PROBABILITY
AND
MATHEMATICAL STATISTICS
Vol. 11, Fasc. 2 (1991), pp. 193–222

MÉTHODES DE CHANGEMENT DE TEMPS POUR LA CONVERGENCE EN LOI DES MARTINGALES

BY

A. TOUATI (ORSAY)

Abstract. Let $M = (M(t);\ t \in T)$ be a centred, square integrable martingale, indexed by $T = N$ or $T = R_+$, whose predictible quadratic variation is denoted by $(\langle M\rangle(t);\ t \in T)$. The main problem we investigate is the study of the joint convergence in law, when $\lambda \to \infty$, of the processes

$$\left(\frac{1}{\sqrt{v(\lambda)}} M \circ \tau(\lambda t),\ \frac{1}{v(\lambda)} \langle M\rangle \circ \tau(\lambda t);\ t \geqslant 0\right),$$

where v and τ are two increasing functions. To solve this problem we use three technical tools (each of them having its one interest):

– a limit theorem for composed processes;

– a limit theorem for random change of time;

– a method of enlarging the probability space on which M is defined.

This approach looks to be efficient as far as the asymptotic behaviour of functionals of recurrent Markov or semi-Markov processes is concerned. Several examples illustrate the developed theory.

I. INTRODUCTION

Ce travail complète les résultats que nous avons obtenus dans [11] et [12]. Soit $(\Omega, \mathscr{F}, F, P)$ un espace de probabilité muni d'une filtration $F = (\mathscr{F}_t;\ t \in T)$, où $T = N$ (cas discret) ou bien $T = R_+$ (cas continu); on suppose que F est continue à droite et P-complète dans le cas continu. Sur cet espace on donne $M = (M(t);\ t \in T)$ une (F, P) martingale centrée, de carré intégrable pour tout t, dont on note $\langle M\rangle = (\langle M\rangle(t);\ t \in T)$ la variation quadratique prévisible. [M est supposée continue à droite et limitée à gauche (càd-làg) dans le cas continu.]

Le problème principal posé est l'étude de la convergence en loi conjointe de la famille de processus $(M_\lambda, \langle M_\lambda \rangle; \lambda > 0)$, où

$$M_\lambda(t) = \frac{1}{\sqrt{v(\lambda)}} M \circ \tau(\lambda t), \qquad \langle M_\lambda \rangle(t) = \frac{1}{\sqrt{v(\lambda)}} \langle M \rangle \circ \tau(\lambda t)$$

et v, τ sont deux fonctions croissantes vers $+\infty$, convenables.

Pour résoudre ce problème nous adoptons une démarche essentiellement basée sur les trois outils techniques suivants:

(1) Un résultat de convergence en loi pour des processus composés (cf. Théorème 1 et son corollaire): il s'agit de donner un cadre général pour que la famille $(U_\lambda \circ A_\lambda; \lambda > 0)$ converge en loi, lorsque $(U_\lambda; \lambda > 0)$ est une famille de processus réels càd-làg et $(A_\lambda; \lambda > 0)$ est une famille de processus càd-làg positifs.

(2) Un résultat de changement de temps (cf. Théorème 2): il s'agit de savoir quand la convergence en loi finie-dimensionnelle d'une famille de processus croissants positifs $(A_\lambda; \lambda > 0)$ vers un processus (croissant) A implique la convergence en loi finie-dimensionnelle de la suite de leurs inverses à droite vers celui de A.

(3) Une méthode de grossissement de l'espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ permettant d'identifier la loi limite des processus $(M_\lambda, \langle M \rangle; \lambda > 0)$ (cf. Théorème 4).

Outre l'obtention de la solution du problème posé, ces outils techniques ont un intérêt intrinsèque et leurs combinaisons nous permettront de dégager beaucoup d'applications intéressantes.

Le plan de l'article est le suivant: la fin de ce paragraphe est consacrée aux notations. Au paragraphe II, on démontre les résultats (1) et (2) et au paragraphe III on donne quelques exemples d'application. Au paragraphe IV on démontre le théorème principal, puis on l'applique à l'analyse du comportement asymptotique des temps d'occupation d'un processus semi-markovien récurrent.

Notations. On désignera par $\mathscr{D}^d = \mathscr{D}([0, +\infty[, \boldsymbol{R}^d)$ l'espace de Skorokhod des fonctions càd-làg de $\boldsymbol{R}_+$ dans $\boldsymbol{R}^d$, muni de sa topologie habituelle et $\mathscr{D} = \mathscr{D}^1$; $\mathscr{C}^d = \mathscr{C}(\boldsymbol{R}_+, \boldsymbol{R}^d)$ l'espace des fonctions continues de $\boldsymbol{R}_+$ dans $\boldsymbol{R}^d$, muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de $\boldsymbol{R}_+$ et $\mathscr{C} = \mathscr{C}^1$; $\mathscr{D}^+$ le sous-ensemble de $\mathscr{D}$ des fonctions croissantes nulles en 0, muni de la topologie induite.

Une famille de processus càd-làg $(U_\lambda; \lambda > 0)$ à valeurs dans $\boldsymbol{R}^d$ est *$\mathscr{C}^d$-tendue,* si elle est $\mathscr{D}^d$-tendue et ses valeurs d'adhérence sont des processus continus.

On utilisera les notations suivantes:

$U_\lambda \xrightarrow[\lambda \uparrow \infty]{\mathscr{L}_{\text{f.d.}}} U$ pour "les lois finies-dimensionnelles des processus (U_λ) convergent vers celles de U".

$U_\lambda \xrightarrow[\lambda\uparrow\infty]{\mathscr{L}\mathscr{X}} U$ pour "les variables aléatoires à valeurs dans $\mathscr{X}$ convergent en loi vers U".

$U_\lambda \xrightarrow[\lambda\uparrow\infty]{P} U$ (resp. $U_\lambda \xrightarrow[\lambda\uparrow\infty]{} U$ $\boldsymbol{P}$ p.s.) pour la convergence des variables aléatoires (U_λ) en probabilité (resp. presque-sûre) vers U sous la loi $\boldsymbol{P}$.

$\Delta U(s) = U(s) - U(s-)$ saut du processus càd-làg U en s.

$\mathit{1}_\Gamma$, indicateur d'une partie Γ.

$[u]$, partie entière du réel u.

Tous les processus à temps continu considérés dans la suite seront supposés càd-làg. Enfin l'abréviation P.A.I. (resp. v.a.) signifiera "processus à accroissements indépendants" (resp. "variable aléatoire").

II. THÉORÈMES LIMITES POUR DES OBSERVATIONS EN DES INSTANTS ALÉATOIRES

Dans ce paragraphe, on donne un théorème limite pour des suites d'observations en des instants aléatoires, un théorème de changement de temps et quelques exemples d'application.

On fixe une fois pour toutes un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \boldsymbol{P})$; tous les processus et les v.a. considérés dans la suite sont supposés définis sur cet espace.

II.1. Théorèmes de composition.

THÉORÈME 1. *Soit* $(U_\lambda;\ \lambda > 0)$ *une famille de processus réels et* $(A_\lambda;\ \lambda > 0)$ *une famille de processus réels positifs, vérifiant l'hypothèse suivante*:

(H) *Il existe un processus continu* U *et un processus positif* A *tels qu'on ait*

$$(U_\lambda, A_\lambda) \xrightarrow[\lambda\uparrow\infty]{\mathscr{L}_{\text{f.d.}}} (U, A) \quad \text{et} \quad U_\lambda \xrightarrow[\lambda\uparrow\infty]{\mathscr{L}\mathscr{D}} U.$$

Alors

$$U_\lambda \circ A_\lambda \xrightarrow[\lambda\uparrow\infty]{\mathscr{L}_{\text{f.d.}}} U \circ A.$$

Si en plus les processus (A_λ) *sont croissants et le processus* A *est continu, on a*

$$(U_\lambda, A_\lambda) \xrightarrow[\lambda\uparrow\infty]{\mathscr{L}\mathscr{D}\times\mathscr{D}^+} (U, A) \quad \text{et} \quad U_\lambda \circ A_\lambda \xrightarrow[\lambda\uparrow\infty]{\mathscr{L}\mathscr{D}} U \circ A.$$

COROLLAIRE. *Supposons que les processus* (U_λ) *et* (A_λ) *s'écrivent sous la forme*

$$U_\lambda = \frac{1}{b(\lambda)} U^*(\lambda\cdot), \qquad A_\lambda = \frac{1}{a(\lambda)} A^*(\lambda\cdot),$$

où a, b *sont des fonctions de* $\boldsymbol{R}_+$ *dans* $\boldsymbol{R}_+$ *croissantes vers* $+\infty$. *Alors sous l'hypothèse* (H) *on a*

$$\frac{1}{b\circ a(\lambda)} U^* \circ A^*(\lambda\cdot) \xrightarrow[\lambda\uparrow\infty]{\mathscr{L}_{\text{f.d.}}} U \circ A.$$

Si en plus le processus A^* est croissant et le processus A est continu, on a

$$\frac{1}{b\circ a(\lambda)} U^* \circ A^*(\lambda\cdot) \xrightarrow[\lambda\uparrow\infty]{\mathscr{L}\mathscr{D}} U \circ A.$$

Le corollaire est une conséquence immédiate du théorème, dont la preuve s'appuie sur les deux lemmes suivants:

LEMME 1. *Soit $(U_\lambda; \lambda > 0)$ une famille de processus réels et $T_\lambda = (T_\lambda^1, \ldots, T_\lambda^q; \lambda > 0)$ une famille de v.a. à valeurs dans $\boldsymbol{R}_+$ telles que*

$$(U_\lambda, T_\lambda) \xrightarrow[\lambda\uparrow\infty]{\mathscr{L}\mathscr{D}\times\boldsymbol{R}_+^q} (U, T).$$

Alors

$$\{U_\lambda(T_\lambda^j), T_\lambda^j; 1 \leqslant j \leqslant q\} \xrightarrow[\lambda\uparrow\infty]{\mathscr{L}\boldsymbol{R}^q\times\boldsymbol{R}_+^q} \{U(T^j), T^j; 1 \leqslant j \leqslant q\},$$

dès que pour tout $1 \leqslant j \leqslant q$, T^j n'est pas un instant de saut U.

Démonstration. Pour simplifier les écritures on suppose $q = 1$ (le raisonnement est le même lorsque $q > 1$). L'application

$$\{(\omega(t); t \geqslant 0), s\} \to \{\omega(s), s\}$$

est continue de $\mathscr{D}\times\boldsymbol{R}_+$ (muni de la topologie produit) dans $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}_+$ sauf éventuellement sur l'ensemble $\Gamma = \{(\omega, s); \Delta\omega(s) \neq 0\}$ qui n'est pas chargé par la loi de (U, T^1) par hypothèse; d'où le lemme. ∎

Le lemme suivant est essentiellement dû à [1], nous en rappelons la preuve pour la commodité du lecteur:

LEMME 2. *Soit $(U_\lambda; \lambda > 0)$ une famille de processus réels et $(A_\lambda; \lambda > 0)$ une famille de processus croissants. Supposons que*

$$(U_\lambda, A_\lambda) \xrightarrow[\lambda\uparrow\infty]{\mathscr{L}\mathscr{D}\times\mathscr{D}^+} (U, A)$$

pour des processus U, A continus. Alors

$$U_\lambda \circ A_\lambda \xrightarrow[\lambda\uparrow\infty]{\mathscr{L}\mathscr{D}} U \circ A.$$

En conséquence, si les processus (U_λ) et (A_λ) sont $\mathscr{C}$-tendus, il en va de même des processus $(U_\lambda \circ A_\lambda)$.

Démonstration. Notons pour $N > 0$ donné et $d = 1$ ou 2,

$$\mathscr{D}_N^d = \mathscr{D}([0, N], \boldsymbol{R}^d) \quad \text{et} \quad \mathscr{D}_N^+ = \mathscr{D}^+([0, N], \boldsymbol{R})$$

respectivement l'espace des fonctions càd-làg de $[0, N]$ dans $\boldsymbol{R}^d$ et l'ensemble des fonctions croissantes de $[0, N]$ dans $\boldsymbol{R}$, munis de la topologie de Skorokhod. Notons également $\mathscr{C}_N^1$ et $\mathscr{C}_N^+$ les sous-ensembles des fonctions continues de $\mathscr{D}_N^1$ et $\mathscr{D}_N^+$ respectivement, munis de la topologie de la convergence uniforme. Puisque le processus $U \circ A$ est continu, il suffit de démontrer que

$$U_\lambda \circ A_\lambda \xrightarrow[\lambda\uparrow\infty]{\mathscr{L}\mathscr{D}_N^1} U \circ A \qquad \text{pour tout } N > 0.$$

Supposons que $\mathscr{D}_N^1 \times \mathscr{D}_N^+$ soit muni de la topologie trace de celle de $\mathscr{D}_N^2$. Puisque l'application $(u, a) \to u \circ a$ est continue sur $\mathscr{C}_N^1 \times \mathscr{C}_N^+$ et par hypothèse

$$(U_\lambda, A_\lambda) \xrightarrow[\lambda \uparrow \infty]{\mathscr{L}_{\mathscr{D} \times \mathscr{D}^+}} (U, A)$$

on en déduit que

$$U_\lambda \circ A_\lambda \xrightarrow[\lambda \uparrow \infty]{\mathscr{L}_{\mathscr{D}_N^1}} U \circ A.$$

La deuxième assertion du lemme s'obtient par un argument de sous-suites (on peut aussi l'obtenir, en raisonnant directement sur les modules de continuité).

Démonstration du théorème 1. La première assertion du théorème résulte immédiatement du lemme 1. En effet, si $(t_1, \ldots, t_q) \in R_+^q$ et si $T_\lambda = (T_\lambda^j;\ 1 \leqslant j \leqslant q)$ avec $T_\lambda^j = A_\lambda(t_j)$, la famille de v.a. $(U_\lambda, T_\lambda;\ \lambda > 0)$ vérifie la condition du lemme 1 d'après l'hypothèse (H) et ce lemme s'applique car le processus U est continu. La deuxième assertion du théorème résulte du fait que si en plus les processus (A_λ) sont croissants et le processus A est continu, les processus (U_λ, A_λ) sont $\mathscr{D}^2$-tendus, l'hypothèse (H) implique

$$(U_\lambda, A_\lambda) \xrightarrow[\lambda \uparrow \infty]{\mathscr{L}_{\mathscr{D} \times \mathscr{D}^+}} (U, A).$$

Donc

$$U_\lambda \circ A_\lambda \xrightarrow[\lambda \uparrow \infty]{\mathscr{L}_{\mathscr{D}}} U \circ A,$$

d'après le lemme 2. ∎

II.2. Un théorème de changement de temps. Dans les applications des résultats précédents, les v.a. $(A_\lambda(t);\ \lambda > 0)$ ou bien les v.a. $(T_\lambda;\ \lambda > 0)$ sont souvent des valeurs de processus inverses à droite de processus donnés ou bien des temps d'arrêt, d'où l'utilité du résultat suivant énoncé sans démonstration dans [8]:

THÉORÈME 2. *Soit C un processus croissant et C^{-1} le processus inverse à droite de C ($C^{-1}(t) = \inf\{s;\ C(s) > t\}$). Supposons qu'il existe deux fonctions H, u de R_+ continues à droite, croissantes vers $+\infty$ et un processus croissant $\bar{C}$, tels que*

(a) $(H \circ C(\lambda \cdot))/u(\lambda) \xrightarrow[\lambda \uparrow \infty]{\mathscr{L}_{\text{f.d.}}} \bar{C}$;

(b) *le processus $\bar{C}$ est sans plat fixe (i.e. $\bar{C}^{-1}$ est sans discontinuité fixe) [resp. $\bar{C}$ est strictement croissant].*

Alors

$$\frac{C^{-1} \circ H^{-1}(\lambda \cdot)}{u^{-1}(\lambda)} \xrightarrow[\lambda \uparrow \infty]{\mathscr{L}_{\text{f.d.}}} \bar{C}^{-1} \quad \left[\textit{resp.}\ \frac{C^{-1} \circ H^{-1}(\lambda \cdot)}{u^{-1}(\lambda)} \xrightarrow[\lambda \uparrow \infty]{\mathscr{L}_{\mathscr{D}^+}} \bar{C}^{-1}\right],$$

où u^{-1}, H^{-1}, $\bar{C}^{-1}$ sont les inverses à droite de u, H, $\bar{C}$.

Démonstration. Afin de simplifier les écritures, nous la donnons uniquement pour les lois unidimensionnelles (le raisonnement est le même dans le cas général). Pour obtenir la première assertion du théorème, il suffit de montrer que pour tout $r > 0$:

$$\text{(1)} \qquad \frac{C^{-1} \circ H^{-1}(ru(\lambda))}{\lambda} \xrightarrow[\lambda \uparrow \infty]{\mathscr{L}_{\boldsymbol{R}^+}} \bar{C}^{-1}(r).$$

Supposons que le processus $\bar{C}$ soit défini sur un espace de probabilité auxiliaire $(\bar{\Omega}, \bar{\mathscr{F}}, \bar{P})$ et considérons $r > 0$ et t un point de continuite de la loi de $\bar{C}^{-1}(r)$ [i.e. $\bar{P}\{\bar{C}^{-1}(r) = t\} = 0$]. L'équivalence suivante valable pour toute fonction f de $\boldsymbol{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ positive, croissante, continue à droite et pour tous x, y dans $\boldsymbol{R}_+$:

$$\{f^{-1}(x) < y\} \Leftrightarrow \{x < f(y-)\}$$

nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} \{C^{-1} \circ H^{-1}(ru(\lambda)) < \lambda t\} &= \{H^{-1}(ru(\lambda)) < C(\lambda t-)\} \\ &= \{ru(\lambda) < H(C(\lambda t-)-)\} \\ &\subset \{ru(\lambda) < H \circ C(\lambda t)\}. \end{aligned}$$

Par conséquent:

$$\text{(2)} \qquad P\left\{\frac{H \circ C(\lambda t)}{u(\lambda)} \leqslant r\right\} \leqslant P\left\{\frac{C^{-1} \circ H^{-1}(ru(\lambda))}{\lambda} \geqslant t\right\}.$$

Par ailleurs on a

$$\begin{aligned} \{C^{-1} \circ H^{-1}(ru(\lambda)) > \lambda t\} &\subset \{C(\lambda t) \leqslant H^{-1}(ru(\lambda))\} \\ &\subset \{H \circ C(\lambda t) \leqslant H \circ H^{-1}(ru(\lambda))\}, \end{aligned}$$

d'où

$$\text{(3)} \qquad P\left\{\frac{ru(\lambda)}{H \circ H^{-1}(ru(\lambda))} \cdot \frac{H \circ C(\lambda t)}{u(\lambda)} \leqslant r\right\} \leqslant P\left\{\frac{C^{-1} \circ H^{-1}(ru(\lambda))}{\lambda} > t\right\}.$$

Vu le choix de t et l'absence de discontinuité fixe du processus $\bar{C}^{-1}$, on a

$$\text{(4)} \qquad \bar{P}(\bar{C}(t) = r) = 0,$$

car

$$\begin{aligned} &\{\bar{C}^{-1}(r) > t\} \Leftrightarrow \{\bar{C}^{-1}(r-) > t\} \Leftrightarrow \{\bar{C}(t) < r\}, \\ &\{\bar{C}^{-1}(r) < t\} \Leftrightarrow \{\bar{C}(t-) > r\}. \end{aligned}$$

D'après (a), (2), (4) et le choix de t, on a

$$\text{(5)} \qquad \varliminf_{\lambda} P\left\{\frac{C^{-1} \circ H^{-1}(ru(\lambda))}{\lambda} \geqslant t\right\} \geqslant \bar{P}\{\bar{C}(t) \leqslant r\} = \bar{P}\{\bar{C}^{-1}(r) \geqslant t\}.$$

Comme la fonction $H \circ H^{-1}$ est croissante et $H \circ H^{-1}(x) = x$ en tout point de continuité x de H, on a

$$\lim_{x \uparrow +\infty} \frac{H \circ H^{-1}(x)}{x} = 1,$$

et alors (3) implique

$$\text{(6)} \qquad \overline{\lim_{\lambda}}\, P\left\{\frac{C^{-1} \circ H^{-1}(ru(\lambda))}{\lambda} \geqslant t\right\} \leqslant \bar{P}\{\bar{C}(t) \leqslant r\} = \bar{P}\{\bar{C}^{-1}(r) \geqslant t\}.$$

Compte tenu de (5) et (6), on a (1) et la première assertion du théorème est établie. La deuxième assertion résulte de la première en remarquant en plus que si $\bar{C}$ est strictement croissant, $\bar{C}^{-1}$ est continu, donc

$$\frac{C^{-1} \circ H^{-1}(\lambda \cdot)}{u^{-1}(\lambda)} \xrightarrow[\lambda \uparrow \infty]{\mathscr{L}_{\text{f.d.}}} \bar{C}^{-1}$$

équivaut à dire

$$\frac{C^{-1} \circ H^{-1}(\lambda \cdot)}{u^{-1}(\lambda)} \xrightarrow[\lambda \uparrow \infty]{\mathscr{L}_{\mathscr{D}^+}} \bar{C}^{-1}. \blacksquare$$

Remarques. (i) L'introduction de la fonction H dans l'énoncé du théorème 3 n'est pas artificielle car $(H \circ C)^{-1}$ et $C^{-1} \circ H^{-1}$ ne sont pas, en général, identiques.

(ii) Le théorème 3 permet de voir que l'application $a \to a^{-1}$ est continue en restriction à l'ensemble des fonctions strictement croissantes de $\mathscr{D}^+$.

(iii) Si $(C_\lambda;\ \lambda > 0)$ est une famille de processus croissants tels que

$$C_\lambda \xrightarrow[\lambda \uparrow \infty]{\mathscr{L}_{\text{f.d.}}} C$$

et si C^{-1} est sans discontinuité fixe, on montre de même que

$$C_\lambda^{-1} \xrightarrow[\lambda \uparrow \infty]{\mathscr{L}_{\text{f.d.}}} C^{-1}.$$

III. APPLICATIONS

III.1. Une version asymptotique du théorème de Dubins–Schwartz–Dambis. Soit $M = (M(t);\ t \geqslant 0)$ une martingale continue telle que

$$M(0) = 0 \quad \text{et} \quad \langle M \rangle_\infty = \lim_t \uparrow \langle M \rangle_t = \infty.$$

Notons

$$\langle M \rangle^{-1}(t) = \inf\{s;\ \langle M \rangle(s) > t\}.$$

Il est bien connu que $B = (M \circ \langle M \rangle^{-1}(t);\ t \geqslant 0)$ est un mouvement brownien standard et que

$$M = (B \circ \langle M \rangle(t);\ t \geqslant 0).$$

On se propose de donner une version asymptotique de ce résultat dû à Dubins–Schwartz–Dambis. Plus précisément, soit $M = (M(t);\, t \in T)$ une martingale réelle sur $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, centrée de carré intégrable pour tout t et adaptée à la filtration $F = (\mathscr{F}_t;\, t \in T)$, où $T = N$ (cas discret) ou bien $T = R_+$ (cas continu) (F est supposée continue a droite et P-complète dans le cas continu). Posons

$$\langle M\rangle^{-1}(t) = \inf\{n \geqslant 0;\, \langle M\rangle(n+1) > t\} \quad \text{(cas discret)},$$

$$\langle M\rangle^{-1}(t) = \inf\{s\colon \langle M\rangle(s) > t\} \quad \text{(cas continu)}$$

et considérons les deux hypothèses suivantes:

(i) Il existe un processus croissant, continu, sans plat fixe A et une fonction v de R_+ dans R_+ continue, strictement croissante vers $+\infty$, tels que

$$A_\lambda \xrightarrow[\lambda\uparrow\infty]{\mathscr{L}_{\text{f.d.}}} A,$$

où

$$A_\lambda(t) = \frac{\langle M\rangle([\lambda t])}{v(\lambda)} \quad \text{(cas discret)},$$

$$A_\lambda(t) = \frac{\langle M\rangle(\lambda t)}{v(\lambda)} \quad \text{(cas continu)}.$$

(ii) Pour tous $\varepsilon > 0$, $t > 0$:

$$\Delta_\lambda^\varepsilon(t) \xrightarrow[\lambda\uparrow\infty]{P} 0,$$

où

$$\Delta_\lambda^\varepsilon(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{v(\lambda)} \displaystyle\sum_{k=1}^{[\lambda t]} E\{(\Delta M(k))^2 1_{\{|\Delta M(k)| > \varepsilon\sqrt{v(\lambda)}\}} | \mathscr{F}_{k-1}\} & \text{(cas discret)},\\ \dfrac{1}{v(\lambda)} \displaystyle\int_0^{\lambda t}\int_R x^2 1_{\{|x| > \varepsilon\sqrt{v(\lambda)}\}} \nu(ds, dx) & \text{(cas continu)} \end{cases}$$

[$\Delta M(k) = M(k) - M(k-1)$ (cas discret), ν mesure de Lévy des sauts de M].

Théorème 3. *Si les hypothèses* (i) *et* (ii) *sont vérifiées, alors*

(1) $B_\lambda \xrightarrow[\lambda\uparrow\infty]{\mathscr{L}\mathscr{D}} B$, *où* B *est un mouvement brownien réel standard et*

$$B_\lambda(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} M \circ \langle M\rangle^{-1}([\lambda t]) & \textit{(cas discret)},\\ \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} M \circ \langle M\rangle^{-1}(\lambda t) & \textit{(cas continu)}. \end{cases}$$

(2) *Posons*

$$U_\lambda(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{v(\lambda)}} M([\lambda t]) & \textit{(cas discret)},\\ \dfrac{1}{\sqrt{v(\lambda)}} M(\lambda t) & \textit{(cas continu)}; \end{cases}$$

alors les processus $(U_\lambda, A_\lambda;\ \lambda > 0)$ *sont* $\mathscr{C}^2$*-tendus et leurs valeurs d'adhérence sont des processus de la forme* (U, A), *où* U *est une martingale, telle que* $\langle U\rangle = A$.

Démonstration. (1) D'après le théorème d'arrêt B_λ est une martingale locale de carré intégrable, de variation quadratique prévisible:

$$\langle B_\lambda\rangle(t) = \begin{cases} \lambda^{-1}\langle M\rangle \circ \langle M\rangle^{-1}([\lambda t]) & \text{(cas discret)},\\ \lambda^{-1}\langle M\rangle \circ \langle M\rangle^{-1}(\lambda t) & \text{(cas continu)}. \end{cases}$$

Par conséquent, si on montre

$$\text{(1)} \qquad \langle B_\lambda\rangle(t) \xrightarrow[\lambda\uparrow\infty]{P} t \quad \text{pour tout } t > 0,$$

$$\text{(2)} \qquad \Gamma_\lambda^\varepsilon(t) = \int_0^t \int_{\mathbf{R}} x^2\, 1_{\{|x|>\varepsilon\}}\, \nu_\lambda(ds, dx) \xrightarrow[\lambda\uparrow\infty]{P} 0 \quad \text{pour tous } \varepsilon > 0,\ t > 0$$

(ν_λ mesure de Lévy des sauts de B_λ), on pourra affirmer (cf. [4]) que

$$B_\lambda \xrightarrow[\lambda\uparrow\infty]{\mathscr{L}\mathscr{D}} B,$$

où B est un mouvement brownien standard. Pour cela remarquons que l'hypothèse (i) équivaut à dire que

$$A_\lambda \xrightarrow[\lambda\uparrow\infty]{\mathscr{L}\mathscr{D}^+} A$$

car A est continu, par suite:

$$\text{(3)} \qquad \begin{aligned} &\frac{1}{v(\lambda)} \sup_{s\leq t} \Delta V([\lambda s]) \xrightarrow[\lambda\uparrow\infty]{P} 0 \quad \text{(cas discret)},\\ &\frac{1}{v(\lambda)} \sup_{s\leq t} \Delta V(\lambda s) \xrightarrow[\lambda\uparrow\infty]{P} 0 \quad \text{(cas continu)}, \end{aligned}$$

où $V = \langle M\rangle$.

Mais A est aussi sans plat fixe, donc d'après le théorème 3:

$$\text{(4)} \qquad \frac{\tau(\lambda\cdot)}{v^{-1}(\lambda)} \xrightarrow[\lambda\uparrow\infty]{\mathscr{L}_{\text{f.d.}}} A^{-1}, \quad \text{où } \tau = \langle M\rangle^{-1}.$$

Vu (3) et (4), le corollaire du théorème 1 nous permet d'affirmer que pour tout $t > 0$:

$$\text{(5)} \qquad \frac{1}{\lambda} \Delta\big(V \circ \tau(\lambda t)\big) \xrightarrow[\lambda\uparrow\infty]{P} 0.$$

Par ailleurs on a les inégalités évidentes suivantes:

$$\text{(6)} \qquad \begin{aligned} &V\circ\tau(t) < t \leq V\circ\tau(t) + \Delta V\big(\tau(t)+1\big) \quad \text{(cas discret)},\\ &t \leq V\circ\tau(t) < t + \Delta V\big(\tau(t)\big) \quad \text{(cas continu)}, \end{aligned}$$

donc compte tenu de (5) et (6), on a (1). Pour obtenir (2), on remarque que le changement de temps τ est adapté à la martingale M, c'est-à-dire M est constante sur les intervalles de constance de $\langle M\rangle$ (cf. [7]). Dans ce cas on peut affirmer (cf. [4]) que pour tout $t>0$:

$$\Gamma_\lambda^\varepsilon(t) = \Delta_{v^{-1}(\lambda)}^\varepsilon\left(\frac{\tau(\lambda t)}{v^{-1}(\lambda)}\right).$$

Grâce à (4), (7), l'hypothèse (ii) et le corollaire du théorème 1 on voit que (2) est vérifié.

(2) Le fait que M soit constante sur les intervalles de constance de $\langle M\rangle$, nous permet également d'affirmer que pour tout $t>0$:

(8) $$U_\lambda(t) = B_{v(\lambda)}(A_\lambda(t)).$$

Or l'hypothèse (i) implique, d'après le théorème de Rebolledo (cf. [4]) que les processus (U_λ, A_λ) sont $\mathscr{C}^2$-tendus. Donc d'après (8), le lemme 2 et la première partie de la démonstration, leurs valeurs d'adhérence sont de la forme $(U, A) = (B\circ A, A)$, ce qui achève la démonstration. ■

Dans le cas (fréquent) où B et A sont indépendants, la loi de $(B\circ A, A)$ est unique et

$$\frac{M(t)}{\sqrt{\langle M\rangle(t)}} \xrightarrow[t\uparrow\infty]{\mathscr{L}} \mathscr{N}(0, 1).$$

Mais les hypothèses (i) et (ii) ne suffisent pas, en général, ni pour établir l'unicité de la loi du couple (B, A), ni pour étudier la loi limite de $\left(M(t)/\sqrt{\langle M\rangle(t)}\right)$. C'est pourquoi dans le paragraphe suivant, on utilise une technique de grossisement de l'espace $(\Omega, \mathscr{F}, P)$. Cependant, lorsque dans (i) la convergence en loi est renforcée en une convergence en probabilité, les processus B et A sont indépendants (cf. [12]). Dans certains cas particuliers cette unicité peut être établie directement.

III.2. Loi asymptotique de $M(t)/\sqrt{\langle M\rangle(t)}$: deux exemples.

EXEMPLE 1. Supposons que

$$M(n) = \sum_{k=1}^{n-1} T_k(S_{k+1}-S_k),$$

où (T_k, S_k) est une marche aléatoire sur $\boldsymbol{R}^2$, vérifiant

$$T_0 = S_0 = 0, \quad E(T_1) = E(S_1) = 0, \quad E(T_1^2) = E(S_1^2) = 1, \quad E(T_1 S_1) = \varrho.$$

On a alors

$$A_\lambda(t) = \frac{1}{\lambda^2}\langle M\rangle([\lambda t]) = \int_0^t T_\lambda^2(s-)ds - \int_{[\lambda t]/\lambda}^t T_\lambda^2(s-)ds,$$

$$U_\lambda(t) = \frac{1}{\lambda}M([\lambda t]) = \int_0^t T_\lambda(s-)dS_\lambda(s)$$

avec

$$T_\lambda(s) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} T_{[\lambda s]}, \qquad S_\lambda(s) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} S_{[\lambda s]}.$$

Or

$$(T_\lambda, S_\lambda) \xrightarrow[\lambda \uparrow \infty]{\mathscr{L}\mathscr{D}^2} G,$$

où $G = (G_1, G_2)$ est un P.A.I. gaussien centré de matrice de variance-covariance

$$\begin{pmatrix} 1 & \varrho \\ \varrho & 1 \end{pmatrix},$$

on en déduit (cf. [13])

(9) $$(U_\lambda, A_\lambda) \xrightarrow[\lambda \uparrow \infty]{\mathscr{L}\mathscr{D} \times \mathscr{D}^+} (U, A),$$

où

$$A(t) = \int_0^t G_1^2(s)ds, \qquad U(t) = \int_0^t G_1(s)dG_2(s).$$

Il est facile de voir que l'hypothèse (ii) est vérifiée par U_λ. Le résultat (9) implique en particulier que

(10) $$\big(n^{-1}M(n), n^{-2}\langle M\rangle(n)\big) \xrightarrow[n \uparrow \infty]{\mathscr{L}\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}_+} \Big(\int_0^1 G_1(s)dG_2(s), \int_0^1 G_1^2(s)ds\Big),$$

par suite

$$\frac{M(n)}{\sqrt{\langle M\rangle(n)}} \xrightarrow[n \uparrow \infty]{\mathscr{L}\boldsymbol{R}} \frac{\int_0^1 G_1(s)dG_2(s)}{\sqrt{\int_0^1 G_1^2(s)ds}} = H_\varrho.$$

Si les marches (T_k) et (S_k) sont indépendantes, on a $\varrho = 0$, donc le processus G est un mouvement brownien plan standard. Dans ce cas U est une martingale par rapport à la filtration $(\mathscr{U}_t, t \geqslant 0)$, où

$$\mathscr{U}_t = \sigma\big(G_2(s); s \leqslant t\big) \vee \sigma\big(G_1(s); s \geqslant 0\big)$$

et on peut alors vérifier que H_0 suit la loi normale centrée réduite $\mathscr{N}(0, 1)$. Si les marches (T_k) et (S_k) sont identiques, on a $\varrho = 1$, donc $G_1 = G_2 = B$ est un mouvement brownien réel standard et alors

(11) $$H_1 = \frac{\int_0^1 B(s)dB(s)}{\sqrt{\int_0^1 B^2(s)ds}} = \frac{\frac{1}{2}(B^2(1)-1)}{\sqrt{\int_0^1 B^2(s)ds}}.$$

Nous n'avons pas pu déterminer la loi de H_1 qui est intéressante à connaître pour certaines applications statistiques (cf. [11]), mais il est clair qu'elle est distincte de $\mathcal{N}(0, 1)$ car

$$\Pr(H_1 \leqslant 0) = \Pr(B^2(1) \leqslant 1) > \tfrac{1}{2}.$$

Par conséquent, les hypothèses (i) et (ii) n'impliquent pas, en général, que

$$\frac{M(t)}{\sqrt{\langle M\rangle(t)}} \xrightarrow[t\uparrow\infty, t\in T]{\mathscr{L}_R} \mathcal{N}(0, 1).$$

Exemple 2. Supposons que

$$M(t) = \int_0^t f\circ B_1(s)dB_2(s),$$

où (B_1, B_2) est un mouvement brownien plan standard et f est une fonction satisfaisant les propriétés suivantes:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p dx < \infty \text{ pour } p = 1, 2 \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 0.$$

Posons

$$A_\lambda(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\langle M\rangle(\lambda t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^{\lambda t} f^2\circ B_1(s)ds,$$

$$U_\lambda(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{\lambda}}M(\lambda t).$$

On a alors

(12) $$A_\lambda \xrightarrow[\lambda\uparrow\infty]{\mathscr{L}\mathscr{C}} A = \|f\|_2^2 l_1,$$

où l_1 est le temps local de B_1 en 0 et

$$\|f\|_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)dx,$$

(13) $$\langle B_1, B_2\rangle(t) = 0, \quad \langle M, B_1\rangle(t) = 0, \quad \langle M, B_2\rangle(t) = \int_0^t f\circ B_1(s)ds,$$

d'où

$$\left\langle U_\lambda, \frac{B_2(\lambda\cdot)}{\sqrt{\lambda}}\right\rangle(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{\lambda}}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^{\lambda t} f\circ B_1(s)ds \xrightarrow[\lambda\uparrow\infty]{P} 0,$$

car $\int f(x)dx = 0$ (cf. [8]). Vu (12) et (13) on en déduit que

$$\left(U_\lambda(t), \frac{B_1(\lambda t)}{\sqrt{\lambda}}, \frac{B_2(\lambda t)}{\sqrt{\lambda}}; t \geqslant 0\right) \xrightarrow[\lambda\uparrow\infty]{\mathscr{L}\mathscr{C}^3} (U, B_1, B_2),$$

où (U, B_1, B_2) est une martingale continue vérifiant

$$\langle U, B_1\rangle = 0, \quad \langle U, B_2\rangle = 0, \quad \langle B_1, B_2\rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle U\rangle = A.$$

Donc d'après le théorème de Knight, il existe un mouvement brownien réel standard B_3, indépendant de (B_1, B_2) et tel que $(U, B_1, B_2) = (B_3 \circ A, B_1, B_2)$. Par suite:

$$\left(\frac{1}{\sqrt[4]{\lambda}}\int_0^{\lambda t} f \circ B_1(s)dB_2(s), \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^{\lambda t} f^2 \circ B_1(s)ds; t \geqslant 0\right) \xrightarrow[\lambda\uparrow\infty]{\mathscr{L}_{\mathscr{C}^2}} (\|f\|_2 B_3 \circ l_1, \|f\|_2^2 l_1)$$

et

$$\frac{M(t)}{\sqrt{\langle M\rangle(t)}} \xrightarrow[t\uparrow\infty]{\mathscr{L}_{\boldsymbol{R}}} \mathcal{N}(0, 1).$$

III.3. Lois limites de temps d'atteinte de niveau. Soit $Z = (Z(n); n \in \boldsymbol{N})$ un processus réel à temps discret, nul en 0. On suppose qu'il existe un processus U nul en 0 et une fonction v de $\boldsymbol{R}_+$ dans $\boldsymbol{R}_+$ continue et strictement croissante vers $+\infty$, tels que pour

$$U_\lambda = \left(\frac{Z([\lambda t])}{v(\lambda)}; t \geqslant 0\right)$$

on ait

$$U_\lambda \xrightarrow[\lambda\uparrow\infty]{\mathscr{L}_{\mathscr{D}}} U. \tag{14}$$

Posons

$$\bar{Z}(n) = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} Z(k), \qquad Z^*(n) = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |Z(k)|,$$

$$\bar{\tau}(t) = \inf\{n \geqslant 1; Z(n) > t\} = \inf\{n \geqslant 1; \bar{Z}(n) > t\},$$

$$\tau^*(t) = \inf\{n \geqslant 1; |Z(n)| > t\} = \inf\{n \geqslant 1; Z^*(n) > t\}.$$

On a

$$\bar{M}_\lambda(t) = \sup_{s \leqslant t} U_\lambda(s) = \frac{1}{v(\lambda)}\bar{Z}([\lambda t]),$$

$$M_\lambda^*(t) = \sup_{s \leqslant t} |U_\lambda(s)| = \frac{1}{v(\lambda)} Z^*([\lambda t]),$$

donc (14) implique

$$\bar{M}_\lambda \xrightarrow[\lambda\uparrow\infty]{\mathscr{L}_{\mathscr{D}^+}} \bar{M}, \qquad M_\lambda^* \xrightarrow[\lambda\uparrow\infty]{\mathscr{L}_{\mathscr{D}^+}} M^*,$$

où

$$\bar{M}(t) = \sup_{s \leqslant t} U(s), \qquad M^*(t) = \sup_{s \leqslant t} |U(s)|.$$

Par conséquent, si les processus $\bar{M}$ et M^* sont sans plat fixe, le théorème 3 implique

$$(15) \qquad \frac{\bar{\tau}(\lambda\cdot)}{v^{-1}(\lambda)} \xrightarrow[\lambda\uparrow\infty]{\mathscr{L}_{\mathrm{f.d.}}} \bar{M}^{-1}, \qquad \frac{\tau^*(\lambda\cdot)}{v^{-1}(\lambda)} \xrightarrow[\lambda\uparrow\infty]{\mathscr{L}_{\mathrm{f.d.}}} M^{*-1},$$

où $\bar{M}^{-1}$ et M^{*-1} sont les inverses à droite de $\bar{M}$ et M^*.

Supposons de plus que le processus U soit symétrique et continu et étudions les lois limites des processus arrêtés $(Z\circ\bar{\tau}(t))$ et $(Z\circ\tau^*(t))$.

D'après (14), le corollaire du théorème 1 et le théorème 3 on a

$$(16) \qquad \frac{1}{\lambda} Z\circ\bar{\tau}(\lambda\cdot) \xrightarrow[\lambda\uparrow\infty]{\mathscr{L}_{\boldsymbol{R}}} U\circ\bar{M}^{-1}, \qquad \frac{1}{\lambda} Z\circ\tau^*(\lambda\cdot) \xrightarrow[\lambda\uparrow\infty]{\mathscr{L}_{\boldsymbol{R}}} U\circ M^{*-1}.$$

Comme U est continu: $U\circ\bar{M}^{-1}(t) = t$, $|U\circ M^{*-1}(t)| = t$ et la symétrie de U implique la loi de $U\circ M^{*-1}(t)$ est identique à $\frac{1}{2}(\delta_t+\delta_{-t})$, où δ_a est la masse de Dirac en a. On en déduit

$$(17) \qquad \frac{1}{t} Z\circ\bar{\tau}(t) \xrightarrow[t\uparrow\infty]{P} 1, \qquad \frac{1}{t}|Z\circ\tau^*(t)| \xrightarrow[t\uparrow\infty]{P} 1.$$

Ces propriétés s'obtiennent également en remarquant que (14) et la continuité du processus U impliquent

$$\frac{1}{v(\lambda)} \max_{1\leqslant k\leqslant[\lambda t]} |\Delta Z(k)| \xrightarrow[\lambda\uparrow\infty]{P} 0,$$

donc par le corollaire du théorème 1

$$\frac{1}{t}\Delta Z(\bar{\tau}(t)) \xrightarrow[t\uparrow\infty]{P} 0, \qquad \frac{1}{t}\Delta Z(\tau^*(t)) \xrightarrow[t\uparrow\infty]{P} 0.$$

D'où (17) grâce aux inégalités évidentes suivantes:

$$t \leqslant Z\circ\bar{\tau}(t) < \Delta Z(\bar{\tau}(t)) + t, \qquad t \leqslant |Z\circ\tau^*(t)| < |\Delta Z(\tau^*(t))| + t.$$

Les résultats précédents s'appliquent lorsque Z est une marche aléatoire telle que $E\{Z(1)\} = 0$, $E\{Z^2(1)\} = \sigma^2 < \infty$, ou bien lorsque Z est une fonctionnelle additive martingale d'une chaîne de Markov récurrente positive de mesure invariante μ, vérifiant $E_\mu(Z^2(1)) = \sigma^2 < \infty$. Dans les deux cas (14) est vérifiée avec $v(\lambda) = \sigma\sqrt{\lambda}$ et U un mouvement brownien réel standard. Il va de soi que dans le cas markovien les résultats sont valables sous la loi P_μ et sous la loi P_x (cf. [8]).

Supposons que $Z = (Z(t);\, t \geqslant 0)$ soit une version canonique de la diffusion solution faible de l'équation différentielle stochastique:

$$dZ(t) = b\circ Z(t)dt + dB(t), \qquad Z(0) = z,$$

où $(B(t), t \geqslant 0)$ est un mouvement brownien standard. Si la fonction b vérifie la condition $b^2(x) \sim -Kx^2$ ($|x| \to \infty$), où $K > 0$ est une constante, on a alors les propriétés suivantes (cf. [10]):

Z est récurrent positif;

la fonction b est de carré intégrable par rapport à la probabilité invariante μ de Z:

$$\mu(dx) = C\exp\Big(2 \int_{-\infty}^{x} b(y)dy\Big)dx$$

($C > 0$ constante de normalisation);

$\int b(x)d\mu(x) = 0$;

il existe $g \in \mathscr{L}^2(\mu)$ tel que $b = \hat{A}g$, où $\hat{A}$ est le générateur fort sur $\mathscr{L}^2(\mu)$ de Z.

Dans ces conditions on a (cf. [10])

$$U_\lambda \xrightarrow[\lambda\uparrow\infty]{\mathscr{L}\mathscr{C}} U, \quad \text{où } U_\lambda(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda(1+\sigma_b^2)}} Z(\lambda t), \tag{18}$$

$\sigma_b^2 = -2\int bg d\mu$, U est un mouvement brownien réel standard.

Posons

$$\tau(t) = \inf\{s;\, Z(s) \geqslant t\}, \qquad \tau^*(t) = \inf\{s;\, |Z(s)| \geqslant t\}.$$

Le même schéma de raisonnement, nous permet d'affirmer que

$$\frac{\tau(\lambda\cdot)}{\lambda^2} \xrightarrow[\lambda\uparrow\infty]{\mathscr{L}_{\mathscr{D}^+}} (1+\sigma_b^2)^{-1} M^{-1}, \qquad \frac{\tau^*(\lambda\cdot)}{\lambda^2} \xrightarrow[\lambda\uparrow\infty]{\mathscr{L}_{\mathscr{D}^+}} (1+\sigma_b^2)^{-1} M^{*-1},$$

où $\bar{M}^{-1}$ et M^{*-1} sont les processus inverses à droite de

$$\bar{M}(t) = \sup_{s \leqslant t} U(s) \qquad \text{et} \qquad M^*(t) = \sup_{s \leqslant t} |U(s)|$$

respectivement.

III.4. Généralisation du théorème de renouvellement. Soit $(Z(n);\, n \in N)$ une suite de v.a. réelles vérifiant les hypothèses suivantes:

Il existe deux nombres $m > 0$ et $\sigma > 0$ et un processus continu U tel que

$$\frac{Z(n)}{n} \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} m \ P \text{ p.s.},$$

$$U_\lambda \xrightarrow[\lambda\uparrow\infty]{\mathscr{L}_{\mathscr{D}}} U, \quad \text{où } U_\lambda(t) = \frac{Z([\lambda t]) - m[\lambda t]}{\sigma\sqrt{\lambda}}.$$

Posons pour $t > 0$ et $0 \leqslant \alpha < 1$:

$$\tau_\alpha(t) = \inf\{n \geqslant 1;\, Z(n) > tn^\alpha\}.$$

Il est clair que $\tau_\alpha(t)\uparrow\infty$ P p.s., par conséquent

$$\frac{Z\circ\tau_\alpha(t)}{\tau_\alpha(t)}\xrightarrow[t\uparrow\infty]{} m \quad P \text{ p.s.} \tag{19}$$

Compte tenu de (19), des inégalités évidentes suivantes:

$$t(\tau_\alpha(t))^\alpha < Z\circ\tau_\alpha(t) \leqslant \Delta Z(\tau_\alpha(t))+t(\tau_\alpha(t))^\alpha \tag{20}$$

et du fait que

$$\frac{Z([\lambda t])}{\lambda}\xrightarrow[\lambda\uparrow\infty]{} mt \quad P \text{ p.s.},$$

on a

$$A_\lambda \xrightarrow[\lambda\uparrow\infty]{} A \quad P \text{ p.s.},$$

où

$$A_\lambda(t)=\frac{\tau_\alpha(\lambda t)}{a(\lambda)},\quad a(\lambda)=\left(\frac{\lambda}{m}\right)^{1/(1-\alpha)}\quad \text{et}\quad A(t)=t^{1/(1-\alpha)}.$$

En appliquant le corollaire du théorème 1 au couple $(U_{a(\lambda)}, A_\lambda)$ on en déduit

$$U_{a(\lambda)}\circ A_\lambda \xrightarrow[\lambda\uparrow\infty]{\mathscr{L}\mathscr{D}} U\circ A,\quad \text{où } U_{a(\lambda)}\circ A_\lambda(t)=\frac{1}{\sigma\sqrt{\lambda}}\big(Z\circ\tau_\alpha(\lambda t)-m\tau_\alpha(\lambda t)\big). \tag{21}$$

En utilisant (20), (21) et la continuité du processus U, on obtient

$$\left\{\frac{m(1-\alpha)}{\sigma\sqrt{a(\lambda)}}\big(\tau_\alpha(\lambda t)-a(\lambda t)\big);\ t\geqslant 0\right\}\xrightarrow[\lambda\uparrow\infty]{\mathscr{L}\mathscr{D}}\{U\circ A(t);\ t\geqslant 0\}.$$

Les résultats précédents s'appliquent par exemple lorsque $(Z(n))$ est une marche aléatoire sur $\boldsymbol{R}$ telle que $E\{Z(1)\}=m>0$ et $E\{Z^2(1)\}=m^2+\sigma^2$ ou bien lorsque $(Z(n))$ est de la forme

$$Z(n)=\sum_0^n f\circ X_k,$$

où $X=(X_k;\ k\in N)$ est une chaîne de Markov géométriquement récurrente et f est une fonction réelle telle que

$$m=\int f d\mu>0,\quad \int f^2 d\mu<\infty,\quad \sigma^2=2\int fg d\mu-\int f^2 d\mu>0$$

en notant μ la probabilité invariante de X et g une solution de l'équation de Poisson: $(I-\pi)g=f-\mu(f)$, π étant la transition de X. Dans ces deux cas U est un mouvement brownien réel standard.

IV. UN RÉSULTAT GÉNÉRAL APPLICATION AUX CHAÎNES SEMI-MARKOVIENNES

IV.1. On se place dans le cadre du paragraphe I: $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ est un espace de probabilité muni d'une filtration $F=(\mathscr{F}_t;\ t\in T)$, où $T=N$ ou bien

$T = R_+$ (F est supposée continue à droite et P-complète dans le cas continu). Sur cet espace on donne une (F, P) martingale centrée de carré intégrable pour tout t, $M = (M(t);\, t \in T)$, dont on note $\langle M \rangle = (\langle M \rangle(t);\, t \in T)$ la variation quadratique prévisible. Notre but est d'étudier la convergence en loi conjointe de la famille de semimartingales $(M_\lambda, \langle M_\lambda \rangle;\, \lambda > 0)$, où

$$M_\lambda(t) = \frac{1}{\sqrt{v(\lambda)}} = M \circ \tau(\lambda t), \qquad \langle M_\lambda \rangle(t) = \frac{1}{v(\lambda)} \langle M \rangle \circ \tau(\lambda t),$$

v, τ étant deux fonctions convenables de R_+ dans R_+ croissantes vers $+\infty$.

Supposons que l'on puisse construire un espace de probabilité filtré $(\Omega^*, \mathscr{F}^*, F^*, P^*)$ et deux familles de v.a. $(M^*(t);\, t \in T)$ et $(T^*(n);\, n \in N^*)$ vérifiant les hypothèses suivantes:

(K-1) $M^* = (M^*(t);\, t \in T)$ est une (F^*, P^*) martingale centrée de carré intégrable pour tout t.

(K-2) $(T^*(n);\, n \in N^*)$ est une suite de F^*-temps d'arrêt, telle que $T^*(n) \uparrow \infty$ P^* p.s.

(K-3) $(\langle M^* \rangle \circ T^*(n))/n \xrightarrow[n \uparrow \infty]{} \sigma^2$ P^* p.s.

(K-4) Il existe deux fonctions u, L de R_+ dans R_+, continues strictement croissantes vers $+\infty$, un mouvement brownien réel standard B et un processus croissant, nul en 0, sans plat fixe A, tels qu'en posant

$$B_\lambda(t) = \frac{M^* \circ T^*([\lambda t])}{\sqrt{\lambda}}, \qquad A_\lambda(t) = \frac{L \circ T^*([\lambda t])}{u(\lambda)},$$

on ait

$$(B_\lambda, A_\lambda) \xrightarrow[\lambda \uparrow \infty]{\mathscr{L}_{\text{f.d.}}} (B, A) \qquad \text{et} \qquad B_\lambda \xrightarrow[\lambda \uparrow \infty]{\mathscr{L}_{\mathscr{D}}} B.$$

(K-5) La loi du couple $(M^*, \langle M^* \rangle)$ sous P^* est celle de $(M, \langle M \rangle)$ sous P.

Dans ces conditions on a le

THÉORÈME 4. *Soit* $(\Omega, \mathscr{F}, F, P)$ *un espace de probabilité filtré et* $M = (M(t);\, t \in T)$ *une* (F, P) *martingale centrée de carré intégrable pour tout t, dont on note* $\langle M \rangle = (\langle M \rangle(t);\, t \in T)$ *la variation quadratique prévisible. Supposons que l'on puisse construire un espace de probabilité filtré* $(\Omega^*, \mathscr{F}^*, F^*, P^*)$ *et deux familles de v.a.* $(M^*(t);\, t \in T)$ *et* $(T^*(n);\, n \in N^*)$ *sur cet espace, satisfaisant les hypothèses* (K-1), ..., (K-5). *Alors posant*

$$v(\lambda) = u^{-1}(\lambda),$$

$$\tau(\lambda) = \begin{cases} [L^{-1}(\lambda)] & (\textit{cas discret}), \\ L^{-1}(\lambda) & (\textit{cas continu}), \end{cases}$$

$$M_\lambda(t) = \frac{1}{\sqrt{v(\lambda)}} M \circ \tau(\lambda t), \qquad \langle M_\lambda \rangle(t) = \frac{1}{v(\lambda)} \langle M \rangle \circ \tau(\lambda t)$$

on a

$$(M_\lambda, \langle M_\lambda\rangle) \xrightarrow[\lambda\uparrow\infty]{\mathscr{L}_{\text{f.d.}}} (\sigma B\circ A^{-1}, \sigma^2 A^{-1}).$$

En outre, si A^{-1} est continu,

$$(M_\lambda, \langle M_\lambda\rangle) \xrightarrow[\lambda\uparrow\infty]{\mathscr{L}_{\mathscr{D}\times\mathscr{D}^+}} (\sigma B\circ A^{-1}, \sigma^2 A^{-1}).$$

Démonstration. Posons $N^*(t) = \inf\{n \geqslant 0;\ T^*_{n+1} > t\}$; d'après les hypothèses (K-2), (K-3) on peut affirmer que

$$\text{(1)}\qquad N^*(t)\underset{t\uparrow\infty}{\uparrow}\infty \quad P^* \text{ p.s.};\qquad \frac{\langle M^*\rangle\circ T^*(N^*(t))}{N^*(t)} \xrightarrow[t\uparrow\infty]{} \sigma^2 \quad P^* \text{ p.s.}$$

et

$$\frac{\langle M^*\rangle\circ T^*(N^*(t)+1)}{N^*(t)} \xrightarrow[t\uparrow\infty]{} \sigma^2 \quad P^* \text{ p.s.}$$

Comme $T^*(N^*(t)) \leqslant t < T^*(N^*(t)+1)$, (1) implique

$$\text{(2)}\qquad \begin{cases} \dfrac{\langle M^*\rangle([t])}{N^*(t)} \xrightarrow[t\uparrow\infty]{} \sigma^2 & \text{(cas discret),} \\[2ex] \dfrac{\langle M^*\rangle(t)}{N^*(t)} \xrightarrow[t\uparrow\infty]{} \sigma^2 & \text{(cas continu) } P^* \text{ p.s.} \end{cases}$$

Compte tenu de (2), (K-4) et du théorème 2, on a

$$\text{(3)}\qquad \frac{N^*\circ L^{-1}(\lambda\cdot)}{v(\lambda)} \xrightarrow[\lambda\uparrow\infty]{\mathscr{L}_{\text{f.d.}}} A^{-1}, \qquad \langle M^*_\lambda\rangle \xrightarrow[\lambda\uparrow\infty]{\mathscr{L}_{\text{f.d.}}} \sigma^2 A^{-1}$$

en posant

$$\langle M^*_\lambda\rangle(t) = \frac{1}{v(\lambda)}\langle M^*\rangle\circ\tau(\lambda t).$$

En utilisant (K-3), (K-4), (3) et le théorème 2, on voit que

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}M^*\circ T^*([\lambda t]), \frac{1}{\lambda}\langle M^*\rangle\circ T^*([\lambda t]), \frac{N^*\circ L^{-1}(\lambda t)}{v(\lambda)};\ t\geqslant 0\right\}$$
$$\xrightarrow[\lambda\uparrow\infty]{\mathscr{L}_{\text{f.d.}}} \{B(t), \sigma^2 t, A^{-1}(t);\ t \geqslant 0\}.$$

On en déduit par application du corollaire du théorème 1:

$$\text{(4)}\qquad \left\{\frac{1}{\sqrt{v(\lambda)}}M^*\circ T^*(N^*\circ L^{-1}(\lambda t)), \frac{1}{v(\lambda)}\langle M^*\rangle\circ T^*(N^*\circ L^{-1}(\lambda t));\ t\geqslant 0\right\}$$
$$\xrightarrow[\lambda\uparrow\infty]{\mathscr{L}_{\text{f.d.}}} \{B(\sigma^2 A^{-1}(t)), \sigma^2 A^{-1}(t);\ t\geqslant 0\}.$$

Vu (1), (2), (4), on a

$$(5)\quad \left\{\frac{1}{\sqrt{v(\lambda)}}M^*\circ T^*(N^*\circ L^{-1}(\lambda t)),\ \langle M_\lambda^*\rangle(t);\ t\geqslant 0\right\} \xrightarrow[\lambda\uparrow\infty]{\mathscr{L}_{\text{f.d.}}} \{\sigma B\circ A^{-1}(t),\ \sigma^2 A^{-1}(t);\ t\geqslant 0\}.$$

Appliquons maintenant l'inégalité de Lenglart (cf. [4]): pour tout $0<\varepsilon\leqslant 1$, on a

$$(6)\quad P^*\left\{\max_{\substack{T^*(N^*\circ L^{-1}(\lambda t))\leqslant p\\ \leqslant T^*(N^*\circ L^{-1}(\lambda t)+1)}} \frac{1}{\sqrt{v(\lambda)}}|M^*(p)-M^*\circ T^*(N^*\circ L^{-1}(\lambda t))|\geqslant\varepsilon\right\}$$

$$\leqslant \varepsilon+P^*\left\{\frac{1}{v(\lambda)}\left[\langle M^*\rangle\circ T^*(N^*\circ L^{-1}(\lambda t)+1)-\langle M^*\rangle\circ T^*(N^*\circ L^{-1}(\lambda t))\right]\geqslant\varepsilon^3\right\},$$

donc compte tenu de (1) et (3), le second terme du membre de droite de (6) tend vers 0, lorsque $\lambda\to\infty$. Par suite, posant

$$M_\lambda^*=\left(\frac{1}{\sqrt{v(\lambda)}}M^*\circ\tau(\lambda t);\ t\geqslant 0\right),$$

on a

$$(7)\quad \left|M_\lambda^*(t)-\frac{1}{\sqrt{v(\lambda)}}M^*\circ T^*(N^*\circ L^{-1}(\lambda t))\right| \xrightarrow[\lambda\uparrow\infty]{P^*} 0.$$

Vu (5), (7) et l'hypothèse (K - 5), la première assertion du théorème est établie. La seconde résulte de la première et du théorème de Rebolledo (cf. [4]), car si le processus A^{-1} est continu, la famille $(M_\lambda^*, \langle M_\lambda^*\rangle)$ est $\mathscr{D}\times\mathscr{D}^+$ tendue sous P^* et donc $(M_\lambda, \langle M_\lambda\rangle)$ est $\mathscr{D}\times\mathscr{D}^+$ tendue sous P par l'hypothèse (K - 5). ∎

L'introduction de l'espace $(\Omega^*, \mathscr{F}^*, F^*, P^*)$ est évidemment nécessaire pour la construction de la suite $(T^*(n))$. Nous renvoyons le lecteur à [8], [9] où cette méthode a été utilisée pour l'étude du comportement asymptotique de certaines fonctionnelles additives d'un processus de Markov (à temps discret ou continu) récurrent au sens de Harris. L'exemple suivant montre que la construction de la suite $(T^*(n))$ peut se faire "sans grossissement" dans un cadre légèrement plus général que celui du théorème 4.

IV.2. Comportement asymptotique des temps d'occupation d'un processus semi-markovien. Soit $(E, \mathscr{E})$ un espace mesurable et Q une probabilité de transition de $(E, \mathscr{E})$ dans $(E\times\boldsymbol{R}_+, \mathscr{E}\otimes\mathscr{B}_{\boldsymbol{R}_+})$ ($\mathscr{B}_{\boldsymbol{R}_+}$ tribu borélienne de $\boldsymbol{R}_+=[0, +\infty[$). Posons

$$(\Omega, \mathscr{F})=(E\times\boldsymbol{R}_+, \mathscr{E}\otimes\mathscr{B}_{\boldsymbol{R}_+})^{\otimes\boldsymbol{N}}$$

et désignons par $((X_n, \tau_n); n \in N)$ les applications coordonnées de Ω. Pour tout $x \in E$, on peut construire une probabilité P_x sur $(\Omega, \mathscr{F})$ telle que

$$P_x(X_0 = x, \tau_0 = 0) = 1,$$

$$P_x(X_{n+1} \in dy, \tau_{n+1} \in dt \mid \mathscr{F}_n) = Q(X_n, dy \times dt),$$

où $F = (\mathscr{F}_n; n \in N)$ est la filtration naturelle de la suite (X_n, τ_n).

$\{\Omega, \mathscr{F}, F, (P_x; x \in E), ((X_n, \tau_n); n \in N)\}$ est une chaîne semi-markovienne canonique de probabilité de transition Q. On lui associe le processus semi-markovien:

$$Y = \{\Omega, \mathscr{F}, (P_x; x \in E); (Y(t); 0 \leqslant t < T_\infty)\},$$

où

$$Y(t) = \sum_{n \geqslant 0} X_n 1_{\{T_n \leqslant t < T_{n+1}\}}, \qquad T_n = \tau_0 + \ldots + \tau_n, \qquad T_\infty = \sup T_n.$$

Il est clair que $X = \{\Omega, \mathscr{F}, F, (P_x; x \in E) (X_n; n \in N)\}$ est une chaîne de Markov homogène de probabilité de transition

$$\pi(x, dy) = Q(x; dy, R_+), \qquad x \in E.$$

Dans ce qui suit on s'intéresse au comportement asymptotique des v.a. $(\int_0^t f \circ Y(s) ds; t \geqslant 0)$ pour une fonction f convenable. Pour cela on suppose désormais que les hypothèses suivantes soient vérifiées:

(j) La chaîne X admet un état récurrent a, tel que pour tout $x \in E$:

$$P_x(\overline{\lim_n} \{X_n = a\}) = 1.$$

De plus, posant

$$S = S_a = \inf\{n > 0; X_n = a\}, \qquad T^* = T_S = \inf\{t > T_1; Y_t = a\}$$

et

$$\Gamma(1-\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-\alpha} dt,$$

on a

(R.P) $$E_a(T^*) < \infty$$

ou bien

(R.N.) $$P_a(T^* > r) \sim \frac{C^\alpha}{r^\alpha \Gamma(1-\alpha)} \qquad (r \to \infty),$$

où $C > 0$ est une constante et $0 < \alpha < 1$.

(jj) La fonction

$$x \to m_1(x) = \int_0^\infty t \int_E Q(x, dy \times dt)$$

est finie pour tout $x \in E$.

On notera μ la mesure invariante de la chaîne X (définie à une constante positive près) par

$$\Gamma \to \mu(\Gamma) = E_a\{\sum_0^{S-1} 1_\Gamma \circ X_k\}$$

et ξ la mesure définie par

$$d\xi(x) = m_1(x) d\mu(x).$$

(A) Montrons d'abord que l'hypothèse (j) implique

$$(8) \qquad P_x(T_\infty = \infty) = 1 \quad \text{pour tout } x \in E.$$

En effet, pour tout $h \geqslant 0$, le processus

$$N_n = \sum_1^n 1_{\{\tau_k \geqslant h\}} - \sum_1^n G(X_{k-1}, h), \qquad G(x, h) = \int_E \int_h^\infty Q(x, dy \times dt)$$

est une (F, P_x) martingale et notant $(S_n; n \geqslant 1)$ $(S_1 = S)$, la suite des itérés de S, on a

$$\sum_1^{S_k} G(X_{k-1}, h) \geqslant (k-1) G(a, h),$$

comme $S_k \uparrow \infty$, P_x p.s., on en déduit

$$\sum_{k=1}^\infty 1_{\{\tau_k \geqslant h\}} = \sum_1^\infty G(X_{k-1}, h) = \infty, \; P_x \text{ p.s.},$$

d'où (8).

(B) Par ailleurs soit f une fonction telle que

$$\int m_1 |f| d\mu = \int |f| d\xi < \infty.$$

Alors posant $T_n^* = T_{S_n}$ pour $n \geqslant 1$ $(T_1^* = T^*)$, on voit que le processus

$$\left(\int_0^{T_n^*} f \circ Y(s) ds - \int_0^{T^*} f \circ Y(s) ds;\; T_n^* - T^*;\; n \geqslant 2\right)$$

est une marche aléatoire sous P_x pour tout $x \in E$, associée à la loi de $\left(\int_0^{T^*} f \circ Y(s) ds, T^*\right)$ sous P_a. De plus, le processus

$$\int_0^{T_n} f \circ Y(s) ds - \sum_{k=0}^{n-1} (m_1 f) \circ X_k = \sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) \tau_{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} (m_1 f) \circ X_k$$

est une (F, P_x) martingale pour μ-presque tout x. Par suite:

$$E_a\{\int_0^{T^*} f\circ Y(s)ds\} = E_a\{\sum_0^{S-1}(m_1 f)(X_k)\} = \int m_1 f d\mu = \int f d\xi = \xi(f).$$

Donc d'après la loi forte de grands nombres:

$$\frac{1}{n}\int_0^{T_n^*} f\circ Y(s)ds \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} \xi(f)\ P_x \text{ p.s.} \tag{9}$$

Posons $N^*(t) = \inf\{n \geqslant 0;\ T_{n+1}^* > t\}$, on a $T_{N^*(t)}^* \leqslant t < T_{N^*(t)+1}^*$, par suite (9) implique

$$\left(\frac{1}{N^*(t)}\int_0^{T_{N^*(t)}^*} f\circ Y(s)ds,\ \frac{1}{N^*(t)}\int_0^{T_{N^*(t)+1}^*} f\circ Y(s)ds\right)\xrightarrow[t\uparrow\infty]{}(\xi(f), \xi(f))\ P_x \text{ p.s.},$$

d'où (en considérant d'abord le cas où f est positive):

$$\frac{1}{N^*(t)}\int_0^t f\circ Y(s)ds \xrightarrow[t\uparrow\infty]{} \xi(f)\ P_x \text{ p.s.} \quad \text{pour tout } x. \tag{10}$$

Or l'hypothèse (j) implique

$$\left(\frac{T_{[\lambda t]}^*}{u(\lambda)};\ t \geqslant 0\right)\xrightarrow[\lambda\uparrow\infty]{\mathscr{L}_{\mathscr{D}^+}}(A_\alpha(t);\ t \geqslant 0) \text{ sous } P_x \quad \text{pour tout } x, \tag{11}$$

où $u(\lambda) = C\lambda^{1/\alpha}$, A_α est le P.A.I. stable croissant d'indice α, $0 < \alpha < 1$, lorsque (R.N) est vraie, c'est-à-dire

$$P_a(T^* > r) \sim \frac{C^\alpha}{r^\alpha \Gamma(1-\alpha)} \quad (r \to \infty).$$

Tandis que

$$\frac{T_{[\lambda t]}^*}{\lambda}\xrightarrow[\lambda\uparrow\infty]{} tE_a(T^*)\ P_x \text{ p.s.} \quad \text{pour tout } x, \tag{12}$$

lorsque (R.P) est vraie, c'est-à-dire $E_a(T^*) = \mu(m_1) = \xi(E) < \infty$.

Compte tenu de (10)–(12), et du théorème 2, pour tout x, on a

$$\frac{1}{t}\int_0^t f\circ Y(s)\,ds \xrightarrow[\lambda\uparrow\infty]{} \frac{\xi(f)}{\xi(E)}\ P_x \text{ p.s. sous (R.P)} \tag{13}$$

ou bien

$$\left(\frac{1}{v_\alpha(\lambda)}\int_0^{\lambda t} f\circ Y(s)ds;\ t \geqslant 0\right)\xrightarrow[\lambda\uparrow\infty]{\mathscr{L}_{\mathscr{C}}}(\xi(f)\cdot A_\alpha^{-1}(t);\ t \geqslant 0) \text{ sous } P_x$$

avec $v_\alpha(\lambda) = (\lambda/C)^\alpha$, lorsque (R.N) est vraie.

(C) Etudions maintenant le cas où $\xi(f) = 0$. Pour cela notons

$$\mathscr{C} = \{h \in \mathscr{L}^1(\mu);\ h \text{ bornée, } \mu(h) = 0 \text{ et il existe } g \text{ bornée telle que } h = (I-\pi)g \text{ partout sur } E\},$$

$$\hat{\mathscr{C}} = \{h \in \mathscr{L}^1(\mu) \cap \mathscr{L}^2(\mu);\ \mu(h) = 0 \text{ et il existe } g \in \mathscr{L}^2(\mu) \text{ telle que } h = (I-\pi)g\ \mu \text{ p.s.}\}$$

et introduisons les hypothèses supplémentaires suivantes:

(jjj) La fonction $m_1 f$ appartient à $\mathscr{C}$ ou bien $\hat{\mathscr{C}}$.

(jv) On a

$$\mu(m_2 f^2) = \xi\left(\frac{m_2}{m_1} f^2\right) < \infty, \quad \text{où } m_2(x) = \int_E \int_0^{+\infty} t^2 Q(x, dy \times dt).$$

Alors, si $m_1 f \in \mathscr{C}$ (resp. $\hat{\mathscr{C}}$), on a $m_1 f = (I-\pi)g$ partout sur E (resp. $m_1 f = (I-\pi)g$ μ p.s.); en conséquence, le processus

$$M_n^f = \int_0^{T_n} f \circ Y(s) ds + \pi g \circ X_{n-1} - g(X_0), \qquad n \geqslant 1,\ M_0^f = 0$$

est une $(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{P}_x)$ martingale fonctionnelle additive (F.A.M.) de carré intégrable pour tout x (resp. pour μ-presque tout x), en notant

$$\boldsymbol{G} = (\mathscr{G}_n), \quad \mathscr{G}_n = \sigma\{\tau_1, \ldots, \tau_n, X_0, \ldots, X_{n-1}\}.$$

De plus:

$$\boldsymbol{E}_\mu\{(M_1^f)^2\} = \boldsymbol{E}_\mu\{\langle M^f \rangle_1\} = \mu((m_2 - m_1^2) f^2) = \xi\left(\frac{m_2 - m_1^2}{m_1} f^2\right) = \sigma_f^2 < \infty.$$

Par suite le processus $(M_{S_n}^f - M_S^f,\ \langle M^f \rangle_{S_n} - \langle M^f \rangle_S,\ T_n^* - T^*;\ n \geqslant 2)$ est une marche aléatoire sous $\boldsymbol{P}_x$, associée à la loi de $(M_S^f, \langle M^f \rangle_S, T^*)$ sous $\boldsymbol{P}_a$ et on a

$$\boldsymbol{E}_a(M_S^f) = 0, \quad \boldsymbol{E}_a(\langle M^f \rangle_S) = \boldsymbol{E}_\mu(\langle M^f \rangle_1) = \sigma_f^2 < \infty.$$

On en déduit que si (R.P) est vraie:

$$\left(\frac{M_{S_{[\lambda t]}}^f}{\sqrt{\lambda}}, \frac{T_{[\lambda t]}^*}{\lambda};\ t \geqslant 0\right) \xrightarrow[\lambda \uparrow \infty]{\mathscr{L}\mathscr{D} \times \mathscr{D}^+} (\sigma_f B(t),\ \xi(E)t;\ t \geqslant 0) \tag{14}$$

tandis que si (R.N) est vraie:

$$\left(\frac{M_{S_{[\lambda t]}}^f}{\sqrt{\lambda}}, \frac{T_{[\lambda t]}^*}{u(\lambda)};\ t \geqslant 0\right) \xrightarrow[\lambda \uparrow \infty]{\mathscr{L}\mathscr{D} \times \mathscr{D}^+} (\sigma_f B(t),\ A_\alpha(t);\ t \geqslant 0). \tag{15}$$

Dans (14) et (15) B est évidemment un mouvement brownien réel standard qui est en plus indépendant du processus A_α, lorsque (R.N) est vraie; les convergences ont lieu sous $\boldsymbol{P}_x$ pour tout x.

Remarquons maintenant que pour toute fonction $\varphi \in \mathscr{L}^1(\mu)$ positive, les variables

$$\Big(\eta_p = \sum_{S_{p-1}}^{S_p - 1} \varphi \circ X_k;\ p \geqslant 2\Big)$$

sont indépendantes équidistribuées et intégrables sous P_x, donc d'après un résultat classique:

$$n^{-1} \max_{p \leqslant n} \eta_p \xrightarrow[n\uparrow\infty]{P_x} 0.$$

Par conséquent:

$$n^{-1} \max_{p \leqslant n} \varphi(X_{S_p - 1}) \xrightarrow[n\uparrow\infty]{P_x} 0.$$

On en déduit que si $m_1 f \in \mathscr{C}$, alors quel que soit $t > 0$:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sup_{s \leqslant t} |\pi g(X_{S_{[\lambda s]} - 1})| \xrightarrow[\lambda\uparrow\infty]{P_x} 0 \quad \text{pour tout } x. \tag{16}$$

Ce résultat est évidemment vrai lorsque la fonction $m_1 f \in \mathscr{C}$, car dans ce cas g est bornée. Compte tenu de (14)–(16) et du théorème 2:

$$\Big(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{T^*_{[\lambda t]}} f \circ Y(s) ds,\ \frac{1}{v(\lambda)} N^*(\lambda t);\ t \geqslant 0\Big) \xrightarrow[\lambda\uparrow\infty]{\mathscr{L}_{\mathscr{D}\times\mathscr{D}^+}} (\sigma_f B(t),\ A^{-1}(t);\ t \geqslant 0),$$

où

$$A(t) = \begin{cases} A_\alpha(t), \\ t\xi(E), \end{cases}$$

$$v(\lambda) = \begin{cases} v_\alpha(\lambda) = (\lambda/C)^\alpha, \\ \lambda, \end{cases}$$

selon que (R.N) ou bien (R.P) est vraie.

On en déduit en appliquant le corollaire du théorème 1:

$$\Big(\frac{1}{\sqrt{v(\lambda)}} \int_0^{T^*_{N^*(\lambda t)}} f \circ Y(s) ds;\ t \geqslant 0\Big) \xrightarrow[\lambda\uparrow\infty]{\mathscr{L}_{\mathscr{D}}} (\sigma_f B \circ A^{-1}(t);\ t \geqslant 0). \tag{17}$$

Par ailleurs, les variables

$$\Big(\int_{T^*_p}^{T^*_{p+1}} |f| \circ Y(s) ds;\ p \geqslant 2\Big)$$

sont indépendantes équidistribuées sous P_x selon la loi de $\int_0^{T^*} |f| \circ Y(s) ds$ sous P_a et on a:

$$E_a\Big(\int_0^{T^*} |f| \circ Y(s) ds\Big)^2 < \infty;$$

donc d'après un résultat rappelé ci-dessus:

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\max_{p\leqslant n}\Big[\int_{T_p^*}^{T_{p+1}^*}|f|\circ Y(s)ds\Big]\xrightarrow[n\uparrow\infty]{P_x}0,$$

ce qui implique

$$\frac{1}{\sqrt{v(\lambda)}}\sup_{s\leqslant t}\int_{T^*_{N^*(\lambda s)}}^{T^*_{N^*(\lambda s)+1}}|f|\circ Y(u)du\xrightarrow[\lambda\uparrow\infty]{P_x}0.$$

Vu (17), (18) et l'inégalité évidente suivante:

$$\Big|\int_0^{\lambda s}f\circ Y(u)du-\int_0^{T^*_{N^*(\lambda s)}}f\circ Y(u)du\Big|\leqslant\int_{T^*_{N^*(\lambda s)}}^{T^*_{N^*(s\lambda)+1}}|f|\circ Y(u)du$$

on a finalement

$$\left(\frac{1}{\sqrt{v(\lambda)}}\int_0^{\lambda t}f\circ Y(s)ds;\ t\geqslant 0\right)\xrightarrow[\lambda\uparrow\infty]{\mathscr{L}\mathscr{C}}(\sigma_f B\circ A^{-1}(t);\ t\geqslant 0)\tag{19}$$

sous P_x pour tout x, lorsque la fonction $m_1 f$ est dans $\mathscr{C}$ ou $\hat{\mathscr{C}}$.

Le théorème suivant résume les résultats que nous venons d'obtenir:

THÉORÈME 5. *Soit $\{\Omega, \mathscr{F}, (P_x;\ x\in E); (X_n, \tau_n);\ n\in \boldsymbol{N}\}$ une chaîne semi-markovienne canonique sur $E\times \boldsymbol{R}_+$, associée à la probabilité de transition Q. Notons $X=(X_n;\ n\in\boldsymbol{N})$ et*

$$Y(t)=\sum_{n\geqslant 0}X_n \mathbf{1}_{\{T_n\leqslant t<T_{n+1}\}},$$

$$T_n=\tau_0+\tau_1+\ldots+\tau_n\qquad(\tau_0=0,\ P_x\ p.s.)$$

la chaîne de Markov et le processus semi-markovien qui lui sont associés.

Supposons que les hypothèses suivantes soient vérifiées:

La chaîne X admet un état récurrent a tel que pour tout $x\in E$

$$P_x(\overline{\lim_n}\{X_n=a\})=1.$$

De plus, posant

$$S=\inf\{n>0;\ X_n=a\},$$

$$T^*=T_S=\inf\{t>T_1;\ Y(t)=a\},\qquad \Gamma(1-\alpha)=\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{-\alpha}dt,$$

on a

$$E_a(T^*)<\infty\tag{R.P}$$

ou bien

$$P_a(T^*>r)\sim C^\alpha/r^\alpha\Gamma(1-\alpha)\qquad(r\to\infty),\tag{R.N}$$

où $C>0$ est une constante et $0<\alpha<1$.

La fonction

$$x \to m_1(x) = \int_0^\infty t \int_E Q(x, dy \times dt)$$

est finie pour tout $x \in E$.

Alors on a les conclusions suivantes:

(1) *Pour toute fonction* f *intégrable par rapport à la mesure*

$$\xi\colon \Gamma \to \xi(\Gamma) = E_a\{\int_0^{T^*} 1_\Gamma \circ Y(s)ds\}$$

et pour tout $x \in E$:

$$\frac{1}{t}\int_0^t f \circ Y(s)ds \xrightarrow[t\uparrow\infty]{} \frac{\xi(f)}{\xi(E)}\ P_x\ p.s.,$$

lorsque (R.P) *est vraie*;

$$\left(\frac{1}{\lambda^\alpha}\int_0^{\lambda t} f \circ Y(s)\,ds;\ t \geqslant 0\right) \xrightarrow[\lambda\uparrow\infty]{\mathscr{L}\mathscr{C}} (C^{-\alpha}\xi(f)\cdot A_\alpha^{-1}(t);\ t \geqslant 0)$$

sous P_x, *lorsque* (R.N) *est vraie, à condition de noter* A_α^{-1} *l'inverse à droite du P.A.I. stable croisssant d'indice* α.

(2) *Soit* f *une fonction satisfaisant les propriétés suivantes*:

La fonction $m_1 f$ *appartient à* $\mathscr{C}$ *ou bien* $\hat{\mathscr{C}}$ ($\mathscr{C}$ *et* $\hat{\mathscr{C}}$ *sont définis dans la partie* (C) *de* IV.2) *et*

$$\xi\left(\frac{m_2}{m_1}f^2\right) < \infty, \quad \text{où } m_2(x) = \int_E \int_0^{+\infty} t^2 Q(x, dy \times dt).$$

Alors, posant

$$\sigma_f^2 = \xi\left(\frac{m_2 - m_1^2}{m_1}f^2\right),$$

on a

$$(\lambda^{-1/2}\int_0^{\lambda t} f \circ Y(s)\,ds;\ t \geqslant 0) \xrightarrow[\lambda\uparrow\infty]{\mathscr{L}\mathscr{C}} \sigma_f\sqrt{\xi(E)}(B(t);\ t \geqslant 0)$$

sous P_x *lorsque* (R.P) *est vraie*; B *étant un mouvement brownien réel standard.*

$$(\lambda^{-\alpha/2}\int_0^{\lambda t} f \circ Y(s)ds;\ t \geqslant 0) \xrightarrow[\lambda\uparrow\infty]{\mathscr{L}\mathscr{C}} (\sigma_f B \circ A_\alpha^{-1}(t);\ t \geqslant 0),$$

sous P_x *lorsque* (R.N) *est vraie*; B *étant un mouvement brownien réel standard, indépendant du processus* A_α.

Ce théorème s'applique, en particulier, à une file $M/G/1$. Cette file est décrite par la suite $(A_n;\ n \geqslant 1)$ des instants d'arrivée des clients et la suite $(T_n;\ n \geqslant 1)$ des instants de départ: le $n^{\text{ème}}$ client arrive à l'instant A_n et sort à l'instant T_n. Les v.a. $(A_n - A_{n-1};\ n \geqslant 1)$ sont indépendantes, identiquement distribuées selon la loi exponentielle de paramètre a et sont indépendantes des v.a. $(B_n - B_{n-1};\ n \geqslant 1)$ représentant les durées de service, supposées également indépendantes, identiquement distribuées selon la loi F de moyenne b; et

$$T_{n+1} - T_n = B_{n+1} - B_n + \max(0,\ A_{n+1} - T_n).$$

On suppose que toutes ces v.a. sont définies sur le même espace de probabilité $(\Omega', \mathscr{F}', P')$.

Soit X_n le nombre de clients dans la file après le départ du $n^{\text{ème}}$ client. Si la discipline de service est: "premier arrivé premier servi", alors posant $\tau_n = T_n - T_{n-1}$, $T_0 = 0$, $(X_n, \tau_n;\ n \in \boldsymbol{N})$ est une chaîne semi-markovienne à valeurs dans $\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{R}_+$, telle que

$$P'(X_{n+1} = j,\ \tau_{n+1} \leqslant t \mid X_n = i) = Q(i, j, t),$$

où $Q(t) = \big(Q(i, j, t);\ (i, j) \in \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}\big)$ est donnée par (cf. [2])

$$Q(t) = \begin{pmatrix} p_0(t) & p_1(t) & p_2(t) & & \cdots \\ q_0(t) & q_1(t) & q_2(t) & & \cdots \\ & q_0(t) & q_1(t) & & \cdots \\ & 0 & \ddots & & \ddots \\ & & & \ddots & & \ddots \end{pmatrix},$$

$$q_n(t) = \int_0^t e^{-as} \frac{(as)^n}{n!}\, dF(s),$$

$$p_n(t) = \int_0^t a e^{-as} q_n(t-s)\, ds, \qquad n \in \boldsymbol{N}.$$

La chaîne de Markov $X = (X_n;\ n \in \boldsymbol{N})$ a pour probabilité de transition $\pi = \big(\pi(i, j)\big)$ où

$$\pi = \begin{pmatrix} q_0(\infty) & q_1(\infty) & q_2(\infty) & q_3(\infty) & \cdots \\ q_0(\infty) & q_1(\infty) & q_2(\infty) & q_3(\infty) & \cdots \\ & q_0(\infty) & q_1(\infty) & q_2(\infty) & \cdots \\ & & q_0(\infty) & q_1(\infty) & \cdots \\ & & 0 & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & & \ddots \end{pmatrix},$$

et il est aisé de voir que X est irréductible et apériodique. Par conséquent, tous les états sont récurrents ou bien transients. En fait, posant $I = ab$, on montre aisément que tous les états sont transients, récurrents positifs, récurrents nuls selon que $I > 1, I < 1, I = 1$. Dans le cas où $I = 1$, si S est le temps de retour de la chaîne X en 0, partant de 0, alors $S+1$ a même loi que l'indice du premier client qui n'attend pas, car $X_n = 0$ équivaut à dire $W_{n+1} = 0$, où W_n est le temps d'attente du $n^{\text{ème}}$ client. Par conséquent, désignant par H la loi de $B_1 - A_1$ et par H^{*n} sa $n^{\text{ème}}$ convolée, alors d'après [8], la condition $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}[H^{*n}(]-\infty, 0[)-\frac{1}{2}] = \varrho < \infty$ implique

$$1 - E'(e^{-\lambda S} \mid X_0) \sim e^{-\varrho}\sqrt{\lambda} \qquad (\lambda \downarrow 0).$$

Or $T_n/n \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} b$ P' p.s., donc

$$T_{S_n}/S_n \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} b \;\; P' \text{ p.s.}$$

Par suite, $T^* = T_S$ vérifie

$$1 - E'(e^{-\lambda T^*} \mid X_0 = 0) \sim e^{-\varrho}\sqrt{b\lambda} \qquad (\lambda \downarrow 0),$$

ce qui équivaut à dire

$$P'(T^* > r \mid X_0 = 0) \sim \sqrt{C/r} \;\; (r \to \infty) \qquad \text{où } C = \sqrt{be^{-2\varrho}/\pi}.$$

La mesure invariante μ de la chaîne X peut être calculée de la manière suivante (cf. [2]): si $I(k) = 1 - q_0(\infty) - \ldots - q_k(\infty)$ et $\mu = \sum_0^{\infty} \mu(k)\delta_k$ avec $\mu(0) \neq 0$, alors $I = \sum_0^{\infty} I(k)$ et la suite $(\mu(k))$ est l'unique solution du système:

$$\begin{aligned}
\mu(1)q_0(\infty) &= \mu(0)I(0),\\
\mu(2)q_0(\infty) &= \mu(0)I(1) + \mu(1)I(1),\\
\mu(3)q_0(\infty) &= \mu(0)I(2) + \mu(1)I(2) + \mu(2)I(1),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

En particulier dans le cas récurrent positif, on a

$$I < 1 \qquad \text{et} \qquad \sum_0^{\infty} \mu(k) = \mu(0)/(1-I) < \infty.$$

Par ailleurs pour $p \in N^*$, on a

$$m_p(i) = \int_0^{+\infty} t^p G_i(dt)$$

avec

$$G_i(t) = \sum_{j=0}^{\infty} Q(i, j, t) = p_i(t) + \sum_0^{i} q_j(t),$$

donc

$$m_p(i) = \int_0^{+\infty} t^p dp_i(t) + \sum_0^i \int_0^{+\infty} t^p dq_j(t).$$

Or

$$p_i(t) = \int_0^t ae^{-a(t-s)} q_i(s) ds = q_i(t) - e^{-at} \int_0^t \frac{(as)^i}{i!} F(ds),$$

d'où

$$m_p(i) = p \int_0^{+\infty} F(ds) \frac{(as)^i}{i!} \int_s^{+\infty} t^{p-1} e^{-at} dt$$
$$+ \sum_0^{i-1} \int_0^{+\infty} t^p e^{-at} \frac{(at)^j}{j!} F(dt) < \infty.$$

Le cas $I = 1$ est utile à envisager, car il correspond intuitivement à l'idée d'un *service minimum assuré pour que la file tourne.* Dans ce cas, le temps d'oisiveté du serveur jusqu'à l'instant t, soit $\int_0^t \mathbf{1}_{\{Y_s=0\}} ds$ vérifie

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{\lambda t} \mathbf{1}_{\{Y_s=0\}} ds;\ t \geqslant 0\right) \xrightarrow[\lambda \uparrow \infty]{\mathscr{L}\mathscr{C}} \left((e^{2\varrho} \pi a)^{1/4} \xi(0) A_{1/2}^{-1}(t);\ t \geqslant 0\right).$$

Les calculs précédents peuvent être explicités davantage lorsque F est une loi gamma de paramètre $(b\lambda, \lambda)$:

$$F(dt) = \frac{1}{\Gamma(b\lambda)} \lambda^{b\lambda} t^{b\lambda - 1} e^{-\lambda t} \mathbf{1}_{\{t>0\}} dt,$$

mais cela amène des développements assez longs. ∎

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. Billingsley, *Convergence of Probability Measures*, J. Wiley, New York 1968.
[2] E. Cinlar, *Introduction to Stochastic Processes*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.
[3] J. Jacod, *Calcul stochastique et problèmes de martingales*, Lecture Notes 714, Springer, 1979.
[4] — *Théorèmes limites pour les processus*, École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XIII, Lecture Notes 1117, Springer-Verlag, 1983.
[5] G. Pages, *Un théorème de convergence fonctionnelle pour les intégrales stochastiques*, Sém. Prob. XX, Lecture Notes 1204, Springer-Verlag, 1985.
[6] G. Papanicolaou, D. Stroock and S. Varadhan, *Martingale approach to some limit theorems*, Duke Univ. Math. Ser. III, Statistical Mechanics and Dynamical Systems, 1977.
[7] C. Stricker, *Les intervalles de constance de* $\langle X, X \rangle$, Sém. Prob. XVI, Lecture Notes, Springer-Verlag, 1981.
[8] A. Touati, *Théorèmes limites pour les processus de Markov récurrents*, Probab. Theory Related Fields, à paraître.
[9] — *Loi fonctionnelle du logarithme itéré pour les processus de Markov récurrents*, Ann. Probab., à paraître.

[10] — *Sur le comportement asymptotique d'une diffusion récurrente sur R^d*, à paraître.
[11] — *Vitesse de convergence de l'estimateur des moindres carrés dans le modèle autorégressif* (cas général), à paraître.
[12] — *Sur la convergence en loi des suites de semimartingales vers un mélange de mouvements browniens*, à paraître.
[13] — *Deux théorèmes de convergence en loi pour des intégrales stochastique et application statistique*, à paraître.

C. N. R. S. Statistique Appliquée UA 743
Université Paris-Sud, Mathématiques
Bâtiment 425
91 405 Orsay Cédex, France

Received on 1. 7. 1988