PROBABILITY
AND
MATHEMATICAL STATISTICS

Vol. 12, Fasc. 2 (1991), pp. 201–215

APPROXIMATION DU TEMPS LOCAL DES CHAMPS ALÉATOIRES GAUSSIENS STATIONNAIRES PAR RÉGULARISATION DES TRAJECTOIRES

PAR

CORINNE BERZIN (ORSAY)

Abstract. Let $\{X(t),\ t\in \boldsymbol{R}^d\}$ be a stationary gaussian field. We are looking for the $(d-1)$-dimensional area measure of the intersection with zero level of the field regularized by convolution. Under some conditions and with an appropriated normalization, this measure converges in L^2 towards a limit which is the local time, when X admits a continuous local time.

I. INTRODUCTION

1. Le cas du Wiener à d-paramètres ($d \geqslant 1$). La théorie du temps local d'un processus stochastique X a été élaborée par P. Lévy dans le cas du mouvement brownien. Depuis de nombreuses approximations ont été proposées; en 1984, Wschebor [6] a proposé une construction du temps local du processus de Wiener à d-paramètres, en utilisant les régularisées de X. Le résultat principal est que si $X_\varepsilon(t) = \psi_\varepsilon * X(t)$ est une régularisation de X obtenue à l'aide d'une C^∞-approximation de l'unité ψ_ε, si T est un ensemble ouvert borné, dont l'adhérence est contenue dans l'intérieur de $(\boldsymbol{R}^+)^d$ et si le temps local est défini de la manière suivante:

Soient A et B des boréliens respectivement de $\boldsymbol{R}$ et $\boldsymbol{R}^d$, μ_d désignant la mesure de Lebesgue dans $\boldsymbol{R}^d$, la mesure d'occupation $\mu(A, B)$ de X est définie par

$$\mu(A, B) = \mu_d\{t\in B,\ X(t)\in A\}$$

et le temps local $L(x, B)$ est caractérisé comme étant une fonction satisfaisant

$$\mu(A, B) = \int 1_A(x) L(x, B)\,dx.$$

L'existence de versions régulières de telles fonctions est étudiée dans [4] et [5], alors pour une certaine normalisation $d(\varepsilon)$ d'ordre ε on a:

$$\sqrt{d(\varepsilon)}\,\sigma_{d-1}\big(C(X_\varepsilon)\cap T\big) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{L^p} L(0, T),\ \ \forall\, p\in N^*,$$

où σ_{d-1} désigne la mesure d'aire $(d-1)$-dimensionnelle et

$$C(X_\varepsilon) = \{t\in \boldsymbol{R}^d,\ X_\varepsilon(t) = 0\}.$$

2. Les cas des processus stables et gaussiens stationnaires ($d = 1$). Azaïs [1] a étendu ce résultat aux processus stables à accroissements indépendants. Florens-Zmirou et Azaïs [2] ont ensuite donné une approximation similaire du temps local pour une certaine classe de processus gaussiens stationnaires indexés par le temps. Ils ont établi que si $N_{\psi,\varepsilon}]a, b[$ désigne le nombre de passages par zéro de X_ε durant l'intervalle de temps $]a, b[$, $\lambda_{2,\varepsilon}$ le moment spectral d'ordre 2 de X_ε et si X admet un temps local $L(u,]a, b[)$ continu en u au point zéro, alors

$$\sqrt{\pi/2}\,\lambda_{2,\varepsilon}^{-1/2} N_{\psi,\varepsilon}]a, b[\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{L^2} L(0,]a, b[).$$

Le but de cette note est de généraliser ce résultat au cas où le processus X est multiindexé.

Nous généralisons la notion d'aire $(d-1)$-dimensionnelle à celle de périmètre $Q_T(\cdot)$ utile dans les cas où pour un processus Y et pour chaque réalisation de la surface aléatoire $Y(\cdot)$, l'ensemble $C(Y)$ est très irrégulier topologiquement. Nous considérons

$$A(X_\varepsilon) = \{t \in \mathbf{R}^d,\ X_\varepsilon(t) < 0\};$$

lorsque X_ε est à trajectoires continues, presque sûrement X_ε n'a pas de points critiques de valeur zéro et $Q_T(A(X_\varepsilon))$ n'est alors que la mesure d'aire $(d-1)$-dimensionnelle de $C(X_\varepsilon) \cap T$ (voir [6]); nous montrons alors sous certaines hypothèses, qu'il existe une normalisation $d(\varepsilon)$ strictement positive, telle que si X admet une version continue du temps local L, alors

$$\sqrt{d(\varepsilon)}\, Q_T(A(X_\varepsilon)) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{L^2} L(0, T).$$

Il est à noter que lorsque $d > 1$, les hypothèses de travail sont beaucoup plus générales que dans le cas $d = 1$; ceci provenant du fait que $u \to 1/\|u\|$ est intégrable au voisinage de $u = 0$.

II. RÉSULTATS

1. Notations et hypothèses. Soit $\{X(t),\ t \in \mathbf{R}^d\}$ un champ aléatoire gaussien centré et stationnaire de covariance $r(\cdot)$ continue en zéro, et de mesure spectrale $F(d\lambda)$, supposée non nulle sur les quadrants ouverts de $\mathbf{R}^d$. On suppose $d > 1$. On note $D_i = \partial/\partial t_i$.

Soit ψ un noyau de convolution de classe C^1 vérifiant:

$$\psi(u) \leqslant 1/\|u\|^{d+1}, \quad |D_i\psi(u)| \leqslant 1/\|u\|^{d+1}, \quad |D_i\psi(\cdot)| \in L^1(d\lambda),$$
$$\forall i \in [1, d],\ \forall u \in (\mathbf{R}^*)^d.$$

On note $\hat{\psi}$ la transformée de Fourier de ψ. On définit ψ_ε par $\psi_\varepsilon(u) = \varepsilon^{-d}\psi(u/\varepsilon)$, $\forall u \in \mathbf{R}^d$, et X_ε par $X_\varepsilon = \psi_\varepsilon * X$.

Soient $\Lambda_1(\varepsilon) \geqslant \ldots \geqslant \Lambda_d(\varepsilon)$ les valeurs propres de la matrice de covariance de $\dot{X}_\varepsilon(0)$.

Soit T un cube ouvert borné dans $\boldsymbol{R}^d$ dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées et de longueur C.

Soit $r_{\varepsilon,\psi}(\cdot) = \mathrm{E}(X_\varepsilon(\cdot)X_\varepsilon(0))$ noté encore $r_\varepsilon(\cdot)$.

$\delta_{i,j}$ désigne le symbole de Kronecker.

Si B est un Borélien de $\boldsymbol{R}^d$, nous appelons $Q_T(B)$ *périmètre relatif de B par rapport à T*, défini par

$$Q_T(B) = \sup\left\{\int \operatorname{div} v(t) 1_B(t)dt;\ v \in C_k^\infty(T)^d;\ \|v\| < 1\right\},$$

où $C_k^\infty(T)^d$ désigne l'ensemble des fonctions de $\boldsymbol{R}^d$ dans $\boldsymbol{R}^d$ de classe C^∞ et à support inclus dans T.

HYPOTHÈSE H1. La fonction de covariance r vérifie:

(a) Les dérivées partielles premières et secondes de r existent en dehors de l'origine et sont bornées à l'infini. Les dérivées partielles premières de r sont à variation bornée autour de l'origine.

(b) On pose $H(i) = \int x_i^2 dF(x)$, $\forall i \in [1, d]$; on suppose qu'il existe une direction j pour laquelle $H(j)$ est infini.

HYPOTHÈSE H2. On suppose que l'on peut appliquer les formules de type Rice adaptées à notre problème [6].

HYPOTHÈSE H3. Soit $c(\varepsilon) = (\Lambda_1(\varepsilon))^{-1}$; on suppose que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} c(\varepsilon)\Lambda_i(\varepsilon) = \Lambda_i, \quad \forall i \in [1, d].$$

Soit $\Lambda = [(\Lambda_{i,j})]_{i,j}$, où $\Lambda_{i,j} = \delta_{i,j}\Lambda_i$ et p le rang de Λ. On considère $X = (X_1, X_2, \ldots, X_p)$, où les X_i sont des variables aléatoires gaussiennes centrées indépendantes, de variance Λ_i, $1 \leqslant i \leqslant p$, et $\theta = \mathrm{E}(\|X\|_p)$.

Nous démontrons alors:

THÉORÈME. *Sous les hypothèses* H1, H2 *et* H3 *les variables aléatoires*

$$\xi^\varepsilon = \sqrt{c(\varepsilon)}\, Q_T(A(X_\varepsilon)) \quad \text{et} \quad \eta^\delta = (\theta/2\delta)\int 1_T(t) 1_{\{\|X(t)\| < \delta\}}(t)dt$$

convergent au sens de $L^2(\Omega)$ vers une même limite pour ε et δ tendant vers zéro.

COROLLAIRE. *Sour les hypothèses* H1, H2 *et* H3 *et si X admet un temps local $L(u, T)$ continu en u au point zéro, alors*

$$\sqrt{c(\varepsilon)}\,\theta^{-1} Q_T(A(X_\varepsilon)) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{L^2} L(0, T).$$

2. Commentaires.

(a) Sur H2. Les formules de type Rice utilisées dans notre travail sont valides par exemple lorsque X (respectivement X_ε) est à trajectoires continues (respectivement de classe C^4) [condition (A)] et si on a la propriété

$\exists N \in N$, $\forall n \geqslant N$, $\exists \varepsilon(C/n)$, $\forall \varepsilon < \varepsilon(C/n)$, $\exists a < C/2n$, $\forall t_1 \in T$, $\forall t_2 \in T$, $\forall t_3 \in T$ tels que $\|t_1 - t_3\| < a$, $\|t_3 - t_2\| > C/n$, la matrice de covariance de $(X_\varepsilon(t_1), X(t_2), \dot{X}_\varepsilon(t_3))$ est non dégénérée [6].

Cette dernière condition est vérifiée sous H1 dans les exemples suivants:

(α) X est isotrope $(r(t) = g(\|t\|))$ et ψ est invariante par les transpositions et par symétrie par rapport aux axes de coordonnées [condition (B)].

(β) ψ et F sont invariantes par rapport aux axes de coordonnées et

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \lambda_{2,\varepsilon}^{i,i} = +\infty, \quad \forall i \in [1, d],$$

ce qui est assuré par exemple sous H3 lorsque $p = d$.

(b) Sur H3. Deux cas particuliers sont intéressants:

(α) Les conditions (A) et (B) sont vérifiées et r vérifie H1. Dans ce cas:

$$\lambda_{2,\varepsilon}^{i,j} = \int |\hat{\psi}|^2(\varepsilon x) x_i x_j dF(x) = 0 \qquad \text{pour } i \neq j,$$

et

$$\lambda_{2,\varepsilon}^{i,i} = c(\varepsilon)^{-1}, \qquad \forall i \in [1, d].$$

En particulier, si

$$g'(x) = x^\beta f(x) \qquad \text{pour } x \geqslant 0,$$

où $-1 < \beta$ et $\lim_{x \to 0^+} f(x) = a$, $a \neq 0$, $|f(x)| < M$, $\forall x \in R^+$, alors

$$c(\varepsilon) = \varepsilon^{1-\beta} K_\psi^{-1},$$

où K_ψ supposée non nulle est définie par

$$K_\psi = -a \int \psi(u) h_1 \|h\|^{\beta - 1} D_1 \psi(u - h) du dh, \qquad \theta = \mathrm{E}(\|X\|_d),$$

où $X \to N(0, I)$, et sous l'hypothèse d'existence pour x d'un temps local continu en 0:

$$\theta^{-1}(\sqrt{K_\psi})^{-1}(\sqrt{\varepsilon})^{1-\beta} Q_T(A(X_\varepsilon)) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{L^2} L(0, T).$$

Exemple 1. $r(t) = e^{-\|t\|^\alpha}$, $0 < \alpha < 2$, $\beta = \alpha - 1$.

(β) $r(t) = \prod_i r^i(t_i)$, r_i vérifie H1, $r_i \in L^1$, $r_i(0) > 0$, $\psi(t) = \prod_i \psi_i(t_i)$, $\psi_i(x) = \psi_i(-x)$, $\psi_i(x) \leqslant \text{const} \cdot |x|^{-1}$, $\int_R \psi_i(t) dt = 1$, $\forall i \in [1, d]$, $\forall t \in R^d$ et $\forall x \in R^*$. Dans ce cas $\lambda_{2,\varepsilon}^{i,j} = 0$ pour $i \neq j$, $\lambda_{2,\varepsilon}^{i,i} = \lambda_{2,\varepsilon}^i g_i(\varepsilon)$, où $g_i(\varepsilon) = \prod_{j \neq i} r_{\psi_j,\varepsilon}^j(0)$ converge vers $\prod_{j \neq i} r^j(0)$ quand $\varepsilon \to 0$, et $\lambda_{2,\varepsilon}^i$ est le moment spectral d'ordre deux d'un processus à un indice de covariance $r_{\psi_i,\varepsilon}^i$. Si

$$\lambda_{2,\varepsilon}^j / \sup_i (\lambda_{2,\varepsilon}^i) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} a_j, \qquad p = \operatorname{rang}(a_j \delta_{i,j})_{i,j=1,d},$$

et si

$$\lambda_{2,\varepsilon}^{1,1} \geqslant \lambda_{2,\varepsilon}^{2,2} \geqslant \ldots \geqslant \lambda_{2,\varepsilon}^{d,d},$$

alors, sous l'hypothèse d'existence pour x d'un temps local continu en 0 et sous la condition (A) on a:

$$\theta^{-1}\sqrt{c(\varepsilon)}\,Q_T(A(X_\varepsilon)) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{L^2} L(0, T),$$

où $\theta = \mathrm{E}(\|X\|_p)$ et $X \to N\big(0, (a_i/a_1 r_1(0)/r_i(0)\delta_{i,j})_{i,j=1,p}\big)$.

EXEMPLE 2. $r^i = r^0$ et $\psi_i = \psi_0$, où r^0 vérifie H1 (traduit pour $d = 1$), alors $a_i = 1$, $\forall i \in [1, d]$.

Remarques. L'exemple 2 permet donc d'obtenir un sous-ensemble de la classe des processus à un indice, stationnaires, de moment spectral d'ordre deux infini, qui contient une partie de la classe exhibée dans le cas $d = 1$ par [2]. Le cas (β) soit un peu du cadre de notre étude puisque r ne vérifie pas H1 (a) mais on peut légèrement modifier la preuve du théorème général (en considérant notamment les cubes partiellement proches au lieu des cubes proches (cf. [6], p. 105).

III. DÉMONSTRATIONS

On note:

$$\gamma_\varepsilon(t) = \mathrm{E}(X_\varepsilon(t)X(0)), \qquad DR_\varepsilon(t) = (D_i r_\varepsilon(t))_i,$$

$$D^2R_\varepsilon(t) = (D_iD_jr_\varepsilon(t))_{i,j}, \qquad a(\varepsilon) = (\varepsilon\sqrt{d})^{-1}, \qquad c_d = A/\sqrt{d}.$$

On dira que $x \ll y$, s'il existe une constante $k \geqslant 0$ telle que $x < ky$.

Commençons par démontrer deux lemmes.

LEMME 1. (1) $\lim_{\varepsilon\to 0} c(\varepsilon) = 0$.

(2) *$r_\varepsilon(t)$ et $\gamma_\varepsilon(t)$ tendent uniformément en t vers $r(t)$ quand ε tend vers zéro.*

(3) *$|D_ir_\varepsilon(t)|$, $|D_iD_jr_\varepsilon(t)|$ et $|D_i\gamma_\varepsilon(t)|$ sont bornées ($\forall i$, $\forall j$) sur $D(t_0) = \{t \in \mathbf{R}^d, \|t\| > t_0\}$ par des constantes ne dépendant que de t_0.*

Preuve. (1) On peut toujours supposer que

$$\inf_{\|x\|<1} |\hat{\psi}(x)|^2 \geqslant 1$$

(en effet, il existe $\eta > 0$ tel que $\inf_{\|x\|<\eta} |\hat{\psi}(x)|^2 > 0$; on considère alors φ définie par $\varphi(x) = \psi(x/\eta)$, $\forall x \in \mathbf{R}^d$), d'où

$$\lambda_{2,\varepsilon}^{j,j} \geqslant \int_{-a(\varepsilon)}^{a(\varepsilon)} \dots \int_{-a(\varepsilon)}^{a(\varepsilon)} x_j^2\,dF(x)$$

d'après H1(b):

(i) $\lambda_{2,\varepsilon}^{j,j} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} +\infty$.

De plus, si

$$z_j = (0, \dots, \underset{\substack{\downarrow\\ j}}{1}, \dots, 0),$$

on a

(ii) $-z_j D^2 R_\varepsilon(0) z_j' = \lambda_{2,\varepsilon}^{j,j} \leqslant \Lambda_1(\varepsilon)$ et

(iii) $\lim_{\varepsilon\to 0} c(\varepsilon)\Lambda_1(\varepsilon) = \Lambda_1 = 1$.

En utilisant (i)–(iii) on obtient $\lim_{\varepsilon\to 0} c(\varepsilon) = 0$.

(2) On montre (2) à l'aide du théorème de convergence dominée de Lebesgue.

(3) Grâce à la propriété de majoration de $|D_i\psi(\cdot)|$, on peut dériver $r_\varepsilon(\cdot)$ sous le signe somme. On a alors

$$(*) \qquad D_i r_\varepsilon(t) = (1/\varepsilon)\int \psi(u) D_i\psi(v) r(t+\varepsilon(u-v))\,du\,dv.$$

On fait le changement de variables $t+\varepsilon(u-v) = h$ et on intègre alors par parties, il vient

$$D_i r_\varepsilon(t) = (1/\varepsilon)^d \int \psi(u)\psi(u+(t-h)/\varepsilon) D_i r(h)\,du\,dh = \int(1).$$

Soit $t_0 > 0$; on pose $A = t_0/3$ et on suppose $\|t\| > t_0 = 3A$. On découpe $\boldsymbol{R}^{2d}$ suivant la partition:

$$D_1 = \{(u, h)\in \boldsymbol{R}^{2d},\ -\|u\| \leqslant 2A/\varepsilon - \|t\|/\varepsilon,\ \|h\| < A\},$$

$$D_2 = \{(u, h)\in \boldsymbol{R}^{2d},\ -\|u\| > 2A/\varepsilon - \|t\|/\varepsilon,\ \|h\| < A\},$$

$$D_3 = \{(u, h)\in \boldsymbol{R}^{2d},\ \|h\| \geqslant A\}.$$

On majore $|D_i r_\varepsilon(t)|$ par $(1/\varepsilon)^d \int \psi(u)\psi(u+(t-h)/\varepsilon)|D_i r(h)|\,du\,dh$ sur $\bigcup_{i=1}^3 D_i$.

Si $(u, h)\in D_1$, $\|u\| \geqslant A/\varepsilon$, d'où $\psi(u) \ll \varepsilon^{d+1}$, et donc on a

$$\int_{D_1} |(1)| \ll \varepsilon \int_{\|h\|<A} |D_i r(h)|\,dh \ll \varepsilon,$$

d'après H1(a).

Si $(u, h)\in D_2$, $\|t/\varepsilon + u - h/\varepsilon\| \geqslant A/\varepsilon$, d'où $\psi(t/\varepsilon + u - h/\varepsilon) \ll \varepsilon^{d+1}$; de même: $\int_{D_2} |(1)| \ll \varepsilon$.

Si $\|h\| > A$, $|D_i r(h)|$ est majorée d'après H1(a), d'où

$$\int_{D_3} |(1)| \ll (1/\varepsilon)^d \int \psi(u)\psi(t/\varepsilon + u - h/\varepsilon)\,du\,dh \ll \int \psi(u)\psi(v)\,du\,dv = 1,$$

et donc il existe $N(t_0)$ tel que $|D_i r_\varepsilon(\cdot)|$ soit majoré par $N(t_0)$ sur $D(t_0)$.

$$(**) \qquad D_i D_j r_\varepsilon(t) = (1/\varepsilon)^2 \int D_j\psi(t/\varepsilon - u) r(\varepsilon u - \varepsilon v) D_i\psi(-v)\,du\,dv.$$

Pour simplifier les notations, on suppose que $i = 2$ et $j = 1$. On intègre alors par parties, il vient

$$D_2 D_1 r_\varepsilon(t) = (1/\varepsilon)^{d+1} \int \psi(u) D_2 r(h) D_1\psi(t/\varepsilon + u - h/\varepsilon)\,du\,dh = \int(2).$$

On découpe $\boldsymbol{R}^{2d}$ suivant la partition:

$$D_1 = \{(u, h)\in \boldsymbol{R}^{2d},\ \exists\, k\in\{2, \dots, d\},\ |h_k| > c_d\},$$

$$D_2 = \{(u, h)\in \boldsymbol{R}^{2d},\ \forall\, k\in\{1, \dots, d\},\ |h_k| \leqslant c_d\},$$

$$D_3 = \{(u, h)\in \boldsymbol{R}^{2d},\ |h_1| > A/\sqrt{d},\ \forall\, k\in\{2, \dots, d\},\ |h_k| \leqslant c_d\}.$$

Posons

$$S = \{h \in R^{d-1}, \exists k \in \{2, \ldots, d\}, |h_k| > c_d\}$$

et

$$U = \{h \in R^{d-1}, \forall k \in \{2, \ldots, d\}, |h_k| \leqslant c_d\};$$

$$\int_{D_1} (2) = (1/\varepsilon)^{d+1} \int\int_S \psi(u)\Big[\int_R D_2 r(h) D_1 \psi(t/\varepsilon + u - h/\varepsilon) dh_1\Big] dh_2 \ldots dh_d du.$$

On intègre par parties le terme sous crochet, il vient d'après H1(a):

$$\int_{D_1} (2) = (1/\varepsilon)^d \int\int_{S \times R} \psi(u) D_1 D_2 r(h) \psi(t/\varepsilon + u - h/\varepsilon) du dh.$$

Mais les dérivées partielles secondes de r sont bornées sur $S \times R$, d'où

$$\Big|\int_{D_1} (2)\Big| \ll 1.$$

On découpe D_2 suivant la partition:

$$D_{2,1} = \{(u, h) \in D_2, -\|u\| \leqslant 2A/\varepsilon - \|t\|/\varepsilon\},$$

$$D_{2,2} = \{(u, h) \in D_2, -\|u\| > 2A/\varepsilon - \|t\|/\varepsilon\}.$$

On démontre de la même façon que dans (*) que

$$\Big|\int_{D_2} (2)\Big| \ll 1.$$

Pour majorer $|\int_{D_3} (2)|$, on intègre par parties en h_1, d'où

$$\int_{D_3} (2) = B/(\varepsilon)^d,$$

où

$$B = \int\int_U \psi(u) D_2 r(c_d, h_2, \ldots, h_d) \psi(t_1/\varepsilon + u_1 - c_d/\varepsilon, \ldots, t_d/\varepsilon + u_d - h_d/\varepsilon) dh_2 \ldots dh_d du$$

$$- \int\int_U \psi(u) D_2 r(-c_d, h_2, \ldots, h_d) \psi(t_1/\varepsilon + u_1 + c_d/\varepsilon, \ldots, t_d/\varepsilon + u_d - h_d/\varepsilon) dh_2 \ldots dh_d du$$

$$+ \int_{D_3} \psi(u) D_1 D_2 r(h) \psi(t/\varepsilon + u - h/\varepsilon) du dh;$$

$$\int_{D_3} (2) = \int_{D_3} (\mathrm{A}) + \int_{D_3} (\mathrm{B}) + \int_{D_3} (\mathrm{C}).$$

Pour majorer $|\int_{D_3} (\mathrm{A})|$ et $|\int_{D_3} (\mathrm{B})|$, on partitionne

$$D_4 = \{(u, h) \in R^d \times R^{d-1}, \forall k \in \{2, \ldots, d\}, |h_k| \leqslant c_d\}$$

en deux domaines

$$D_{41} = \{(u, h) \in D_4, -\|u\| \leqslant (2A/\varepsilon) - \|t\|/\varepsilon\},$$

$$D_{42} = \{(u, h) \in D_4, -\|u\| > (2A/\varepsilon) - \|t\|/\varepsilon\}.$$

On fait alors un raisonnement analogue à celui dans (*), en tenant compte du fait que

$$\int_U |D_2 r(\pm c_d, h_2, \ldots, h_d)|\, dh_2 \ldots dh_d \ll 1,$$

d'où

$$\Big|\int_{D_3} (\mathrm{A})\Big| + \Big|\int_{D_3} (\mathrm{B})\Big| \ll \varepsilon.$$

Pour majorer $\left|\int_{D_3}(\mathrm{C})\right|$, il suffit de voir que les dérivées partielles secondes de r sont bornées sur D_3; on a donc $|D_2 D_1 r_\varepsilon(t)| \ll 1$.

(***) $$D_i \gamma_\varepsilon(t) = (1/\varepsilon) \int D_i \psi(t/\varepsilon - u) r(\varepsilon u)\, du$$

posons $\varepsilon u = v$ et intégrons par parties, il vient

$$D_i \gamma_\varepsilon(t) = (1/\varepsilon)^d \int \psi\big((t-v)/\varepsilon\big) D_i r(v)\, dv.$$

Il suffit alors d'intégrer sur la partition suivante: $D_1 = \{v \in \mathbf{R}^d,\ \|v\| < A\}$ et D_1^c, et d'appliquer les mêmes raisonnements que précédemment.

LEMME 2. *Soit* $\{(X_\varepsilon(t), Y_\varepsilon(t)),\ t \in B\}$ *un processus gaussien centré à valeurs dans* $\mathbf{R}^{2n}$ *et* B *un ouvert borné de* $\mathbf{R}^k$. *On suppose que la matrice de covariance* $R_\varepsilon(t)$ *de* $(X_\varepsilon(t), Y_\varepsilon(t))$ *converge uniformément en* t *lorsque* ε *tend vers zéro vers*

$$\begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda \end{bmatrix},$$

où Λ *est diagonale, de rang* q. *Soient* $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \ldots \geqslant \lambda_q$, *les* q *valeurs propres non nulles de* Λ *et* $\Lambda_1 = (\lambda_i \delta_{i,j})_{i,j=1,q}$. *Soit* $t \to g_\varepsilon(t)$ *une fonction définie sur* B *à valeurs dans* $\mathbf{R}$ *qui converge uniformément en* t *vers* $g(t)$ *bornée sur* B, *lorsque* ε *tend vers zéro. Alors*

$$\int_B \mathrm{E}\big(\|X_\varepsilon(t)\|\, \|Y_\varepsilon(t)\|\big) g_\varepsilon(t)\, dt \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} \Big[\int_B g(t)\, dt\Big] \mathrm{E}^2(\|X\|_q),$$

où $X \to N(0, \Lambda_1)$.

Démonstration. Elle se fait en trois étapes.

(E1) Il est clair que le théorème est vrai si le rang de Λ est q; en effet, il suffit alors d'appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue.

(E2) $$\int_B g_\varepsilon(t) \mathrm{E}\big(\|X_\varepsilon(t)\|\big)\, dt \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} \mathrm{E}(\|X\|_q) \int_B g(t)\, dt.$$

(a) Si la matrice de covariance $C_\varepsilon(t)$ de $X_\varepsilon(t)$ est diagonale et si ses valeurs propres convergent simplement et sont uniformément bornées en t pour $\varepsilon < \varepsilon_0$, alors (E2) est prouvé en appliquant le théorème de convergence dominée de Lebesgue.

(b) Si $C_\varepsilon(t)$ est quelconque, on la diagonalise à l'aide d'une matrice orthogonale $P_\varepsilon(t)$, soit $D_\varepsilon(t) = P_\varepsilon(t) C_\varepsilon(t) P'_\varepsilon(t)$ et on peut ranger les valeurs propres de $D_\varepsilon(t)$ par ordre croissant, par exemple; il suffit alors, pour appliquer (a), de voir que

$$\mathrm{E}(\|X_\varepsilon(t)\|) = \mathrm{E}(\|P_\varepsilon(t)X_\varepsilon(t)\|).$$

(E3) Pour montrer le lemme, on se sert alors de (E1) et (E2) en bruitant les processus X_ε et Y_ε, puis on fait tendre le bruit vers zéro.

Plus précisément: Soit Z_σ un vecteur aléatoire gaussien centré de variance $\sigma^2 I_n$, indépendant de $(X_\varepsilon(t), Y_\varepsilon(t))$ et à valeurs dans $\boldsymbol{R}^n$. Soit W_σ un vecteur aléatoire vérifiant les mêmes propriétés que Z_σ. On suppose de plus que Z_σ et W_σ sont indépendants entre eux. On note T_σ un vecteur aléatoire à valeurs dans $\boldsymbol{R}^n$ et suivant une loi $N(0, (\lambda_i+\sigma^2)\delta_{i,j})_{i,j=1,n}$. On décompose

$$\int_B g_\varepsilon(t)\mathrm{E}(\|X_\varepsilon(t)\|\;\|Y_\varepsilon(t)\|)dt - \int_B g(t)\mathrm{E}^2(\|X\|_q)dt = \int(1)$$

en

$$\begin{aligned}\int(1) = &\int_B g_\varepsilon(t)\big[\mathrm{E}(\|X_\varepsilon(t)\|\;\|Y_\varepsilon(t)\|) - \mathrm{E}(\|X_\varepsilon(t)+Z_\sigma\|\;\|Y_\varepsilon(t)+W_\sigma\|)\big]\,dt\\ &+\int_B g_\varepsilon(t)\big[\mathrm{E}(\|X_\varepsilon(t)+Z_\sigma\|)(\|Y_\varepsilon(t)+W_\sigma\|) - \mathrm{E}^2(\|T_\sigma\|)\big]\,dt\\ &+\int_B g_\varepsilon(t)[\mathrm{E}^2(\|T_\sigma\|)-\mathrm{E}^2(\|X\|_q)]dt + \int_B (g_\varepsilon(t)-g(t))\mathrm{E}^2(\|X\|_q)dt.\end{aligned}$$

On pose

$$\int(1) = \int(\mathrm{a}) + \int(\mathrm{b}) + \int(\mathrm{c}) + \int(\mathrm{d}),$$

$$|(\mathrm{a})| \leqslant \mathrm{E}(\|Z_\sigma\|)\big[\mathrm{E}(\|X_\varepsilon(t)\|) + \mathrm{E}(\|Y_\varepsilon(t)\|) + \mathrm{E}(\|Z_\sigma\|)\big]\,|g_\varepsilon(t)|,$$

d'où:

$$|(\mathrm{a})| \leqslant \sigma\big[\mathrm{E}(\|X_\varepsilon(t)\|) + \mathrm{E}(\|Y_\varepsilon(t)\|) + \sigma\big]\,|g_\varepsilon(t)|.$$

On applique alors (E2) et donc:

$\int_B(\mathrm{a})$ converge vers zéro lorsque σ tend vers zéro uniformément en ε.

$\int_B(\mathrm{b})$ converge vers zéro lorsque ε tend vers zéro, d'après (E1) et le théorème de convergence dominée de Lebesgue.

$\int_B(\mathrm{c})$ converge vers zéro lorsque σ tend vers zéro uniformément en ε d'après (E2) et parce-que $|g_\varepsilon(t)| \leqslant 1$ pour $\varepsilon < \varepsilon_0$ et $\forall t \in B$.

$\int_B(\mathrm{d})$ converge vers zéro lorsque ε tend vers zéro d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue.

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le théorème.

Démonstration du théorème. Montrons que

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{\varepsilon\to 0} \mathrm{E}\big(\sqrt{c(\varepsilon)}\,Q_T(A(X_\varepsilon)) - (\theta/2\delta)\int 1_{\{t,|X(t)|<\delta\}}dt\big)^2 = 0.$$

Pour tout $n \in N^*$, on partitionne le cube T en cubes T_i de côtés parallèles aux axes de coordonnées et de longueur C/n. On pose

$$\xi_i^\varepsilon = \sqrt{c(\varepsilon)}\,Q_{T_i}(A(X_\varepsilon)) \qquad \text{et} \qquad \eta_i^\delta = (\theta/2\delta)\int_{T_i} 1_{\{t,|X(t)|<\delta\}}dt.$$

Nous voulons montrer que

$$\lim_{\delta} \limsup_{\varepsilon} \mathrm{E}\big(\sum_{i} (\xi_i^\varepsilon - \eta_i^\delta)\big)^2 = \lim_{\delta} \limsup_{\varepsilon} \mathrm{E}\big(\sum_{i,j} (\xi_i^\varepsilon - \eta_i^\delta)(\xi_j^\varepsilon - \eta_j^\delta)\big) = 0.$$

Soit

$$\Sigma = \mathrm{E}\big(\sum_{i,j} (\xi_i^\varepsilon - \eta_i^\delta)(\xi_j^\varepsilon - \eta_j^\delta)\big).$$

On divise Σ en deux sommes Σ' et Σ'' telles que:

Σ' désigne la somme correspondante aux indices (i, j) tels que T_i et T_j ne sont pas proches; c'est-à-dire: $\forall t \in T_i$, $\forall t' \in T_j$, $\|t-t'\| > C/n$;

Σ'' désigne la somme restante: on somme sur les couples (i, j) tels que $\exists t \in T_i$, $\exists t' \in T_j$, $\|t-t'\| \leqslant C/n$.

Nous noterons "T_i proche de T_j": "T_i pp T_j".

Pour Σ': Soit un terme général $a_{i,j}^{\varepsilon,\delta}$ de Σ':

$$a_{i,j}^{\varepsilon,\eta} = \mathrm{E}(\eta_i^\delta \eta_j^\delta) + \mathrm{E}(\xi_i^\varepsilon \xi_j^\varepsilon) - \mathrm{E}(\eta_i^\delta \xi_j^\varepsilon) - \mathrm{E}(\eta_j^\delta \xi_i^\varepsilon) = (1)+(2)-(3)-(4).$$

On applique les formules de type Rice [6] à chacune des quatre espérances:

$$(1) = \int_{T_i \times T_j} (\theta/2\delta)^2 \int_{-\delta}^{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} p_{X(t_1),X(t_2)}(x, y)\,dx\,dy\,dt_1\,dt_2,$$

où $p_{Y_1,\ldots,Y_n}$ désigne la densité de $(Y_1, \ldots, Y_n)$.

(1) tend vers $\theta^2 \int_{T_i}\int_{T_j} p_{X(t_1),X(t_2)}(0, 0)\,dt_1\,dt_2$ lorsque δ tend vers zéro d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue.

Soit P_ε une matrice othogonale qui diagonalise $-D^2 R_\varepsilon(0)$ en Λ_ε définie par $\Lambda_\varepsilon = \big(\Lambda_i(\varepsilon)\delta_{i,j}\big)_{i,j}$; on note p_{t_1,t_2}^ε la densité de $X_\varepsilon(t_1)$, $X_\varepsilon(t_2)$. Nous avons

$$(2) = \int_{T_i \times T_j} p_{t_1,t_2}^\varepsilon(0, 0) A_\varepsilon(t_1, t_2)\,dt_1\,dt_2,$$

où

$$A_\varepsilon(t_1, t_2) = \mathrm{E}\big(\|\sqrt{c(\varepsilon)}\, P_\varepsilon \dot{X}_\varepsilon(t_1-t_2)\|\, \|\sqrt{c(\varepsilon)}\, P_\varepsilon \dot{X}_\varepsilon(0)\| \,|\, X_\varepsilon(t_1-t_2) = X_\varepsilon(0) = 0\big).$$

Posons $t_1 - t_2 = \tau$; on décompose alors $\dot{X}_\varepsilon(\tau)$, $\dot{X}_\varepsilon(0)$ de la manière suivante:

$$P_\varepsilon \dot{X}_\varepsilon(0) = \xi_\varepsilon + X_\varepsilon(0)\alpha_\varepsilon + X_\varepsilon(\tau)\beta_\varepsilon, \qquad P_\varepsilon \dot{X}_\varepsilon(\tau) = \xi_\varepsilon^* - X_\varepsilon(\tau)\alpha_\varepsilon - X_\varepsilon(0)\beta_\varepsilon,$$

où $(\xi_\varepsilon, \xi_\varepsilon^*)$ est un couple gaussien centré, de coordonnées à valeurs dans $\boldsymbol{R}^d$ et indépendant de $\big(X_\varepsilon(0), X_\varepsilon(\tau)\big)$ (voir [6]). On vérifie que

$$\alpha_\varepsilon = \frac{r_\varepsilon(\tau) P_\varepsilon D R_\varepsilon(\tau)}{r_\varepsilon^2(0) - r^2(\tau)}, \qquad \beta_\varepsilon = \frac{-P_\varepsilon D r_\varepsilon(\tau) r_\varepsilon(0)}{r_\varepsilon^2(0) - r_\varepsilon^2(\tau)}.$$

De plus,

$$\operatorname{Var} \xi_\varepsilon = \operatorname{Var} \xi_\varepsilon^* = \Lambda_\varepsilon - \frac{r_\varepsilon(0) P_\varepsilon D R_\varepsilon(\tau) D R_\varepsilon'(\tau) P_\varepsilon'}{r_\varepsilon^2(0) - r_\varepsilon^2(\tau)}$$

et

$$\operatorname{Cov}(\xi_\varepsilon, \xi_\varepsilon^*) = -P_\varepsilon D^2 R_\varepsilon(\tau) P'_\varepsilon - \frac{r_\varepsilon(\tau) P_\varepsilon D R_\varepsilon(\tau) D R'_\varepsilon(\tau) P'_\varepsilon}{r_\varepsilon^2(0) - r_\varepsilon^2(\tau)},$$

d'où

$$(2) = \int_{T_i \times T_j} (2\pi)^{-1} \left(r_\varepsilon^2(0) - r_\varepsilon^2(\tau)\right)^{-1/2} \mathrm{E}\left(\|\sqrt{c(\varepsilon)}\, \xi_\varepsilon\| \, \|\sqrt{c(\varepsilon)}\, \xi_\varepsilon^*\|\right) dt_1\, dt_2.$$

En appliquant les lemmes 1 et 2 il vient, compte tenu que les coefficients de P_ε sont bornés par 1:

(2) tend vers $\theta^2 \int_{T_i \times T_j} p_{X(t_1), X(t_2)}(0, 0) dt_1\, dt_2$ lorsque ε tend vers zéro.

$$(3) = \int_{T_i \times T_j} \sqrt{c(\varepsilon)} \int (\theta/2\delta) \int_{-\delta}^{\delta} \|\dot{x}\| \, p_{X(t_1), X_\varepsilon(t_2), \dot{X}_\varepsilon(t_2)}(u, 0, \dot{x})\, du\, d\dot{x}\, dt_1\, dt_2,$$

$$(3) = \int_{T_i \times T_j} (1/2\pi) \int_{-\delta}^{\delta} (\theta/2\delta) \left(r(0) r_\varepsilon(0) - \gamma_\varepsilon^2(t_1 - t_2)\right)^{-1/2} B_\varepsilon(t_1 - t_2)\, dt_1\, dt_2,$$

où

$$B_\varepsilon(\tau) = \exp\left(-2^{-1} u^2 r_\varepsilon(0) / \left(r(0) r_\varepsilon(0) - \gamma_\varepsilon^2(\tau)\right)\right) C_\varepsilon(\tau),$$

$$C_\varepsilon(\tau) = \mathrm{E}\left(\|\sqrt{c(\varepsilon)}\, P_\varepsilon \dot{X}_\varepsilon(\tau)\| \mid X(0) = u,\ X_\varepsilon(\tau) = 0\right).$$

Calculons

$$\mathrm{E}\left(P_\varepsilon \dot{X}_\varepsilon(\tau) \sqrt{c(\varepsilon)} \mid X(0) = u,\ X_\varepsilon(\tau) = 0\right) = (\mathrm{i}).$$

La matrice de covariance de $\left(P_\varepsilon \dot{X}_\varepsilon(\tau)\sqrt{c(\varepsilon)},\ X(0),\ X_\varepsilon(\tau)\right)$ est

$$\begin{bmatrix} \Lambda_\varepsilon c(\varepsilon) & (a_{i,\varepsilon}(\tau))'_i & \theta'_d \\ (a_{i,\varepsilon}(\tau))_i & r(0) & \gamma_\varepsilon(\tau) \\ \theta_d & \gamma_\varepsilon(\tau) & r_\varepsilon(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{1,1} & I_{1,2} \\ & \\ I_{2,1} & I_{2,2} \end{bmatrix}$$

et θ_d est le vecteur ligne de $\mathbb{R}^d$ dont les coordonnées sont nulles. $a_{i,\varepsilon}(\tau) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$ uniformément en τ d'après le lemme 1 et parce-que les coefficients de P_ε sont bornés par 1; d'où:

(*) (i) $= f_\varepsilon(\tau) u$, où $f_\varepsilon(\tau) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$ uniformément en τ.

Or

$$\operatorname{Var}\left(P_\varepsilon \dot{X}_\varepsilon(\tau) \sqrt{c(\varepsilon)} / X(0),\ X_\varepsilon(\tau)\right) = I_{1,1} - I_{1,2} I_{2,2}^{-1} I_{2,1},$$

le terme général de $I_{1,2} I_{2,2}^{-1} I_{2,1}$ est

$$\frac{r(0) a_{i,\varepsilon}(\tau) a_{j,\varepsilon}(\tau)}{r(0) r_\varepsilon(0) - \gamma_\varepsilon^2(\tau)},$$

qui converge uniformément en τ vers zéro lorsque ε tend vers zéro; d'où:

(**) $\operatorname{Var}\left(P_\varepsilon \dot{X}_\varepsilon(\tau) \sqrt{c(\varepsilon)} / X(0),\ X_\varepsilon(\tau)\right)$ converge uniformément en τ vers Λ lorsque ε tend vers zéro.

Il est clair qu'en modifiant légèrement le lemme 2 et en utilisant les résultats (*) et (**) et le lemme 1 on a

$$(3) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} (\theta^2/2\delta) \int_{T_i\times T_j} \int_{-\delta}^{\delta} p_{X(t_1),X(t_2)}(0,0) D(t_1-t_2, u)\, du\, dt_1\, dt_2,$$

où

$$D(\tau, u) = \exp\left(-2^{-1}u^2 r(0)(r^2(0)-r^2(\tau))^{-1}\right),$$

et donc

$$(3) \underset{\delta\to 0}{\longrightarrow} \theta^2 \int_{T_i\times T_j} p_{X(t_1),X(t_2)}(0,0)\, dt_1\, dt_2$$

d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue.

De manière analogue on montrerait que (4) converge vers la même limite que (3) lorsque ε puis δ tendent vers zéro; et donc

$$\lim_{\delta\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0} \Sigma' = 0.$$

Pour Σ'': Nous avons

$$\Sigma'' = \sum_{T_i \mathrm{pp} T_j} \mathrm{E}(\xi_i^\varepsilon - \eta_i^\delta)(\xi_j^\varepsilon - \eta_j^\delta),$$

d'où

$$\Sigma'' \leqslant \sum_{T_i \mathrm{pp} T_j} (\mathrm{E}(\xi_i^\varepsilon - \eta_j^\delta)^2 \mathrm{E}(\xi_i^\varepsilon - \eta_j^\delta)^2)^{1/2},$$

et donc

$$\Sigma'' \leqslant \sum_{T_i \mathrm{pp} T_j} [(\mathrm{E}(\xi_i^\varepsilon)^2)^{1/2} + (\mathrm{E}(\eta_j^\delta)^2)^{1/2}]^2.$$

Majorons $\mathrm{E}(\eta_i^\delta)^2$:

$$\mathrm{E}(\eta_i^\delta)^2 = \int_{T_i\times T_i} (\theta/2\delta)^2 \int_{-\delta}^{\delta}\int_{-\delta}^{\delta} p_{X(t_1),X(t_2)}(x,y)\, dt_1\, dt_2\, dx\, dy,$$

$$\mathrm{E}(\eta_i^\delta)^2 \leqslant \int_{T_i\times T_i} \theta^2 (r^2(0)-r^2(t_1-t_2))^{-1/2}\, dt_1\, dt_2,$$

d'où

$$\mathrm{E}(\eta_i^\delta)^2 \leqslant \int_{-C/n}^{C/n} \cdots \int_{-C/n}^{C/n} (r^2(0)-r^2(u_1,\ldots,u_d))^{-1/2} (C/n-|u_1|)\ldots(C/n-|u_d|)\, du,$$

$$\mathrm{E}(\eta_i^\delta)^2 \leqslant (C/n)^d \int_{-C/n}^{C/n} \cdots \int_{-C/n}^{C/n} (r^2(0)-r^2(u_1,\ldots,u_d))^{-1/2}\, du_1 \ldots du_d.$$

Majorons $r(0)-r(u)$ sur $]-C/n, 0[\times]0, C/n[\times\ldots\times]0, C/n[$ par exemple:

$$r(0)-r(u) = \int (1-\cos\langle x, u\rangle)\, dF(x),$$

d'où

$$r(0)-r(u) \geqslant \int_{-1/d\|u\|}^{0} \int_{0}^{1/d\|u\|} \dots \int_{0}^{1/d\|u\|} (1-\cos\langle x, u\rangle) dF(x).$$

Il est clair que $0 \leqslant \langle x, u\rangle \leqslant 1$ pour tout x appartenant au domaine d'intégration de l'expression précédente; donc

$$r(0)-r(u) \gg \int_{-1/d\|u\|}^{0} \int_{0}^{1/d\|u\|} \dots \int_{0}^{1/d\|u\|} \langle x, u\rangle^2 dF(x).$$

Mais $x_i u_i \geqslant 0$ $\forall i \in [1, d]$, d'où

$$r(0)-r(u) \gg \sum_{j=1}^{d} u_j^2 \int_{-1/d\|u\|}^{0} \int_{0}^{1/d\|u\|} \dots \int_{0}^{1/d\|u\|} x_j^2 dF(x).$$

Or $\|u\| < \sqrt{d}\, C/n$ implique $1/d\|u\| > n/Cd\sqrt{d}$, $-1/d\|u\| < -n/Cd\sqrt{d}$. Posons

$$a_n(C) = \inf_{\sigma,j} A_j(\sigma n/dC\sqrt{d}),$$

où

$$A_j(\sigma u) = \int_{A\sigma_1(u)} \int_{A\sigma_2(u)} \dots \int_{A\sigma_d(u)} v_j^2 dF(v), \qquad u > 0,$$

avec $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_d)$, où $\forall i \in [1, d]$, $\sigma_i = \pm 1$,

$$A\sigma_i(u) = \begin{cases}]0, \sigma_i(u)[& \text{si } \sigma_i \geqslant 0, \\ ]\sigma_i(u), 0[& \text{si } \sigma_i \leqslant 0, \end{cases}$$

d'où $r(0)-r(u) \geqslant \|u\|^2 a_n(C)$, et donc

$$\mathrm{E}(\eta_i^\delta)^2 \ll (C/n)^d \int_{-C/n}^{C/n} \int_{-C/n}^{C/n} \dots \int_{-C/n}^{C/n} (1/\|u\|) du$$

ou encore

$$\mathrm{E}(\eta_i^\delta)^2 \ll (C/n)^d \int_{0}^{\sqrt{d}C/n} r^{d-2} dr = (C/n)^{2d-1} (\sqrt{d})^{d-1}/(d-1),$$

et donc $\mathrm{E}(\eta_i^\delta)^2 \ll (C/n)^{2d-1}$.

Majorons $\mathrm{E}(\xi_i^\varepsilon)^2$:

$$\mathrm{E}(\xi_i^\varepsilon)^2 = c(\varepsilon) \int_{T_i \times T_i} p_{t_1,t_2}^\varepsilon(0, 0) \mathrm{E}\big(\|\dot{X}_\varepsilon(0)\| \, \|\dot{X}_\varepsilon(t_1-t_2)\| \mid X_\varepsilon(0) = X_\varepsilon(t_1-t_2) = 0\big) dt,$$

$$(1) = \mathrm{E}\big(\|\dot{X}_\varepsilon(0)\| \, \|\dot{X}_\varepsilon(\tau)\| \mid X_\varepsilon(0) = X_\varepsilon(\tau) = 0\big) \leqslant \sum_{j=1}^{d} \mathrm{Var}\big(D_j X_\varepsilon(0)/X_\varepsilon(0), X_\varepsilon(\tau)\big),$$

d'où

$$(1) \leqslant \sum_{k=1}^{d} \big(\lambda_{2,\varepsilon}^{k,k} - r_\varepsilon(0)[D_k r_\varepsilon(\tau)]^2 (r_\varepsilon^2(0) - r_\varepsilon^2(\tau))^{-1}\big),$$

et donc

$$(1) \leqslant \sum_{k=1}^{d} \lambda_{2,\varepsilon}^{k,k},$$

on obtient alors

$$\mathrm{E}(\xi_i^\varepsilon)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{d} c(\varepsilon)\lambda_{2,\varepsilon}^{k,k} \int_{T_i\times T_i} (r_\varepsilon^2(0)-r_\varepsilon^2(t_1-t_2))^{-1/2}\,dt_1\,dt_2,$$

d'où

$$\mathrm{E}(\xi_i^\varepsilon)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{d} c(\varepsilon)\lambda_{2,\varepsilon}^{k,k}(C/n)^d \int_{-C/n}^{C/n}\int_{-C/n}^{C/n}\cdots\int_{-C/n}^{C/n} (r_\varepsilon^2(0)-r_\varepsilon^2(u_1,\ldots,u_d))^{-1/2}\,du.$$

On considère alors le vecteur z_k défini au début de la partie concernant les démonstrations; on peut écrire

$$\forall k\in[1,d],\ c(\varepsilon)z_k(-D^2R_\varepsilon(0))z_k' = c(\varepsilon)\lambda_{2,\varepsilon}^{k,k} \leqslant c(\varepsilon)\Lambda_1(\varepsilon);$$

or $c(\varepsilon)\Lambda_1(\varepsilon)=\Lambda_1=1$, d'où pour tout k appartenant à $[1,d]$ $c(\varepsilon)\lambda_{2,\varepsilon}^{k,k}$ reste majoré par une constante ne dépendant pas de ε. On a alors la majoration suivante:

$$\mathrm{E}(\xi_i^\varepsilon)^2 \ll (C/n)^d \int_{-C/n}^{C/n}\int_{-C/n}^{C/n}\cdots\int_{-C/n}^{C/n} (r_\varepsilon^2(0)-r_\varepsilon^2(u_1,u_2,\ldots,u_d))^{-1/2}\,du.$$

On intègre sur les domaines suivants:

$$D_1=\{\tau\in[-C/n,C/n]^d\mid \|\tau\|>\varepsilon/\sqrt{d}\},\qquad D_2=\{\tau\in[-C/n,C/n]^d\mid \|\tau\|\leqslant\varepsilon/\sqrt{d}\}.$$

On suppose que $\varepsilon<\varepsilon(C/n)=dC/n$. Il vient $\mathrm{E}(\xi_i^\varepsilon)^2\leqslant(1)+(2)$.

Sur D_1: Soit $\tau\in D_1\cap\,]-C/n,0[\times]0,C/n[\times\ldots\times]0,C/n[$, par exemple

$$r_\varepsilon(0)-r_\varepsilon(\tau)=\int(1-\cos\langle\tau,u\rangle)|\hat\psi|^2(\varepsilon u)\,dF(u),$$

$$r_\varepsilon(0)-r_\varepsilon(\tau)\gg \int_{-1/d\|\tau\|}^{0}\int_{0}^{1/d\|\tau\|}\cdots\int_{0}^{1/d\|\tau\|}\langle\tau,u\rangle^2|\hat\psi|^2(\varepsilon u)\,dF(u).$$

Mais $\|\varepsilon u\|\leqslant 1$, d'où

$$r_\varepsilon(0)-r_\varepsilon(\tau)\gg \int_{-1/d\|\tau\|}^{0}\int_{0}^{1/d\|\tau\|}\int_{0}^{1/d\|\tau\|}\langle\tau,u\rangle^2\,dF(u),$$

d'après ce qui précède:

$$r_\varepsilon(0)-r_\varepsilon(\tau)\gg\|\tau\|^2,$$

et donc

$$(1)\ll(C/n)^{2d-1}\qquad\text{pour }\varepsilon<\varepsilon(C/n).$$

Sur D_2: Soit $\tau \in D_2 \cap]-C/n, 0[\times]0, C/n[\times \ldots \times]0, C/n[$, par exemple

$$r_\varepsilon(0)-r_\varepsilon(\tau) \geqslant \int\limits_{-a(\varepsilon)}^{0} \int\limits_{0}^{a(\varepsilon)} \ldots \int\limits_{0}^{a(\varepsilon)} (1-\cos\langle\tau, u\rangle)|\hat{\psi}|^2(\varepsilon u)dF(u).$$

Or $\|\varepsilon u\| \leqslant 1$ et $0 \leqslant \langle\tau, u\rangle \leqslant 1$, d'où

$$r_\varepsilon(0)-r_\varepsilon(\tau) \gg \int\limits_{-a(\varepsilon)}^{0} \int\limits_{0}^{a(\varepsilon)} \ldots \int\limits_{0}^{a(\varepsilon)} \langle\tau, u\rangle^2 dF(u) \gg \|\tau\|^2 \quad \text{pour } \varepsilon < \varepsilon(C/n),$$

d'où (2) $\ll (C/n)^{2d-1}$ pour $\varepsilon < \varepsilon(C/n)$. On en déduit donc que

$$\Sigma'' \ll \sum_{T_i \mathrm{pp} T_j} (C/n)^{2d-1} \quad \text{pour } \varepsilon < \varepsilon(C/n).$$

Or il existe au plus $(3n)^d$ cubes proches, d'où $\Sigma'' \ll (C/n)^{d-1}$ pour $\varepsilon < \varepsilon(C/n)$, et donc

$$\limsup_{\delta\to 0} \limsup_{\varepsilon\to 0} \Sigma \ll (C/n)^{d-1} \quad \forall n \in N^*,$$

d'où

$$\lim_{\delta\to 0} \limsup_{\varepsilon\to 0} \Sigma = 0,$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

TRAVAUX CITÉS

[1] J. M. Azaïs, *Conditions for convergence of number of crossings to the local time. Application to stable processes with independent increments and to gaussian processes*, Probab. Math. Statist. 11 (1990), pp. 19–36.

[2] — et D. Florens-Zmirou, *Approximation du temps local des processus gaussiens stationnaires par régularisation des trajectoires*, Probab. Theory Related Fields 76 (1987), pp. 121–132.

[3] S. M. Berman, *Local non-determinism and local times of gaussian processes*, Indiana Univ. Math. J. 23 (1973), pp. 69–94.

[4] Y. A. Davydov, *Local times for multiparameter random processes*, Theory Probab. Appl. 23 (1978), pp. 573–583.

[5] W. Ehm, *Sample properties of multiparameter stable processes*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 56 (1981), pp. 195–228.

[6] M. Wschebor, *Surfaces aléatoires: mesure géométrique des ensembles de niveau*, Lecture Notes in Math. Springer, Berlin–New York 1985.

Université Paris XI
UA 743 Statistique Appliquée
Bât. 425, Mathématiques
91405 Orsay Cédex, France

Received on 16.12.1987