PROBABILITY
AND
MATHEMATICAL STATISTICS
Vol. 16, Fasc. 2 (1996), pp. 201–209

CONTINUITÉ DES TRAJECTOIRES DES CHAOS GAUSSIENS DE DEGRÉ FINI

PAR

P. HEINRICH (STRASBOURG)

Abstract. We extend a theorem due to Fernique [4]: let X be a Gaussian real chaos of finite degree on a metric compact set T. Suppose that X is continuous in probability and a.s. continuous along $\mathscr{D}$, where $\mathscr{D}$ is a countable dense subset of T. Then X has a modification with continuous paths. This result is obtained by using decoupling methods [1], integrability properties for homogeneous Gaussian chaos and numerical oscillations of random functions [6].

1. Définitions et propriétés des chaos gaussiens. On note $N^{(N)}$ l'ensemble des suites d'entiers $p = (p_k)_k$ nulles à partir d'un certain rang; l'ordre de p est par définition $|p| = \sum_k p_k$. Soit g une suite orthogaussienne sur un espace $(\Omega, \mathscr{A}, \boldsymbol{P})$ complet.

L'espace $L^2(\Omega, \mathscr{A}, \boldsymbol{P})$ est muni d'une base hilbertienne $\{H_p(g),\, p \in N^{(N)}\}$ construite à partir de produits de polynômes d'Hermite (voir [8]):

$$H_p(g) = \prod_k H_{p_k}(g_k).$$

Si $g^1, \ldots, g^D$ sont des copies indépendantes de g, on a de plus une famille orthonormale $\{G_i,\, i \in N^D\}$ en posant $G_i = g^1_{i_1} g^2_{i_2} \ldots g^D_{i_D}$.

Parmi les éléments de $L^2(\Omega, \mathscr{A}, \boldsymbol{P})$, nous nous intéressons plus particulièrement aux

– *chaos gaussiens de degré D* de la forme

$$X = X(g) = \sum_{|p| \leqslant D} a_p H_p(g),$$

– *chaos gaussiens homogènes découplés de degré D* de la forme

$$Y = \sum_i b_i G_i.$$

Ces deux types de séries possèdent de bonnes propriétés de convergence et d'intégrabilité, par exemple (voir [3])

PROPOSITION 1.1. *Posons* $p^* = \max\{k\colon p_k \neq 0\}$ *et* $i^* = \max_{1 \leqslant k \leqslant D} i_k$. *Alors, les suites de termes généraux* $\sum_{|p| \leqslant D, p^* < n} a_p H_p(g)$ *et* $\sum_{i^* < n} b_i G_i$ *convergent presque sûrement.*

LEMME 1.1. *Etant donnés deux espaces de Fréchet séparables E et F, soient* $\mathscr{L}_k(E, F)$ *l'espace des applications k-linéaires mesurables de* E^k *dans F,* μ *une mesure gaussienne centrée sur E et N une pseudo-semi-norme sur F. Pour tout* $Q \in \mathscr{L}_k(E, F)$, *on a alors*:

$$\mu^{\otimes k}\{N(Q) > 1\} \leqslant \alpha < 1 \Rightarrow \int N^2(Q)\, d\mu^{\otimes k} \leqslant \frac{C^k}{(1-\alpha^{2^{1-k}})^{2k}},$$

où C est une constante absolue.

Démonstration. On procède par récurrence sur k. Ce lemme est bien connu si k vaut 1: en effet, l'application linéaire Q est alors un vecteur gaussien centré dans F et (cf. [5])

$$\mu\{N(Q) > 1\} \leqslant \alpha < 1 \Rightarrow \int N^2(Q)\, d\mu \leqslant \frac{C}{(1-\alpha)^2}.$$

Supposons le résultat vrai au rang k et soit $Q \in \mathscr{L}_{k+1}(E, F)$ tel que

$$\mu^{\otimes k+1}\{N(Q) > 1\} = \int \mu^{\otimes k}\{N(Q(x)) > 1\}\, \mu(dx) \leqslant \alpha < 1.$$

Posons $B = \{x\colon \mu^{\otimes k}\{N \circ Q(x) > 1\} > \sqrt{\alpha}\}$ et appliquons lui l'inégalité de Chebychev:

$$\mu\{B\} \leqslant \sqrt{\alpha}.$$

L'hypothèse de récurrence implique alors que pour tout $x \in B^c$

$$\int N^2 \circ Q(x)\, d\mu^{\otimes k} \leqslant \frac{C^k}{(1-(\sqrt{\alpha})^{2^{1-k}})^{2k}};$$

on a ainsi

$$\mu\left\{x\colon \int N^2 \circ Q(x)\, d\mu^{\otimes k} > \frac{C^k}{(1-(\sqrt{\alpha})^{2^{1-k}})^{2k}}\right\} \leqslant \sqrt{\alpha}.$$

Posons de plus pour tout $x \in E$

$$M(x) = \sqrt{\int N^2 \circ Q(x)\, d\mu^{\otimes k}}.$$

Par définition et d'après le théorème de Fubini, l'application M est une pseudo-semi-norme sur E et on a

$$\mu\left\{x\colon M^2(x) > \frac{C^k}{(1-\alpha^{2^{1-(k+1)}})^{2k}}\right\} \leqslant \sqrt{\alpha};$$

en appliquant le lemme au rang $k = 1$ en prenant M comme pseudo-semi--norme avec $F = E$ et $Q = \mathrm{id}_E$, il vient

$$\int M^2(x)\,\mu(dx) \leqslant \frac{C^k}{(1-\alpha^{2^{1-(k+1)}})^{2k}} \times \frac{C}{(1-\sqrt{\alpha})^2} \leqslant \frac{C^{k+1}}{(1-\alpha^{2^{1-(k+1)}})^{2k+2}},$$

soit

$$\int N^2(Q)\,d\mu^{\otimes k+1} \leqslant \frac{C^{k+1}}{(1-\alpha^{2^{1-(k+1)}})^{2k+2}}.$$

C'est le résultat au rang $k+1$. ∎

APPLICATION. *Soit $\{Y(s),\ s \in S\}$ un chaos gaussien homogène découplé de degré D à valeurs dans $\boldsymbol{R}^S$, S dénombrable. Alors*

$$\boldsymbol{P}\{\sup_{s\in S}|Y(s)| > 1\} \leqslant \alpha < 1 \Rightarrow \boldsymbol{E}\sup_{s\in S}|Y(s)|^2 \leqslant K_{D,\alpha}.$$

Démonstration. Les chaos $Y(s)$ sont de la forme $\sum_i b_i(s)\,G_i$. Soit Q l'élément de $\mathscr{L}_D\big((\boldsymbol{R}^N)^D, \boldsymbol{R}^{N\times S}\big)$ défini par

$$Q_{n,s}(u^1, \ldots, u^D) = \sum_{i^* < n} b_i(s)\,U_i, \qquad U_i = u^1_{i_1}\ldots u^D_{i_D};$$

posons de plus pour tout $x \in \boldsymbol{R}^{N\times S}$,

$$\varphi_s(x) = \begin{cases} \lim_n |x_{n,s}| & \text{si elle existe,} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

On constate alors que $\sup_{s\in S}|\varphi_s(\cdot)|$ est une pseudo-semi-norme N sur $\boldsymbol{R}^{N\times S}$ et que, d'après la proposition 1.1, $N \circ Q(g^1, \ldots, g^D)$ est presque sûrement égal à $\sup_{s\in S}|Y(s)|$. On conclut facilement en appliquant le lemme précédent. ∎

Nous ajoutons à cela un calcul d'espérances conditionnelles qui nous servira plus loin:

LEMME 1.2. *Soient $Y = \sum_i b_i G_i$ un chaos gaussien découplé de degré D, $I = I^1 \times \ldots \times I^D$ un sous-ensemble de $\boldsymbol{N}^D$ et $\mathscr{B}_I$ la tribu engendrée par $\{g^d_{i_d},\ i_d \in I^d,\ d \in [1, D]\}$. Dans ces conditions*

$$\boldsymbol{E}[Y|\mathscr{B}_I] = \sum_{i\in I} b_i G_i \ \textit{p.s.}$$

Démonstration. Puisque la série définissant Y converge dans $L^2(\Omega, \mathscr{A}, \boldsymbol{P})$ et que l'espérance conditionnelle est une contraction de $L^2(\Omega, \mathscr{A}, \boldsymbol{P})$, il suffit de constater que

$$\boldsymbol{E}[G_i|\mathscr{B}_I] = \begin{cases} G_i & \text{si } i \in I, \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases}$$

or on a

$$G_i = \prod_{(d,i_d)\in[1,D]\times I^d} g^d_{i_d} \times \prod_{(d,i_d)\notin[1,D]\times I^d} g^d_{i_d};$$

le premier facteur est $\mathscr{B}_I$-mesurable et le second est centré et indépendant de $\mathscr{B}_I$; le résultat s'ensuit. ∎

L'étude de la régularité des chaos gaussiens de degré D repose sur le lemme suivant dont on trouvera les éléments de démonstration dans [1].

LEMME 1.3. *Soit* $X = X(g)$ *un chaos gaussien de degré* D.

1. *Soit* $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_D)$ *une suite de Rademacher indépendante de* $(g^1, \ldots, g^D)$. *Posons*

$$g_\varepsilon = \frac{g+\varepsilon_1 g^1 + \ldots + \varepsilon_D g^D}{\sqrt{D+1}}.$$

Alors, la variable aléatoire $(1/D!)\, \boldsymbol{E}_\varepsilon \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_D X(g_\varepsilon)$ *est un chaos gaussien découplé homogène de degré* D *noté* $\hat{X}$. *On dit qu'il est associé à* X.

2. *Soit* Z *la partie homogène de degré* D *de* X. *Posons*

$$\bar{g} = \frac{g^1 + \ldots + g^D}{\sqrt{D}}$$

et notons $\bar{\boldsymbol{E}}$ *l'espérance conditionnelle sachant* $\bar{g}$. *Alors, presque sûrement,*

$$Z(\bar{g}) = \big(D(D+1)\big)^{D/2}\, \bar{\boldsymbol{E}} \hat{X}.$$

On remarquera que g_ε et $\bar{g}$ ont même loi que g.

2. Existence d'une modification à trajectoires continues. Dans ce paragraphe et le suivant, (T, δ) est un espace métrique compact et $\mathcal{N}(T)$ désigne l'ensemble des parties dénombrables de T dans lequel on fixe une partie dénombrable dense $\mathcal{D}$.

THÉORÈME 2.1. *Soit* X *un chaos gaussien réel de degré fini* D *sur* (T, δ) *vérifiant l'hypothèse* (H) *suivante*:

(H1) X *est continu en probabilité,*

(H2) $\forall\, t \in T,\ \boldsymbol{P}\{\lim_{s\to t, s\in\mathcal{D}} X(s) = X(t)\} = 1.$

Alors X *admet une modification à trajectoires continues.*

Nous procédons par récurrence sur le degré D en montrant d'abord la validité de ce théorème pour tout chaos gaussien homogène découplé, puis pour tout chaos gaussien de degré fini.

Première étape. *Un chaos gaussien homogène découplé de degré* D *vérifiant* (H) *admet une modification à trajectoires continues.*

Soit Y un chaos gaussien homogène découplé de degré D vérifiant (H); si D vaut un, le théorème est bien connu (voir [6]); supposons-le vérifié jusqu'au degré $D-1$.

On remarque tout d'abord qu'en vertu du lemme 1.1, si le chaos Y vérifie l'hypothèse (H), il vérifie également:

(H'1) Y est continu dans L^1,

(H'2) $\forall\, t \in T,\ \lim_{\varepsilon\to 0} \boldsymbol{E} \sup_{\delta(s,t)<\varepsilon, s\in\mathcal{D}} |Y(s) - Y(t)| = 0;$

on en déduit que toute espérance conditionnelle de Y vérifie aussi (H).

On définit $i_* = \min_{1 \leqslant d \leqslant D} i_d$ (à ne pas confondre avec i^*) et on pose pour tout $t \in T$

$$S_j(t) = \sum_{i_* \leqslant j} b_i(t)\, G_i, \qquad R_j(t) = \sum_{i_* > j} b_i(t)\, G_i.$$

Ces deux séries sont convergentes au sens L^2 et on a $Y(t) = S_j(t) + R_j(t)$.

LEMME 2.1. *Pour tout $j \in N$, le chaos gaussien homogène découplé S_j admet une modification à trajectoires continues.*

Démonstration. Fixons $j \in N$; on écrira simplement $U = V$ lorsque pour tout $t \in T$, $U(t) \overset{\text{p.s.}}{=} V(t)$ et on utilisera les notations du lemme 1.2.

(a) Etant donnés deux entiers d_0 et j_0, on définit le sous-ensemble I_{d_0, j_0} de N^D comme suit:

$$I^d_{d_0, j_0} = \begin{cases} \{j_0\} & \text{si } d = d_0, \\ N & \text{sinon;} \end{cases}$$

alors le chaos $E[Y|\mathscr{B}_{I_{d_0,j_0}}]$ admet une modification à trajectoires continues. En effet, il vérifie (H) puisque c'est une espérance conditionnelle de Y et le lemme 1.2 montre que (en prenant $d_0 = D$, $j_0 = 1$ pour simplifier les notations)

$$E[Y|\mathscr{B}_{I_{D,1}}] = g^D_1\, Y^D_1,$$

où $Y^D_1 = \sum_{i \in N^{D-1}} b_{i,1}\, G_i$ est un chaos gaussien homogène découplé de degré $D-1$; la variable g^D_1 étant indépendante de Y^D_1 et intégrable, ce chaos vérifie aussi (H) et l'hypothèse de récurrence implique que Y^D_1 et par conséquent $E[Y|\mathscr{B}_{I_{D,1}}]$ admettent des modifications à trajectoires continues.

(b) On choisit l'ensemble I_1 comme suit:

$$I^d_1 = \begin{cases} [1, j] & \text{si } d = 1, \\ N & \text{sinon;} \end{cases}$$

on constate alors que

$$E[Y|\mathscr{B}_{I_1}] = \sum_{j_0=1}^{j} E[Y|\mathscr{B}_{I_{1,j_0}}];$$

d'après (a) chacun des termes du second membre a une modification à trajectoires continues et il en est de même pour $E[Y|\mathscr{B}_{I_1}]$.

(c) On itére (b) pour montrer que S_j admet une modification à trajectoires continues. Pour tout $k \in [1, D]$, on définit I_k par

$$I^d_k = \begin{cases} [1, j] & \text{si } d = k, \\ N & \text{si } d \neq k; \end{cases}$$

posons de plus $Y_0 = Y$ et $Y_k = Y_{k-1} - E[Y_{k-1}|\mathscr{B}_{I_k}]$. Le chaos Y_1 vérifie l'hypothèse (H) car Y_0 et $E[Y_0|\mathscr{B}_{I_1}]$ la vérifient; en appliquant (b) à Y_1 on montre que $E[Y_1|\mathscr{B}_{I_2}]$ admet une modification à trajectoires continues; on montre ainsi successivement que les chaos $E[Y_{k-1}|\mathscr{B}_{I_k}]$ admettent des modifications à trajectoires continues. Posant $J_k = \{i_k \leqslant j,\ \min_{l<k} i_l > j\}$, on remarque par construction des chaos Y_k que

$$E[Y_{k-1}|\mathscr{B}_{I_k}] = \lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{i\in J_k \\ i^*<n}} b_i G_i;$$

sachant que $\{J_k\}_{k=1}^{k=D}$ est une partition de $\{i_* \leqslant j\}$, on en déduit

$$S_j = \sum_{k=1}^{D} E[Y_{k-1}|\mathscr{B}_{I_k}];$$

d'où le résultat. ∎

Remarque. On notera que ce lemme 2.1 permet de simplifier notablement la preuve du théorème principal de [4].

Nous introduisons à présent les outils (voir [6]) qui vont permettre de conclure pour Y. On appelle *oscillations numériques* d'une fonction f sur (T, δ) les fonctionnelles

$$W(f, t, u) = \lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{C(t,u,\varepsilon)} |f(r)-f(s)|,$$

$$W(f, t) = \lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{C(t,\varepsilon)} |f(r)-f(s)|,$$

avec

$$C(t, u, \varepsilon) = \{(r, s) \subset \mathscr{D}:\ \delta(r, t) \vee \delta(s, t) \leqslant u,\ \delta(r, s) \leqslant \varepsilon\},$$

$$C(t, \varepsilon) = \{(r, s) \subset \mathscr{D}:\ \delta(r, t) \vee \delta(s, t) \leqslant \varepsilon\}.$$

On vérifie facilement les propriétés suivantes:

– la fonction $u \mapsto W(f, t, u)$ est croissante et $W(f, t) = \lim_{u\to 0} W(f, t, u)$;

– si g est une fonction continue sur (T, δ), alors $W(f+g, t, u) = W(f, t, u)$.

Le point crucial de la démonstration est le lemme suivant:

LEMME 2.2. *Pour tout $t \in T$ et tout $u > 0$, la variable aléatoire $W(Y, t, u)$ est presque sûrement constante.*

Démonstration. Soit $\mathscr{C}_j$ la tribu engendrée par la famille $\{g_k^d;\ k \leqslant j,\ 1 \leqslant d \leqslant D\}$ et $\mathscr{C}$ la tribu complétée engendrée par $\bigcup_j \mathscr{C}_j$. Le chaos Y est clairement $\mathscr{C}$-mesurable et il en est de même pour $W(Y, t, u)$, ceci pour tout (t, u) dans $T \times \boldsymbol{R}^+$. Mais d'après le lemme 2.1, pour tout entier j, on a presque sûrement

$$W(Y, t, u) = W(R_j, t, u);$$

on en déduit que $W(Y, t, u)$ est indépendante de $\mathscr{C}_j$ pour tout j et par conséquent indépendante de $\mathscr{C}$. La variable aléatoire $W(Y, t, u)$ est à la fois $\mathscr{C}$-mesurable et indépendante de $\mathscr{C}$, elle est donc presque sûrement constante. ∎

On procède maintenant suivant les schémas classiques.

LEMME 2.3. $\boldsymbol{P}\{\forall t \in T,\ W(Y, t) = 0\} = 1$.

Démonstration. D'après le lemme 2.2, pour tout $(t, u) \in T \times \boldsymbol{R}^+$, il existe un nombre $\alpha(t, u) \in \bar{\boldsymbol{R}}$ tel que

$$\boldsymbol{P}\{W(Y, t, u) = \alpha(t, u)\} = 1;$$

sachant que la fonction $u \mapsto \alpha(t, u)$ est croissante, on pose $\alpha(t) = \lim_{u \to 0} \alpha(t, u)$. Posons également

$$\Omega_0 = \{\forall s \in \mathscr{D},\ \forall u \in \boldsymbol{Q}^+,\ W(Y, s, u) = \alpha(s, u)\}.$$

D'après ce qui précède, c'est un ensemble mesurable presque sûr et fixant $\omega \in \Omega_0$, on vérifie que $\forall (s, t, u) \in T \times T \times \boldsymbol{R}^+$,

$$\delta(s, t) \leqslant u \Rightarrow \begin{cases} W(Y(\omega), s, u) \leqslant W(Y(\omega), t, 2u), \\ \alpha(s, u) \leqslant \alpha(t, 2u); \end{cases}$$

comme $\mathscr{D}$ est dense dans T, $\boldsymbol{Q}$ dense dans $\boldsymbol{R}$ et les applications $u \mapsto W(Y(\omega), t, u)$ et $u \to \alpha(t, u)$ croissantes, on déduit de cette implication que

$$\forall t \in T,\ W(Y(\omega), t) = \lim_{u \to 0} W(Y(\omega), t, u) = \lim_{u \to 0} \alpha(t, u) = \alpha(t).$$

Il reste à montrer que la fonction α est identiquement nulle sur T. D'après l'hypothèse (H2) et ce qui précède, on sait que pour tout $t \in T$,

$$\boldsymbol{P}\{\omega\colon W(Y(\omega), t) = 0\} = 1, \qquad \boldsymbol{P}\{\omega\colon W(Y(\omega), t) = \alpha(t)\} = 1;$$

en choisissant ω dans l'intersection de ces deux ensembles presque sûrs, il vient $\alpha(t) = 0$. ∎

On peut à présent construire une modification à trajectoires continues pour le chaos Y. Prenons ω dans l'ensemble Ω_0 presque sûr déterminé au lemme précédent: pour tout $t \in T$, la famille $\{Y(\omega, s),\ s \in B(t, \varepsilon) \cap \mathscr{D}\}_{\varepsilon \downarrow 0}$ est un filtre de Cauchy dans $\boldsymbol{R}$; il converge donc vers une limite $L(\omega, t)$. On pose alors

$$Y'(\omega, t) = \begin{cases} L(\omega, t) & \text{si } \omega \in \Omega_0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La continuité en probabilité assure que la fonction aléatoire Y' est une modification de Y puisqu'on a alors $Y(t) = L(t)$ presque sûrement; Y' est de plus à trajectoires continues sur T car pour tout $\omega \in \Omega_0$ et $t \in B_\delta(t_0, \varepsilon)$, on a

$$\begin{aligned} &|L(\omega, t) - L(\omega, t_0)| \\ &\qquad \leqslant |L(\omega, t) - L(\omega, r)| + \sup_{C(t_0, \varepsilon)} |L(\omega, r) - L(\omega, s)| + |L(\omega, s) - L(\omega, t_0)|, \end{aligned}$$

où l'on peut choisir r et s arbitrairement dans $B_\delta(t_0, \varepsilon) \cap \mathscr{D}$, ce qui permet de conclure. ∎

Deuxième étape. *Démonstration du théorème pour un chaos gaussien de degré fini.*

Démonstration par récurrence sur D. Le théorème est trivial si D est nul; supposons-le vérifié au rang $D-1$ et considérons un chaos gaussien X de degré D vérifiant l'hypothèse (H). D'après le lemme 1.3, le chaos gaussien homogène découplé $\hat{X}$ associé à X est de la forme $\sum_\varepsilon \alpha_\varepsilon X(g_\varepsilon)$, où ε parcourt l'ensemble fini $\{-1, 1\}^D$, il vérifie donc l'hypothèse (H). La première étape permet de conclure que $\hat{X}$ admet une modification à trajectoires continues. Montrons ensuite que la partie homogène Z de degré D de X, admet aussi une modification à trajectoires continues. Pour cela, on utilise la proposition suivante (cf. [9]):

Proposition 2.1. *Soit V une fonction aléatoire sur (T, δ). Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *V admet une modification à trajectoires continues.*

(ii) *Pour tout $S \in \mathcal{N}(T)$,*

$$P\{\lim_{\eta\to 0} \sup_{\substack{\delta(r,s)<\eta \\ r,s\in S}} |V(r)-V(s)| = 0\} = 1.$$

(iii) *V est continue en probabilité et*

$$P\{\lim_{\eta\to 0} \sup_{\substack{\delta(r,s)<\eta \\ r,s\in \mathscr{D}}} |V(r)-V(s)| = 0\} = 1.$$

C'est le point (ii) que nous montrons pour Z; l'opérateur $\bar{E}$ étant l'espérance conditionnelle sachant $\bar{g}$, l'inégalité de Jensen conditionnelle implique en effet que

$$\sup_{\substack{\delta(r,s)<\eta \\ r,s\in S}} |\bar{E}\hat{X}(r)-\bar{E}\hat{X}(s)| \leqslant \bar{E} \sup_{\substack{\delta(r,s)<\eta \\ r,s\in S}} |\hat{X}(r)-\hat{X}(s)|,$$

et d'après le lemme 1.3

$$\sup_{\substack{\delta(r,s)<\eta \\ r,s\in S}} |Z(\bar{g})(r)-Z(\bar{g})(r)| \leqslant (D(D+1))^{D/2} \bar{E} \sup_{\substack{\delta(r,s)<\eta \\ r,s\in S}} |\hat{X}(r)-\hat{X}(s)|;$$

en intégrant et en faisant $\eta \to 0$, on obtient

$$\lim_{n\to 0} E \sup_{\substack{\delta(r,s)<\eta \\ r,s\in S}} |Z(r)-Z(r)| \leqslant (D(D+1))^{D/2} \lim_{n\to 0} E \sup_{\substack{\delta(r,s)<\eta \\ r,s\in S}} |\hat{X}(r)-\hat{X}(s)|;$$

la propriété (ii) que $\hat{X}$ vérifie et le lemme d'intégrabilité assurent que le second membre de cette dernière inégalité est nul; le chaos Z a donc une modification à trajectoires continues notée $\bar{Z}$. Soit Y le chaos gaussien de degré $D-1$ obtenu en soustrayant à X sa partie homogène Z de degré D; ce chaos vérifie l'hypothèse (H) et d'après l'hypothèse de récurrence, il admet une modification à trajectoires continues notée $\bar{Y}$. On conclut en remarquant que $\bar{Y}+\bar{Z}$ est une modification à trajectoires continues de X. ■

REFERENCES

[1] A. Arcones and E. Giné, *On decoupling, series expansions and tail behavior of chaos processes*, J. Theoret. Probab. 6 (1993), pp. 101–122.

[2] C. Borell, *Tail probabilities in Gauss space*, Lecture Notes in Math. 644 (1978), pp. 73–82.

[3] — *On polynomial chaos and integrability*, Probab. Math. Statist. 3 (1984), pp. 191–203.

[4] X. Fernique, *Éléments d'analyse des chaos gaussiens*, ibidem 15 (1995), pp. 291–300.

[5] — *Gaussian random vectors and their reproducing kernel Hilbert spaces*, Technical Report, University of Ottawa, 1985.

[6] K. Itô and M. Nisio, *On the oscillation functions of Gaussian processes*, Math. Scand. 22 (1968), pp. 209–223.

[7] S. Kwapień, *Decoupling inequalities for polynomial chaos*, Ann. Probab. 15 (1987), pp. 1062–1071.

[8] M. Ledoux and M. Talagrand, *Probability in Banach Spaces*, Springer, New York 1991, pp. 64–65.

[9] J. Neveu, *Bases mathématiques du calcul des probabilités*, Masson, Paris 1964.

Université Louis Pasteur
Département de Mathématique
7. rue René Descartes
67084 Strasbourg Cedex
France

Received on 25.9.1995