PROBABILITY
AND
MATHEMATICAL STATISTICS
Vol. 15 (1995), pp. 291–300

ÉLÉMENTS D'ANALYSE DES CHAOS GAUSSIENS

PAR

X. FERNIQUE (STRASBOURG)

Abstract. We extend a classical property of the gaussian random functions to the gaussian chaoses of order two: Let X be a gaussian real chaos of order two on a metrizable compact set T; assume X is a.s. continuous in T; then X has a modification with continuous paths. To prove this property, we adapt the tool of the numerical oscillations [7] of the gaussian random vector-valued functions.

1. NOTATIONS. RAPPELS SUR LES CHAOS

1.0. Construction de chaos. Les données sont un espace topologique T, une application $a = \{a_{n,m}, (n, m) \subset N\}$ de T dans l_2 et une suite $G = \{g_n, n \in N\}$ de variables aléatoires indépendantes de lois $N(0, 1)$. Le chaos gaussien d'ordre 2 associé à ces données est la fonction aléatoire X sur T définie par

$$X(t) = \sum a_{n,m}(t)[g_n g_m - \delta_{n,m}],$$

où $\delta_{n,m} = 0$ si $n \neq m$, $\delta_{n,m} = 1$ sinon.

Puisque pour tout couple (n, m) d'entiers, $E[g_n g_m - \delta_{n,m}]$ est nul alors que $E[g_n g_m - \delta_{n,m}]^2$ est égal à 1 si $n \neq m$ et à 2 sinon, on constate que pour tout t fixé, la série définissant $X(t)$, indépendamment de l'ordre de ses termes, converge dans L_2 et en probabilité; pour étudier un mode de convergence plus précis, on adoptera la convention suivante:

$$X(t) = \lim_{N \to \infty} X_N(t),$$

$$\text{où } \forall N \in N,\ X_N(t) = \sum_{n,m=1}^{N} a_{n,m}(t)[g_m g_n - \delta_{n,m}] \quad \text{si cette limite existe,}$$

$$X(t) = \infty \quad \text{sinon;}$$

pour déterminer la représentation de X, on supposera que

$$\forall t \in T,\ \forall (n, m) \subset N,\ a_{n,m}(t) = a_{m,n}(t).$$

Les propriétés fondamentales des chaos gaussiens sont présentées dans [1], [2] et dans [9], l'un des outils pour leur maniement est celui du découplage.

1.1. Découplage des chaos (cf. [1] et [9]). On associe à la fonction aléatoire X les fonctions aléatoires X' et Y définies sur le même T à partir d'une copie indépendante $G' = \{g'_n, n \in N\}$ de la suite G et au même sens de convergence:

$$X'(t) = \lim_{N \to \infty} X'_N(t), \quad \text{où } \forall N \in N,\ X'_N(t) = \sum_{n,m=1}^{N} a_{n,m}(t)[g'_m g'_n - \delta_{n,m}],$$

$$Y(t) = \lim_{N \to \infty} Y_N(t) \quad \text{où } \forall N \in N,\ Y_N(t) = \sum_{n,m=1}^{N} a_{n,m}(t) g_m g'_n$$

si ces limites respectives existent, $X'(t) = \infty$, respectivement $Y(t) = \infty$, sinon.

Dans ces conditions, on sait que la fonction aléatoire $(X - X')$ a même loi que $2Y$ au sens suivant: $\{X_N(t) - X'_N(t), N \in N, t \in T\}$ a même loi que $\{2Y_N(t), N \in N, t \in T\}$. Dans l'utilisation de ce chaos découplé Y, on sera amené à expliciter l'espace d'épreuves; on notera alors Ω l'espace d'épreuves de G et Ω' celui de G'; on réalisera donc Y sur le produit $\Omega \times \Omega'$.

1.2. Intégrabilité des chaos. Les chaos gaussiens possèdent de bonnes propriétés d'intégrabilité ([2], [9]). On les utilisera ici sous la forme suivante (cf. [6]):

Soit X un chaos gaussien d'ordre 2 sur un ensemble dénombrable T; nous notons Y la fonction aléatoire découplée. Soit r la fonction sur $\boldsymbol{R}^T$ définie par $r(x) = \sup_{t \in T} |x(t)|$; supposons que $\boldsymbol{P}\{r(X) < \infty\} > 0$; alors $\boldsymbol{E}r^2(X)$ et $\boldsymbol{E}r^2(Y)$ sont finis; plus précisément, il existe une constante absolue finie C telle que:

$$\varepsilon > 0,\ p > 0,\ \boldsymbol{P}\{r(X) \leqslant \varepsilon\} > p \Rightarrow \boldsymbol{E}r^2(X) \leqslant C\varepsilon^2 p^{-8},\ \boldsymbol{E}r^2(Y) \leqslant C\varepsilon^2 p^{-8}.$$

1.3. Continuité en probabilité des chaos. Le chaos gaussien X d'ordre 2 est continu en probabilité si et seulement si l'application a de T dans l_2 est continue. Cette propriété conduit donc à privilégier sur T la topologie définie par la pseudo-métrique d définie par $d(s, t) = \|a(s) - a(t)\|_{l_2}$ qui est équivalente d'ailleurs à la pseudo-métrique définie par $\|X(s) - X(t)\|_{L_2}$.

1.4. Sur les modifications à trajectoires continues. On se réfère à une propriété des fonctions aléatoires gaussiennes: soit X une fonction aléatoire gaussienne réelle sur un espace compact métrisable T; elle définit sur T la pseudo-métrique d: $(s, t) \to \|X(s) - X(t)\|_{L_2}$. On sait alors ([4], [9]) que X a une modification à trajectoires continues sur T si et seulement si l'injection de T dans (T, d) est continue et si X a une modification à trajectoires continues sur (T, d). Ce résultat s'étend aux chaos gaussiens ([1], theorem 3.1).

THÉORÈME 1.4.1. *Soit X un chaos gaussien d'ordre 2 sur un espace compact métrisable T; on suppose que l'application a: $t \to a(t)$ est continue de T dans l_2. Dans ces conditions, les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(i) *X a une modification Z à trajectoires continues sur T.*

(ii) *Presque sûrement, $\{X_N, N \in N\}$ converge uniformément vers X sur T.*

(iii) *Presque toutes les trajectoires de X sont continues sur (T, d).*

Démonstration. Dans [1], la preuve plus générale du théorème est liée au découplage, nous donnons ici une preuve peut-être plus directe:

(a) l'implication (ii) $\Rightarrow$ (iii) résulte de la continuité des différents termes des X_N sur (T, d) et de la convergence uniforme des X_N;

(b) vu la continuité de a, (iii) implique que X a presque toutes ses trajectoires continues sur T et donc que (i) est vérifiée.

Il reste donc à prouver l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii); cette preuve mettra en évidence un deuxième outil technique fondamental pour l'étude des chaos, celui du conditionnement:

(b) Supposons l'hypothèse (i) vérifiée et notons S une partie dénombrable dense de T; la fonction aléatoire Z est aussi un vecteur aléatoire à valeurs dans l'espace de Banach séparable $\mathscr{C}(T)$ et les propriétés d'intégrabilité 1.2 montrent que

$$E \sup_{t \in T} |Z(t)| = E \sup_{t \in S} |Z(t)| < \infty.$$

Le vecteur aléatoire Z est donc (fortement) intégrable dans $\mathscr{C}(T)$. Pour tout entier N, nous notons $\mathscr{B}_N$ la tribu engendrée par $\{g_k, k \leqslant N\}$; alors l'espérance conditionnelle de Z (dans $\mathscr{C}(T)$) relativement à $\mathscr{B}_N$ est bien définie et se calcule bien:

Pour tout entier N, fixons une réalisation Z_N: $\omega \to Z_N(\omega)$ de $E\{Z | \mathscr{B}_N\}$. Pour tout $t \in S$, Z étant une modification de X, $Z_N(t) = E\{X(t) | \mathscr{B}_N\}$ p.s. Fixons $t \in T$, puisque $\{X_N(t), N \in N\}$ converge vers $X(t)$ dans L_2, on a

$$\forall m \in N, E\{X(t) | \mathscr{B}_m\} = \lim_{N \to \infty} E\{X_N(t) | \mathscr{B}_m\} \text{ au sens } L_2,$$

or pour tout $N \geqslant m$, un calcul terme par terme montre que $X_m(t) = E\{X_N(t) | \mathscr{B}_m\}$ p.s.; on en déduit finalement que pour tout entier N, $X_N(t) = E\{Z | \mathscr{B}_N\}(t) = Z_N(t)$ p.s. Les deux fonctions aléatoires X_N et Z_N ayant toutes deux toutes leurs trajectoires continues, S étant dénombrable et dense dans T, il existe alors un ensemble mesurable presque sûr Ω_0 tel que:

$$\forall t \in T, \forall \omega \in \Omega_0, X_N(\omega, t) = Z_N(\omega, t).$$

Maintenant, la suite des tribus $\{\mathscr{B}_N, N \in N\}$ est une suite croissante de tribus; puisque Z est fortement intégrable, les théorèmes du conditionnement impliquent donc que la suite $\{E\{Z | \mathscr{B}_N\}, N \in N\}$ converge presque sûrement dans $\mathscr{C}(T)$: il existe un ensemble mesurable presque sûr Ω_1 tel que: $\forall \omega \in \Omega_1$, $\{t \to Z_N(\omega, t), N \in N\}$ converge uniformément sur T; on en déduit que pour tout $\omega \in \Omega_0 \cap \Omega_1$, la suite $\{X_N(\omega), N \in N\}$ converge uniformément sur T; par définition sa limite est $X(\omega)$, d'où la propriété (ii). Le théorème est démontré.

R e m a r q u e. (a) Dans les conditions du théorème, on vérifie que le chaos découplé Y associé à X a les mêmes propriétés de continuité que X.

(b) Le théorème 1.4.1 non plus que le rappel 1.3, n'implique que la structure métrique de (T, d) ait des propriétés spécialement adaptées à l'analyse de X. Toute autre métrique définissant la même topologie serait aussi bien adaptée à leurs énoncés.

2. CONTINUITÉ PRESQUE SÛRE ET CONTINUITÉ DES TRAJECTOIRES

2.1. Soit X une fonction aléatoire réelle sur un espace métrique compact (T, δ). On sait que l'étude de la continuité de X et de ses modifications peut prendre deux aspects différents: continuité presque sûre ou continuité des trajectoires; on sait aussi qu'en général, ces deux problèmes sont différents: des processus de Poisson peuvent être presque sûrement continus sans avoir aucune modification à trajectoires continues: leurs trajectoires auront un ensemble aléatoire $T(\omega)$ de points de discontinuité. Au contraire un résultat important (lemme 2.2.1 ci-dessous) montre qu'une fonction aléatoire gaussienne presque sûrement continue a une modification à trajectoires continues. Dans ce paragraphe, on précise ce qu'il en est pour les chaos gaussiens d'ordre deux: pour parler court, ils n'ont pas de points aléatoires de discontinuité. On se propose en effet de démontrer le théorème:

THÉORÈME 2.1.1. *Soit X un chaos gaussien d'ordre 2 sur un espace métrique compact (T, δ); on note S une partie dénombrable et dense de T; on suppose que X est continu en probabilité et que pour tout $t \in T$, $\boldsymbol{P}\{\lim_{s\to t, s\in S} X(s) = X(t)\} = 1$. Dans ces conditions, les trajectoires de X sont presque toutes continues.*

R e m a r q u e. On peut constater que X vérifie les deux hypothèses du théorème si et seulement si pour tout élément t de T et toute suite $\{t_n, n \in \boldsymbol{N}\}$ convergeant vers t, $\boldsymbol{P}\{\lim_{n\to\infty} X(t_n) = X(t)\} > 0$. Le même schéma de preuve permettrait d'ailleurs de démontrer:

THÉORÈME 2.1.1'. *Soit X un chaos gaussien d'ordre 2 sur un espace métrique compact (T, δ); on suppose que X est continu en probabilité et que X est p.s. borné au voisinage de chaque point au sens suivant: Il existe une partie dénombrable dense S de T telle que pour tout $t \in T$,*

$$\boldsymbol{P}\{\limsup_{s\to t, s\in S} X(s) < \infty\} > 0.$$

Dans ces conditions, les trajectoires de X sont presque toutes bornées.

L'étude montrera donc que si le chaos gaussien X d'ordre deux continu en probabilité sur l'espace métrique compact (T, δ) n'a pas presque toutes ses trajectoires continues (resp. n'a pas presque toutes ses trajectoires bornées), alors il existe un élément non aléatoire t de T et une suite non aléatoire

$\{t_n,\ n \in N\}$ convergeant vers t, tels que $P\{\lim_{n\to\infty} X(t_n) = X(t)\} = 0$ (resp. tels que $P\{\limsup_{n\to\infty} X(t_n) = +\infty\} = 1$).

2.2. On démontrera le théorème 2.1.1 en utilisant la technique et les notations du découplage. On procédera en plusieurs étapes qu'on présentera sous forme de lemmes successifs.

On rappelle pour commencer des résultats concernant les fonctions aléatoires gaussiennes:

LEMME 2.2.1 (Itô et Nisio [8]). *Soit X une fonction aléatoire gaussienne réelle continue en probabilité sur un espace métrique compact T; on note S une partie dénombrable et dense de T et on suppose que pour tout $t \in T$, $P\{\lim_{s\to t, s\in S} X(s) = X(t)\} = 1$; dans ces conditions, X a une modification à trajectoires continues.*

LEMME 2.2.2. *Soit X une fonction aléatoire réelle continue en probabilité sur un espace métrique compact (T, δ); on suppose qu'il existe S dénombrable dense dans T telle que*

(i) $$\lim_{\eta\to 0} E\{\sup\{|X(s)-X(s')|;\ \delta(s, s') < \eta,\ s,\ s' \in S\}\} = 0.$$

Alors X a une modification à trajectoires continues. Inversement, on suppose que X est gaussienne et a une modification à trajectoires continues; alors pour toute partie dénombrable S de T, la condition (i) *est vérifiée.*

Le lemme suivant construit une autre approximation du chaos découplé Y associé au chaos X: A tout entier m et à tout élément t de T, on associe la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,m}(t)g'_n$; convergeant dans L_2 et à termes indépendants, elle converge p.s.; en fait, on a:

LEMME 2.2.3. *Pour tout $t \in T$, la série $\sum_{m=1}^{\infty} [\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,m}(t)g'_n]\, g_m$ converge p.s. vers $Y(t)$.*

Démonstration. Pour tout entier M, notons $\mathscr{C}_M$ la tribu engendrée par $\{g_k,\ k \leqslant M\}$; comme précédemment, on constate que $E\{Y(t)|\mathscr{C}_M\}$ est p.s. égal à $\lim_{N\to\infty} E\{Y_N(t)|\mathscr{C}_M\}$; le calcul terme à terme montre ensuite que pour tout $N \geqslant M$,

$$E\{Y_N(t)|\mathscr{C}_M\} = \sum_{m=1}^{M} \Big[\sum_{n=1}^{N} a_{n,m}\, g'_n\Big]\, g_m \text{ p.s.}$$

On fait alors successivement tendre N vers l'infini pour déterminer $E\{Y(t)|\mathscr{C}_M\}$, puis M vers l'infini pour obtenir le résultat du lemme.

Dans les lemmes suivants qui constituent la preuve du théorème 2.1.1 on suppose ses hypothèses vérifiées et on réalise le chaos découplé Y sur l'espace produit $\Omega \times \Omega'$:

LEMME 2.2.4. *Sous les hypothèses du théorème et pour tout élément t de T,*

$$P\{\omega\colon \lim_{\varepsilon\to 0}\int \sup_{\delta(s,t)\leqslant\varepsilon, s\in S} |Y(\omega,\omega',s)-Y(\omega,\omega',t)|dP(\omega')=0\}=1.$$

Démonstration. On fixe un élément t de T. Dans les conditions indiquées, les propriétés du découplage montrent que:

$$P\{\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{\delta(s,t)\leqslant\varepsilon, s\in S} |Y(s)-Y(t)|=0\}=1;$$

les propriétés d'intégrabilité de Y montrent d'ailleurs qu'il existe un nombre $h>0$ tel que

$$E\sup_{\delta(s,t)\leqslant h, s\in S}|Y(s)-Y(t)|<\infty.$$

Le théorème de Fubini construit donc un ensemble presque sûr Ω_0 tel que pour tout $\omega\in\Omega_0$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{\delta(s,t)\leqslant\varepsilon, s\in S}|Y(\omega,\omega',s)-Y(\omega,\omega',t)|=0 \ \omega'\text{-p.s.},$$

$$\int\sup_{\delta(s,t)\leqslant h, s\in S}|Y(\omega,\omega',s)-Y(\omega,\omega',t)|dP(\omega')<\infty.$$

L'affirmation de l'énoncé résulte donc de l'utilisation pour tout $\omega\in\Omega_0$ du théorème de convergence dominée.

LEMME 2.2.5. *Sous les hypothèses du théorème et pour tout entier n, on a*:

$$P\{t\to\sum_{m=1}^{\infty}a_{n,m}(t)g_m \textit{ continu sur } T\}=1.$$

Démonstration. On fixe n et on explicite le résultat du lemme 2.2.4: pour tout $t\in T$, il fournit un ensemble presque sûr Ω_t tel que pour tout $\omega\in\Omega_t$, l'inégalité de Jensen conditionnelle implique:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{\delta(s,t)\leqslant\varepsilon, s\in S}\left|\sum_{m=1}^{\infty}[a_{n,m}(s)-a_{n,m}(t)]g_m(\omega)\right|$$
$$\leqslant(\pi/2)^{1/2}\lim_{\varepsilon\to 0}\int\sup_{\delta(s,t)\leqslant\varepsilon, s\in S}|Y(\omega,\omega',s)-Y(\omega,\omega',t)|dP(\omega')=0.$$

Le lemme 2.2.1 implique donc que la fonction aléatoire gaussienne:

$$t\to\sum_{m=1}^{\infty}a_{n,m}(t)g_m$$

a une modification continue; on en déduit comme dans le théorème 1.4.1 qu'elle a elle-même presque toutes ses trajectoires continues; c'est le résultat du lemme.

Remarque 2.2.6. Le lemme 2.2.5 implique que sous les hypothèses du théorème, pour tout entier m, on a

$$P\{t \to \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,m}(t) g'_n \text{ continu sur } T\} = 1.$$

Le lemme 2.2.2 implique alors que pour tout entier m, on a aussi

$$\lim_{\eta \to 0} E\{\sup\{|\sum_{n=1}^{\infty} [a_{n,m}(s) - a_{n,m}(s')] g'_n|;\ \delta(s, s') < \eta,\ s, s' \in S\}\} = 0.$$

2.3. Les oscillations de Y. On introduit ici les notations qui permettront d'utiliser les techniques d'oscillation adaptées à la preuve du théorème; on pourra comparer aux notations de ([5], 3.3) et de [7].

Pour toute fonction aléatoire f sur l'ensemble T ayant Ω' pour espace d'épreuve, posons:

$$\forall t \in T,\ \forall u > 0,\ W(f, t, u) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int \sup_{(s,s') \in C(t,u,\varepsilon)} |f(\omega', s) - f(\omega', s')| \, dP(\omega'),$$

$$\text{où } C(t, u, \varepsilon) = \{(s, s') \subset S\colon\ \delta(s, t) \vee \delta(s', t) \leqslant u,\ \delta(s, s') \leqslant \varepsilon\},$$

$$\forall t \in T,\ W(f, t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int \sup_{(s,s') \in C(t,\varepsilon)} |f(\omega', s) - f(\omega', s')| \, dP(\omega'),$$

$$\text{où } C(t, \varepsilon) = \{(s, s') \subset S\colon\ \delta(s, t) \vee \delta(s', t) \leqslant \varepsilon\}.$$

Pour tout entier m, on notera f_m la fonction aléatoire:

$$t \to \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,m}(t) g'_n;$$

la remarque 2.2.6 implique alors que pour tout entier m, tout $t \in T$, tout $u > 0$, $W(f_m, t, u)$ est nul.

On remarquera que la fonction $u \to W(f, t, u)$ est une fonction croissante de u et qu'on a

$$\lim_{u \to 0} W(f, t, u) = W(f, t);$$

on remarquera aussi que le lemme 3.2.4 implique que sous les hypothèses du théorème et pour tout $t \in T$, $P\{\omega\colon\ W(Y(\omega), t) = 0\} = 1$. Cette remarque sera renforcée dans le lemme suivant, crucial pour la preuve du théorème.

LEMME 2.3.1. *Sous les hypothèses du théorème, il existe un ensemble mesurable presque sûr Ω_0 tel que pour tout $\omega \in \Omega_0$ et tout $t \in T$, $W(Y(\omega), t) = 0$.*

Démonstration. (a) On fixe pour commencer (ω, t, u) dans $\Omega \times T \times \boldsymbol{R}^+$; la remarque 2.2.6 montre alors que pour tout entier N, $W(Y(\omega), t, u)$ est égal à $W(Y(\omega) - \sum_{m=1}^{N} f_m g_m(\omega), t, u)$. Ceci implique que l'application:

$\omega \to W(Y(\omega), t, u)$ qui est mesurable (théorème de Fubini) sur Ω au moins pour la tribu complétée, est en fait mesurable pour la tribu complétée engendrée par les g_k d'indice supérieur à N, et ceci pour tout N. Cette application est donc dégénérée et il existe un nombre $\alpha = \alpha(t, u)$ tel que

$$\boldsymbol{P}\{\omega\colon\ W(Y(\omega), t, u) = \alpha(t, u)\} = 1.$$

Nécessairement la fonction: $u \to \alpha(t, u)$ est croissante sur $\boldsymbol{R}^+$, nous posons $\alpha(t) = \lim_{u \to 0} \alpha(t, u)$.

(b) Il existe donc un ensemble Ω_0 mesurable et presque sûr tel que

$$\forall s \in S,\ \forall \omega \in \Omega_0,\ \forall u \in \boldsymbol{Q}^+,\ W(Y(\omega), s, u) = \alpha(s, u).$$

On vérifie alors que pour tout (ω, t, u) dans $\Omega \times T \times \boldsymbol{R}^+$ et tout $\varepsilon > 0$,

$$\delta(t, t') \leqslant \varepsilon \Rightarrow W(Y(\omega), t, u) \leqslant W(Y(\omega), t', u+\varepsilon), \qquad \alpha(t, u) \leqslant \alpha(t', u+\varepsilon);$$

en utilisant la densité de $\boldsymbol{Q}^+$ dans $\boldsymbol{R}^+$, celle de S dans T et la croissance des applications: $u \to W(Y(\omega), t, u)$ et $u \to \alpha(t, u)$, on en déduit (cf. [5], 3.3) que pour tout $\omega \in \Omega_0$ et tout $t \in T$,

$$W(Y(\omega), t) = \lim_{u \to 0} W(Y(\omega), t, u) = \lim_{u \to 0} \alpha(t, u) = \alpha(t).$$

(c) Maintenant sous les hypothèses du théorème, on a constaté que pour tout $t \in T$, il existe un ensemble mesurable presque sûr Ω_t tel que pour tout $\omega \in \Omega_t$, $W(Y(\omega), t)$ soit nul. Pour tout $t \in T$, l'intersection $\Omega_0 \cap \Omega_t$ est presque sûre, elle possède donc un élément ω_0; puisque ω_0 appartient à Ω_0, $W(Y(\omega_0), t)$ est égal à $\alpha(t)$; puisque ω_0 appartient à Ω_t, $W(Y(\omega_0), t)$ est nul: $\alpha(t)$ est nul. Dans ces conditions, la conclusion de (b) fournit:

$$\forall \omega \in \Omega_0,\ \forall t \in T,\ W(Y(\omega), t) = \alpha(t) = 0,$$

le lemme est donc démontré.

LEMME 2.3.2. *Sous les hypothèses du théorème, Y a une modification à trajectoires continues.*

Démonstration. Soit Ω_0 l'ensemble mesurable presque sûr déterminé au lemme précédent.

(a) On fixe un élément ω de Ω_0 et on pose $Y(\omega) = y$; y est une fonction aléatoire gaussienne sur T d'espace d'épreuves Ω' et on a:

$$\forall t \in T,\ \lim_{\varepsilon \to 0} \boldsymbol{E} \sup\{|y(s) - y(s')|;\ \delta(s, t) \vee \delta(s', t) \leqslant \varepsilon,\ (s, s') \subset S\} = 0.$$

Pour tout $t \in T$, il existe donc un ensemble mesurable presque sûr Ω'_t tel que pour tout $\omega' \in \Omega'_t$, $\{y(\omega', s), s \in S, s \to t\}$ converge vers une limite finie $L(\omega', t)$; pour tout $\omega' \notin \Omega'_t$, on pose $L(\omega', t) = y(\omega', t)$. Dans ces conditions, L est une fonction aléatoire gaussienne sur T d'espace d'épreuve Ω'; par construction, L est continue en probabilité et pour tout $(\omega', t) \in \Omega' \times S$, on a $L(\omega', t)$

$= y(\omega', t)$; pour tout $t \in T$, on a aussi

$$P\{\lim_{s \to t, s \in S} L(s) = L(t)\} = 1.$$

Le lemme 2.2.1 montre donc que L a une modification à trajectoires continues; le lemme 2.2.2 fournit alors:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} E \sup\{|y(s) - y(s')|;\ \delta(s, s') \leqslant \varepsilon,\ (s, s') \subset S\} = 0. \tag{1}$$

(b) Puisque Ω_0 est mesurable et presque sûr, $\sup_{s \in S} |Y(s)|$ étant intégrable sur $\Omega \times \Omega'$, le théorème de convergence dominée en intégrant (1) sur Ω fournit:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} E \sup\{|Y(s) - Y(s')|;\ \delta(s, s') \leqslant \varepsilon,\ (s, s') \subset S\} = 0; \tag{2}$$

le lemme 2.2.2 montre donc que Y a une modification à trajectoires continues.

2.3.3. Nous terminons maintenant la preuve du théorème: à partir de (2), le théorème de découplage fournit:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} E \sup\{|(X - X')(s) - (X - X')(s')|;\ \delta(s, s') \leqslant \varepsilon,\ (s, s') \subset S\} = 0;$$

X' étant centré, l'inégalité de Jensen conditionnelle implique:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} E \sup\{|X(s) - X(s')|;\ \delta(s, s') \leqslant \varepsilon,\ (s, s') \subset S\} = 0;$$

le même lemme 2.2.2 montre alors que X a une modification à trajectoires continues. Le théorème 1.4.1 permet donc de conclure: Presque toutes les trajectoires de X sont continues.

Remarque. (a) Le lecteur de la preuve aura constaté que son argument fondamental développé au lemme 2.3.1 est basé sur les oscillations définies en 2.3. Il suit un schéma utilisé pour prouver le lemme 2.2.1 dans [8] et [5] et adapté au cadre vectoriel dans [7]; il n'y apporte rien de nouveau. Le lemme 2.3.1 ne semble pourtant pas être un corollaire direct des résultats de [3] ni du théorème 1.2 de [7]: la notion d'oscillation maniée ici ne semble pas pouvoir être associée simplement à une fonction aléatoire gaussienne à valeurs dans un espace vectoriel adéquat.

(b) Le théorème 2.1.1 semble s'étendre aux chaos gaussiens d'ordre fini, homogènes ou non, à valeurs réelles ou vectorielles. Cette extension fera l'object d'une publication ultérieure.

2.4. Application aux chaos gaussiens positifs d'ordre deux. Le théorème 2.1.1 permet aussi d'analyser la régularité de chaos gaussiens d'ordre deux d'un type un peu différent: Soient T un ensemble et X une fonction aléatoire réelle sur T; nous dirons que X est un *chaos gaussien positif d'ordre deux sur* T s'il existe une suite gaussienne $\{X_n,\ n \in N\}$ de fonctions aléatoires réelles sur T telle que pour tout $t \in T$,

$$P\{X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} [X_n(t)]^2\} = 1.$$

A tout chaos gaussien positif d'ordre deux, on peut associer par symétrisation un chaos gaussien centré au sens 1.0; les propriétés usuelles de la symétrisation et celles de la désymétrisation par intégration partielle fournissent alors:

COROLLAIRE 2.4.1. *Soit X un chaos gaussien positif d'ordre 2 sur un espace métrique compact (T, δ); on note S une partie dénombrable et dense de T; on suppose que X est continu en probabilité et que pour tout $t \in T$, $P\{\lim_{s \to t, s \in S} X(s) = X(t)\} = 1$ (resp. que X est p.s. borné au voisinage de chaque point). Dans ces conditions, X a une modification à trajectoires continues (resp. une modification à trajectoires bornées).*

TRAVAUX CITÉS

[1] A. Arcones et E. Giné, *On decoupling, series expansions and tail behavior of chaos processes*, J. Theoret. Probab. 6 (1993), pp. 101–122.

[2] C. Borell, *Tail probabilities in Gauss space. Vector Space Measures and Applications, Dublin 1977*, Lecture Notes in Math. 721, Springer, Berlin–Heidelberg 1978, pp. 71–82.

[3] V. V. Buldygin et S. A. Solnstev, *Equivalence of sample and sequential continuity of Gaussian processes and the continuity of Gaussian Markov processes*, Theory Probab. Appl. 33 (1988), pp. 624–637.

[4] J. Feldman, *Sets of boundedness and continuity for the canonical normal process*, Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. Statist. Prob., Vol. 2, Univ. of California Press, 1971, pp. 357–368.

[5] X. Fernique, *Régularité des trajectoires des fonctions aléatoires gaussiennes, Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour 1974*, Lecture Notes in Math. 480, Springer, Berlin–Heidelberg 1975, pp. 1–96.

[6] — *Gaussian random vectors and their reproducing kernel Hilbert spaces*, Technical Report, University of Ottawa, 1985.

[7] — *Sur les variations des fonctions aléatoires gaussiennes, Stochastic Processes. A Festschrift in Honour of Gopinath Kallianpur*, S. Cambanis et alii éd., Springer, New York 1993, pp. 89–96.

[8] K. Itô et M. Nisio, *On the oscillation functions of Gaussian processes*, Math. Scand. 22 (1968), pp. 209–223.

[9] M. Ledoux et M. Talagrand, *Probability in Banach Spaces*, Ergebnisse der Mathematik (3) 23, Springer, Berlin–Heidelberg 1991.

Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université Louis Pasteur et C.N.R.S.
7, rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cédex, France

Received on 14.6.1994