_1^{\alpha,\beta}).$$

On pose

$$A = \frac{(\alpha-1)\sqrt{C}+\alpha\sqrt{D}}{(1-\alpha)\sqrt{C}+\alpha\sqrt{D}}.$$

On suppose dans un premier temps que $\alpha \neq 0$ ou 1. On considère la bijection

$$\varphi_\gamma(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0, \\ \gamma x & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases} \qquad (\gamma > 0).$$

Posant $\varphi_\gamma(X_1^{\alpha,\beta}(t)) = Y(t)$ et appliquant la formule de Tanaka, nous voyons qu'il existe un unique $\gamma = \gamma_0 = (1-A)/(1+A)$ de telle sorte que le drift disparaisse.

Pour ce γ_0, par le théorème de Nakao [15], on a unicité trajectorielle de $Y(t)$, par conséquent celle de $X_1^{\alpha,\beta}(t)$. Si $\alpha = 0$ ou 1, les théorèmes classiques relatifs aux réflexions totales assurent aussi l'unicité de $X_1^{\alpha,\beta}(t)$.

(b) Posant $X^{\alpha,\beta} = (X_1^{\alpha,\beta}, \tilde{X}^{\alpha,\beta})$, où $\tilde{X}^{\alpha,\beta} = (X_2^{\alpha,\beta}, \ldots, X_d^{\alpha,\beta})$ on a, pour $i \geqslant 2$,

$$dX_i^{\alpha,\beta}(t) = (\sqrt{2C}\,\mathbf{1}_{\boldsymbol{R}^-} + \sqrt{2D}\,\mathbf{1}_{\boldsymbol{R}^+})(X_1^{\alpha,\beta}(t))\,dB_i(t),$$

d'où l'unicité trajectorielle des $X_i^{\alpha,\beta}(t)$, conséquence de celle de $X_1^{\alpha,\beta}(t)$.

Posons $Z(t) = (Y(t), \tilde{X}^{\alpha,\beta}(t))$. Les coefficients de diffusion de $Z(t)$ sont mesurables et bornés; $Z(t)$ étant unique trajectoriellement, par le corollaire 8.1.6 de [19], on a unicité en loi de $Z(t)$.

Or l'application: $\psi_{\gamma_0}: (x_1, \tilde{x}) \to (\mathbf{1}_{R^-}(x_1) + \gamma_0 \mathbf{1}_{R^+}(x_1) x_1, \tilde{x})$ est bijective, par conséquent $X^{\alpha,\beta}(t)$ est unique en loi.

23. Remarque. Lorsque C et D sont des constantes, la construction donnant $X^{\alpha\beta}$ dévient plus explicite. Nous notons $\varrho = \sqrt{D/C}$.

On effectue une partition de l'espace des temps R_+ en $A = \{t \in R_+ : X_\omega(t) \in \mathscr{V} \cup \mathscr{S}\}$ et $B = \{t \in R_+ : X_\omega(t) \in \mathscr{W}\}$. Comme les trajectoires X^α sont $\mathbf{P}$-presque sûrement continues, on peut, pour $\mathbf{P}$-presque chaque trajectoire, écrire B comme une réunion disjointe d'intervalles ouverts:

$$B = \bigcup_{n \in N}]\gamma_n, \delta_n[\quad \text{avec } p \neq n \Rightarrow]\gamma_p, \delta_p[\cap]\gamma_n, \delta_n[= \emptyset.$$

Nous définissons alors une bijection χ_β $(= \chi_\beta(\omega))$ de R_+ sur R_+ par

$$\chi_\beta(t) = t + (\varrho^2 - 1) \sum_{n \in N} |(\delta_n \wedge t) - (\gamma_n \wedge t)|.$$

Nous avons alors $X^{\alpha\beta}(t) = X^\alpha(\chi_\beta(t))$.

Nous voyons que:

si $t \in B$, $\chi'(t)$ existe et $\chi'(t) = \varrho^2$;

si $t \in \operatorname{int}(A) \supset \{t \in R_+ : X^\alpha(t) \in \mathscr{V}\}$, $\chi'(t)$ existe et $\chi'(t) = 1$.

Utilisant le "Brownian scaling", nous pouvons donc déduire que

$$d_t X^{\alpha\beta}(t) = \varrho d_\tau X^\alpha \ (\tau = \chi_\beta(t)) \quad \text{si } t \in \chi_\beta^{-1}(B) (\Leftrightarrow X^{\alpha\beta}(t) \in \mathscr{W})$$

et

$$d_t X^{\alpha\beta}(t) = d_\tau X^\alpha \ (\tau = \chi_\beta(t)) \quad \text{si } t \in \chi_\beta^{-1}(\operatorname{int}(A)) (\Leftarrow \chi^{\alpha\beta}(t) \in \mathscr{V}).$$

De plus, comme dans le cas général $\{t \in \chi_\beta^{-1}(\partial A)\} \subset \{X^\alpha(t) \in \mathscr{S}\}$ est, pour $\mathbf{P}$-presque chaque trajectoire, un ensemble de mesure de Lebesgue nulle, car $\mathscr{S}$ est une surface de classe $\mathscr{C}^2$.

Les théorèmes 20, 21 et 22 conduisent directement à la:

24. Proposition. *Nous nous plaçons sous les hypothèses du théorème* 20: *$\mathscr{S}$ est l'hyperplan orthogonal à n, $\mathscr{S} = \{y_1, 0\}$, $\mathscr{V} = \{y_1 < 0\}$, $\mathscr{W} = \{y_1 > 0\}$; α, C et D sont des constantes.*

(a) *Si* $\alpha = \sqrt{C}/(\sqrt{C} + \sqrt{D})$, *le générateur infinitésimal généralisé* $L^{\alpha\beta}$ *est le générateur sans drift,* $L^{\alpha\beta} = L_0 = [C\mathbf{1}_{\mathscr{V}} + D\mathbf{1}_{\mathscr{W}}]\Delta$; $P_t^{\alpha,C,D}(x, y)$, $[C^{1/2}\mathbf{1}_{\mathscr{V}}(x) + D^{1/2}\mathbf{1}_{\mathscr{W}}(x)] \nabla_{\tilde{x}} P_t^{\alpha,C,D}(x, y)$, $\nabla_{x_1} P_t^{\alpha,C,D}(x, y)$ *et* $[C\mathbf{1}_{\mathscr{V}}(x) + D\mathbf{1}_{\mathscr{W}}(x)] \times \Delta_x P_t^{\alpha,C,D}(x, y)$ *se prolongent continûment — relativement à x — au voisinage de* $\mathscr{S}$.

(b) *Si* $\alpha = \sqrt{D}/(\sqrt{C} + \sqrt{D})$, *le générateur infinitésimal généralisé* $L^{\alpha\beta}$ *est le générateur auto-adjoint:* $L^{\alpha\beta} = L_{\mathrm{Ad}} = \nabla[(C\mathbf{1}_{\mathscr{V}} + D\mathbf{1}_{\mathscr{W}})\nabla]$; $P_t^{\alpha,C,D}(x, y)$, $[C^{1/2}\mathbf{1}_{\mathscr{V}} + D^{1/2}\mathbf{1}_{\mathscr{W}}] \nabla_{\tilde{x}} P_t^{\alpha,C,D}(x, y)$, $[C\mathbf{1}_{\mathscr{V}}(x) + D\mathbf{1}_{\mathscr{W}}(x)] \nabla_{x_1} P_t^{\alpha,C,D}(x, y)$ *et* $[C\mathbf{1}_{\mathscr{V}}(x) + D\mathbf{1}_{\mathscr{W}}(x)] \Delta_x P_t^{\alpha,C,D}(x, y)$ *se prolongent continûment au voisinage de* $\mathscr{S}$.

REFERENCES

[1] R. F. Bass et E. Pardoux, *Uniqueness for diffusions with piecewise constant coefficients*, preprint.

[2] M. Benabdallah, *Estimation de la probabilité de sortie*, Stage DEA et thèse, Université Paris VI.

[3] D. Dehen et M. Mastrangelo, *Equations de Kolmogorov sur un domaine variable*, Bull. Sc. Math., 2ème série, 109 (1985), p. 61–102.

[4] — *Equations de Dynkin–Kolmogorov et Feynman–Kolmogorov avec donnée-frontière non nulle sur un domaine variable* (à paraître).

[5] N. El Karoui, *Processus de réflexion dans* R^n, Séminaire de Probabilités IX, Strasbourg 1973–74, Lecture Notes in Math. 445, p. 534.

[6] A. Friedman, *Partial differential equations of parabolic type*, Prentice Hall Inc., 1964.

[7] B. Gaveau et T. Okada, *Second order differential operators and Dirichlet integrals with singular coefficients I: Functional calculus of one-dimensional operators* (to appear).

[8] J. M. Harrison and L. A. Shepp, *On skew Brownian motion*, Ann. Prob. 9 (1981), p. 309–313.

[9] — *A tandem storage system and its diffusion limit*, ibidem (to appear).

[10] N. Ikeda and S. Watanabe, *Stochastic differential equations and diffusion processes*, North-Holland, 1981.

[11] K. Itô and H. P. McKean, *Diffusion processes and their sample paths*, Springer-Verlag, Berlin 1965.

[12] N. V. Krylov, *Controlled diffusion processes*, Springer, 1980.

[13] Le Gall, Thèse, Université de Paris VI, 1982.

[14] G. Lumer, *Local operators, space-time methods and evolution equations of diffusion type*, Aspects of positivity in functional analysis, North-Holland Publ. (à paraître).

[15] S. Nakao, *On the pathwise uniqueness of solutions of one-dimensional stochastic differential equation*, Osaka J. Math. 9 (1972), p. 513–515.

[16] N. I. Portenko, *Diffusion processes with generalized coefficients*, Theory Probab. Appl. 24.1 (1979).

[17] — *Stochastic differential equations with generalized drift vector*, ibidem 24.2 (1979).

[18] T. S. Salisbury, *On the Itô excursion process*, Probab. Th. Rel. Fields (to appear).

[19] D. W. Stroock and S. R. S. Varadhan, *Multidimensional diffusion processes*, Springer, 1979.

[20] A. S. Sznitman and S. R. S. Varadhan, *A multidimensional process involving local time*, Probab. Th. Rel. Fields (to appear).

[21] J. B. Walsh, *A diffusion with a discontinuous local time*, Asterisque, Soc. Math. France 52–53 (1978), p. 37–45.

Received on 25. 11. 1987