PROBABILITY
AND
MATHEMATICAL STATISTICS
Vol. 17, Fasc. 2 (1997), pp. 259–275

EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES STOCHASTIQUES RÉTROGRADES MULTIVOQUES

PAR

MODESTE N'ZI (ABIDJAN) ET YOUSSEF OUKNINE (MARRAKECH)

Abstract. An existence and uniqueness result is proved for a multidimensional backward stochastic differential equation associated with a multivalued maximal monotone operator A. We prove a general result for the uniqueness. The existence is proved under suitable integrability conditions. Our approach uses the Yosida approximation of the maximal operator A. The second proof of the existence and uniqueness result is given by the so-called backward Skorokhod problem.

1. INTRODUCTION

La théorie des équations différentielles stochastiques rétrogrades trouve ses applications en mathématiques financières, voir El Karoui et al. [4]. Cette théorie très récente a été introduite par Pardoux et Peng [9] pour donner une représentation "probabiliste" des solutions d'équations aux dérivées partielles quasi-linéaires, généralisant ainsi la formule de Feymann–Kac. L'extension au cas réfléchi est fait dans El Karoui et al. [3]. Dans ce travail, on s'intéresse à la résolution d'une inclusion différentielle stochastique rétrograde associée à un opérateur maximal monotone multivoque A de $\boldsymbol{R}^d$, $d \in \boldsymbol{N}^*$. La formulation précise du problème sera précisée ultérieurement. Le problème abordé dans le présent article est l'extension multidimensionnelle des travaux récents de Ouknine [8] et N'zi et Ouknine [7], qui traitent le cas unidimensionnel uniquement.

En dimension un, tout opérateur maximal monotone provient nécessairement du sous-différentiel d'une fonction convexe s.c.i. propre ϕ, ce qui rend les calculs assez simples. Dans Ouknine [8], le problème d'existence et d'unicité a été résolu en utilisant les lemmes de comparaison et une sorte de pénalisation. En dimension $d > 1$, la comparaison des solutions n'a plus de sens, ce qui rend les choses un peu plus difficiles. On se propose dans le présent travail de montrer l'existence et l'unicité de la solution d'une inclusion différentielle stochastique rétrograde, associée à un opérateur maximal monotone multivoque de $\boldsymbol{R}^d$ pour tout $d \in \boldsymbol{N}^*$.

Le résultat d'existence est obtenu, via la pénalisation, sous une hypothèse assez générale, dite d'intégrabilité. Il faut noter que cette condition d'intégrabilité est vérifiée pour une classe assez large d'opérateurs maximaux monotones, comprenant notament ceux qui sont sous-différentiels de fonctions convexes propres semi-continues inférieurement. On procède par approximation, en remplaçant l'opérateur multivoque A par son approximé—Yosida. La suite des solutions approchées converge vers la solution du problème. Une deuxième approche de l'existence et d'unicité est proposée à la fin de l'article. Dans le cas de la réflexion sur l'octant $\boldsymbol{R}^d_+$, nous résolvons ceci par le biais du problème de Skorokhod rétrograde. Pour illustrer les équations rétrogrades multivoques, on en donne une application en mathématiques financières. Enfin, les propriétés des opérateurs maximaux monotones multivoques que nous allons utiliser sont rappelées en appendice.

2. EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES STOCHASTIQUES RÉTROGRADES MULTIVOQUES

DÉFINITION 1. On se donne
- une variable aléatoire $\xi \in L^2(\Omega, F_1, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{R}^d)$;
- un opérateur maximal monotone multivoque A, de $\boldsymbol{R}^d$, tel que

$$\operatorname{Int}(D(A)) \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \xi \in \overline{D(A)};$$

- une fonction

$$f: \Omega \times [0, 1] \times \boldsymbol{R}^d \times \boldsymbol{R}^{d \times k} \mapsto \boldsymbol{R}^d,$$

qui vérifie les conditions suivantes:

(i) $\forall (y, z) \in \boldsymbol{R}^d \times \boldsymbol{R}^{d \times k}$, $(\omega, t) \mapsto f(\omega, t, y, z)$ est F_t-progressivement mesurable,

(ii) $\boldsymbol{E}\left[\int_0^1 |f(t, 0, 0)|^2\, dt\right] < +\infty$,

(iii) $\forall \omega \in \Omega$, $\forall y, y' \in \boldsymbol{R}^d$, $\forall z, z' \in \boldsymbol{R}^{d \times k}$,

$$|f(t, y, z) - f(t, y', z')| \leqslant C(|y - y'| + |z - z'|).$$

On appelle *solution de l'équation différentielle stochastique rétrograde multivoque* (EDSRM), associée aux données (ξ, A, f), tout triplet $\{(Y_t, Z_t, K_t): 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ de processus F_t-progressivement mesurables à valeurs dans $\boldsymbol{R}^d \times \boldsymbol{R}^{d \times k} \times \boldsymbol{R}^d$, qui vérifient les conditions suivantes:

$$\boldsymbol{E}\left[\sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |Y_t|^2\right] < +\infty, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{E}\left[\int_0^1 |Z_t|^2\, dt\right] < +\infty, \tag{2}$$

(3) $$K \text{ est continu et } E\left[\int_0^1 d|K|_t\right] < +\infty,$$

(4) $$Y_t = \xi + \int_t^1 f(s, Y_s, Z_s) - \int_t^1 Z_s\, dW_s + K_1 - K_t,$$

(5) $$Y_t \in \overline{D(A)},$$

$K_0 = 0$ et pour tout couple (α, β), de processus continus et progressivement mesurables, définis sur (Ω, F, P) et vérifiant

(6) $$\forall u \in [0, 1],\ (\alpha_u, \beta_u) \in \mathrm{Gr}(A),$$

la mesure $\langle Y_u - \alpha_u, dK_u + \beta_u du\rangle$ est presque surement (p.s.) négative sur $\boldsymbol{R}^+$.

Le problème précédent sera désigné par EDSRM(ξ, A, f).

Unicité de la solution. On peut maintenant énoncer le résultat fondamental d'unicité pour l'équation différentielle stochastique rétrograde associée à un opérateur maximal monotone multivoque de $\boldsymbol{R}^d$.

Pour tout $d \in N^*$, on a

THÉORÈME 2 (unicité). *Pour toutes données (ξ, A, f) qui satisfaient les hypothèses précédentes, il y a au plus une solution du problème* EDSRM(ξ, A, f).

Remarques. Ce théorème a été prouvé par Gegout-Petit [5] dans le cas particulier $A = \partial I_D$, où D est un convexe fermé non-vide de $\boldsymbol{R}^d$. Le cas unidimensionnel est traité par le deuxième auteur dans Ouknine [8], en utilisant les théorèmes de comparaison. Pour prouver l'unicité de la solution nous aurons besoin d'un lemme de monotonie qui étend le théorème de comparaison obtenu dans Ouknine [8].

LEMME 3. *Etant donné un opérateur maximal monotone multivoque A de $\boldsymbol{R}^d$. Soient (x, k), (x', k') des fonctions continues sur $\boldsymbol{R}^+$ à valeurs dans $\boldsymbol{R}^d$, telles que les propriétés suivantes soient vérifiées*:

(i) *k, k' sont à variation finie,*
(ii) *x, x' sont à valeurs dans $\overline{D(A)}$,*
(iii) *les mesures*

$$\langle x_u - \alpha_u, dk_u + \beta_u du\rangle \quad \text{et} \quad \langle x'_u - \alpha_u, dk'_u + \beta_u du\rangle$$

sont négatives sur $\boldsymbol{R}^+$ pour tout couple de fonctions continues (α, β) vérifiant

$$\forall u \in [0, 1],\ (\alpha_u, \beta_u) \in \mathrm{Gr}(A).$$

Alors la mesure $\langle x_u - x'_u, dk_u - dk'_u\rangle$ est négative sur $\boldsymbol{R}^+$.

Démonstration. La preuve de ce lemme est la même que celle donnée dans Cépa [2] pour les équations différentielles stochastiques multivoques. Par crainte de ne pas être complet, nous en donnons la preuve complète.

Soient (x, k), (x', k') vérifiant les hypothèses du lemme. Pour tout $n \in N^*$, on pose

$$\alpha_u^n = J_n\left(\frac{x_u + x'_u}{2}\right), \qquad \beta_u^n = A_n\left(\frac{x_u + x'_u}{2}\right).$$

Alors les fonctions α^n et β^n sont continues et à valeurs dans $\mathrm{Gr}(A)$, car $A_n(x) \in A(J_n(x))$ pour tout $x \in \boldsymbol{R}^d$. Il en résulte donc que les mesures

$$\langle x_u - \alpha_u^n, dk_u + \beta_u^n \, du\rangle \quad \text{et} \quad \langle x'_u - \alpha_u^n, dk'_u + \beta_u^n \, du\rangle$$

sont p.s. négatives sur $\boldsymbol{R}^+$. En ajoutant et retranchant $(x_u + x'_u)/2$ dans le premier membre de chacun des produits scalaires, il vient

$$\left\langle \frac{x_u - x'_u}{2} + \frac{1}{n} A_n\left(\frac{x_u + x'_u}{2}\right), dk_u + A_n\left(\frac{x_u + x'_u}{2}\right) du \right\rangle \leqslant 0,$$

$$\left\langle \frac{x'_u - x_u}{2} + \frac{1}{n} A_n\left(\frac{x_u + x'_u}{2}\right), dk'_u + A_n\left(\frac{x_u + x'_u}{2}\right) du \right\rangle \leqslant 0.$$

En sommant ces équations, membre à membre, il vient que la mesure

$$\left\langle \frac{x_u - x'_u}{2}, dk_u - dk'_u \right\rangle - \frac{2}{n}\left| A_n\left(\frac{x_u + x'_u}{2}\right)\right|^2 du$$
$$+ \left\langle \frac{x_u + x'_u}{2} - J_n\left(\frac{x_u + x'_u}{2}\right), dk_u + dk'_u \right\rangle$$

est p.s. négative. Par conséquent:

$$\langle x_u - x'_u, dk_u - dk'_u\rangle \leqslant -2\left\langle \frac{x_u + x'_u}{2} - J_n\left(\frac{x_u + x'_u}{2}\right), dk_u + dk'_u \right\rangle,$$

puis en passant à la limite quand $n \to +\infty$ d'après la convergence

$$\forall x \in \boldsymbol{R}^d, \; J_n(x) \to \mathrm{proj}_{\overline{D(A)}}(x)$$

et grâce à la convexité de $\overline{D(A)}$ on a $(x_u + x'_u)/2 \in \overline{D(A)}$. On obtient le résultat désiré.

Comme en dimension un, le résultat d'unicité est conséquence de ce lemme de monotonie. C'est ce que nous allons voir maintenant.

Démonstration du théorème 2. Supposons que (Y^1, Z^1, K^1), (Y^2, Z^2, K^2) soient deux solutions de l'EDSRM(ξ, A, f). On écrivant la formule d'Itô pour le processus $|Y_t^1 - Y_t^2|^2$, il vient

$$|Y_t^1 - Y_t^2|^2 + \int_t^1 |Z_s^1 - Z_s^2|^2 \, ds = 2\int_t^1 (Y_s^1 - Y_s^2)^* [f(s, Y_s^1, Z_s^1) - f(s, Y_s^2, Z_s^2)] \, ds$$
$$-2\int_t^1 (Y_s^1 - Y_s^2)^* (Z_s^1 - Z_s^2) \, dB_s + 2\int_t^1 (Y_s^1 - Y_s^2)^* (dK_s^1 - dK_s^2).$$

En utilisant le lemme de monotonie, on obtient

$$|Y_t^1-Y_t^2|^2+\int_t^1|Z_s^1-Z_s^2|^2\,ds \leqslant 2\int_t^1(Y_s^1-Y_s^2)^*[f(s,\,Y_s^1,\,Z_s^1)-f(s,\,Y_s^2,\,Z_s^2)]\,ds$$
$$-2\int_t^1(Y_s^1-Y_s^2)^*(Z_s^1-Z_s^2)\,dB_s.$$

En prenant l'espérance des deux membres de cette inégalité, tenant compte du fait que $\int_0^{\cdot}(Y_s^1-Y_s^2)^*(Z_s^1-Z_s^2)\,dB_s$ est une martingale continue de carré intégrable, et en utilisant le fait que f est lipschitzienne, on obtient

$$E\,|Y_t^1-Y_t^2|^2+E\int_t^1|Z_s^1-Z_s^2|^2\,ds \leqslant 2C\,E\int_t^1|Y_s^1-Y_s^2|\,[|Y_s^1-Y_s^2|+|Z_s^1-Z_s^2|]\,ds$$
$$\leqslant 2C\,E\int_t^1|Y_s^1-Y_s^2|^2\,ds+CE\int_t^1(a^{-2}\,|Z_s^1-Z_s^2|^2+a^2\,|Y_s^1-Y_s^2|^2)\,ds.$$

Si l'on choisit a tel que $C/a^2 \leqslant 1$, on a

$$E\,|Y_t^1-Y_t^2|^2 \leqslant CE\int_t^1|Y_s^1-Y_s^2|^2\,ds.$$

Le lemme de Gronwall entraîne

$$\forall 0 \leqslant t \leqslant 1,\ \ Y_t^1 = Y_t^2 \ \text{ p.s.}$$

et par suite $Z^1 = Z^2$ et $K^1 = K^2$.

Existence de la solution. On se propose de montrer l'existence d'une solution forte pour l'EDSRM $(\xi,\,A,f)$. La méthode utilisée est l'approximation par pénalisation. Cette technique est traitée dans le cas unidimensionnel dans Ouknine [8] et N'zi et Ouknine [7].

Pour tout $n\in N^*$, on considère l'équation différentielle stochastique rétrograde univoque:

(7) $$Y_t^n = \xi+\int_t^1 f(s,\,Y_s^n,\,Z_s^n)\,ds-\int_t^1 A_n(Y_s^n)\,ds-\int_t^1 Z_s^n\,dW_s.$$

On note

$$K_0^n = 0,\qquad K_1^n-K_t^n = -\int_t^1 A_n(Y_s^n)\,ds.$$

Le terme K^n va pénaliser la solution lorsqu'elle sort de $D(A)$. Dans la suite, nous allons montrer que le triplet $(Y^n,\,Z^n,\,K^n)$ converge, quand n tend vers l'infini, vers la solution du problème EDSRM $(\xi,\,A,f)$. Pour cela, nous avons besoin du lemme élémentaire suivant:

LEMME 4 (Cépa [2]). *Il existe $a\in \mathbf{R}^d$, $\gamma > 0$, $\mu \geqslant 0$ (ne dépendant que de A) tels que pour tout $n\in N^*$ et tout $x\in \mathbf{R}^d$ on a*

$$\langle A_n(x),\,x-a\rangle \geqslant \gamma\,|A_n(x)|-\mu\,|x-a|-\gamma\mu.$$

Estimations à priori. Prenons a le point de $\mathbb{R}^d$ qui vérifie la condition du lemme 4. Alors par la formule d'Itô on a

$$|Y_t^n-a|^2+\int_t^1 |Z_s^n|^2\,ds = |\xi-a|^2+2\int_t^1 (Y_s^n-a)^* f(s,\,Y_s^n,\,Z_s^n)\,ds$$
$$-2\int_t^1 (Y_s^n-a)^* Z_s^n\,dW_s-2\int_t^1 (Y_s^n-a)^* A_n(Y_s^n)\,ds.$$

Compte tenu du lemme précédent, en prenant l'espérance mathématique des deux membres de l'égalité, on obtient

$$E|Y_t^n-a|^2+E\int_t^1 |Z_s^n|^2\,ds \leqslant E|\xi-a|^2+2E\int_t^1 (Y_s^n-a)^* f(s,\,Y_s^n,\,Z_s^n)\,ds$$
$$\leqslant -2\gamma E\int_t^1 |A_n(Y_s^n)|\,ds+2\mu E\int_t^1 |Y_s^n-a|\,ds+\gamma\mu.$$

Il en résulte donc que

$$E|Y_t^n-a|^2+E\int_t^1 |Z_s^n|^2\,ds$$
$$\leqslant E|\xi-a|^2+\gamma\mu+2CE\int_t^1 |Y_s^n-a|\big(2\mu+|f(s,\,a,\,0)|+|Y_s^n-a|+|Z_s^n|\big)\,ds,$$

$$E|Y_t^n-a|^2+E\int_t^1 |Z_s^n|^2\,ds$$
$$\leqslant CE\int_t^1 \big(4\mu^2+|f(s,\,a,\,0)|^2+(1+2\alpha^2)|Y_s^n-a|^2\big)\,ds+CE\int_t^1 \frac{1}{2\alpha^2}|Z_s^n|^2\,ds.$$

En prenant $C/2\alpha^2 \leqslant \frac{1}{2}$, on obient

$$E|Y_t^n-a|^2+\frac{1}{2}E\int_t^1 |Z_s^n|^2\,ds \leqslant C\big(1+E\int_t^1 |Y_s^n-a|^2\big).$$

Par le lemme de Gronwall, on obtient

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant 1} E|Y_t^n-a|^2 \leqslant C\exp C$$

et par suite on a

$$\sup_{n\in N^*} E\int_0^1 |Z_s^n|^2\,ds < +\infty.$$

En utilisant l'inégalité de Burkholder–Davis–Gundy, on obtient

$$\sup_{n\in N^*} E\sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |Y_t^n|^2 < +\infty.$$

Nous allons utiliser ces estimations pour prouver la

PROPOSITION 5. *La variation totale de K_n est bornée dans L^1 par une constante indépendante de n, i.e.*

$$\sup_{n\in N^*} E\int_0^1 |A_n(Y_s^n)|\,ds < +\infty. \tag{8}$$

Démonstration. Le lemme 4 et la formule (7) nous donnent

$$E\int_t^1 |A_n(Y_s^n)|\,ds \leqslant CE\Big(|\xi-a|^2+2\int_t^1 (Y_s^n-a)^* f(s,\, Y_s^n,\, Z_s^n)\,ds-2\int_t^1 (Y_s^n-a)^* Z_s^n\,dW_s\Big).$$

L'inégalité de Burkholder–Davis–Gundy permet d'avoir

$$E\Big|\int_0^1 (Y_s^n-a)^* Z_s^n\,dW_s\Big|^2 \leqslant CE\int_0^1 |Y_s^n-a|^2\,|Z_s^n|^2\,ds \leqslant C\big(E\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|Y_t^n-a|^2\big)\Big(\sup_{n\in N^*} E\int_0^1 |Z_s^n|^2\,ds\Big) < +\infty.$$

La proposition ci-dessous donne une condition suffisante pour assurer la convergence de la suite approximante $(Y^n,\, Z^n,\, K^n)$.

PROPOSITION 6. *Si on suppose de plus que*

$$\sup_{n\in N^*} E\int_0^1 |A_n(Y_s^n)|^2\,ds < +\infty, \tag{9}$$

alors pour tout $(n,\, m)\in N^*$ on a

$$E\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|Y_t^n-Y_t^m|^2+\frac{1}{2}\,E\int_0^1 |Z_s^n-Z_s^m|^2\,ds \leqslant C\Big(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\Big).$$

Avant de donner la preuve de cette proposition, nous allons donner quelques conditions suffisantes pour assurer (9).

Remarque. (i) La condition (9) est visiblement vérifiée si

$$|A^0(x)| \leqslant C(1+|x|),$$

ce qui exige en particulier que $D(A) = R^d$; plus généralement, si

$$\xi\in L^{2k}(\Omega,\, F_1,\, P,\, R^d) \quad \text{et} \quad E\Big[\int_0^1 |f(t,\, 0,\, 0)|^{2k}\,dt\Big] < +\infty \quad (k\geqslant 1).$$

La condition (9) est vérifiée si

$$|A^0(x)| = \min\{|y|:\ y\in A(x)\} \leqslant C(k)(1+|x|^k).$$

(ii) Un autre cas, très important, est celui de réflexion sur un convexe fermé, C, d'intérieur non-vide. Cette situation correspond à

$$A_n(x) = n\big(x-\mathrm{proj}_C(x)\big),$$

qui est le sous-différentiel de la fonction

$$(I_C)_n(x) = \frac{n}{2}\,|x - \mathrm{proj}_C(x)|^2$$

(voir Brézis [1], p. 46). Ce cas est traité dans la thèse de Gegout-Petit [5], p. 80, lemme 8.2.3. Plus généralement, si $A = \partial\Phi$, où Φ est une fonction convexe propre semi-continue inférieurement, alors la condition (9) est vérifiée (appliquer la formule d'Itô à la semi-martingale $A_n(Y_n)$).

Démonstration de la proposition 6. Par la formule d'Itô, il vient

$$\begin{aligned}|Y_t^n - Y_t^m|^2 + \int_t^1 |Z_s^n - Z_s^m|^2\,ds &= 2\int_t^1 (Y_s^n - Y_s^m)^*\,[f(s, Y_s^n, Z_s^n) - f(s, Y_s^m, Z_s^m)]\,ds \\ &\quad + 2\int_t^1 (Y_s^n - Y_s^m)^*(Z_s^n - Z_s^m)\,dB_s - 2\int_t^1 (Y_s^n - Y_s^m)^*\,A^n(Y_s^n)\,ds \\ &\quad + 2\int_t^1 (Y_s^n - Y_s^m)^*\,A^m(Y_s^m)\,ds.\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}E\,|Y_t^n - Y_t^m|^2 + E\int_t^1 |Z_s^n - Z_s^m|^2\,ds &\leqslant 2C\,E\int_t^1 \left(|Y_t^n - Y_t^m|^2 + |Y_t^n - Y_t^m|\,|Z_s^n - Z_s^m|\right)ds \\ &\quad - 2\int_t^1 (Y_s^n - Y_s^m)^*\left(A^n(Y_s^n) - A^m(Y_s^m)\right)ds.\end{aligned}$$

En utilisant le fait que

$$I = J_n + \frac{1}{n}A_n = J_m + \frac{1}{m}A_m, \qquad A^m(Y_s^m) \in A\left(J_m(Y_s^m)\right), \qquad A^n(Y_s^n) \in A\left(J_n(Y_s^n)\right),$$

on a

$$\begin{aligned}&-(Y_s^n - Y_s^m)^*\left(A^n(Y_s^n) - A^m(Y_s^m)\right) \\ &\quad = -\langle A^n(Y_s^n) - A^m(Y_s^m),\, J_n(Y_s^n) - J_m(Y_s^m)\rangle - \left\langle A^n(Y_s^n) - A^m(Y_s^m),\, \frac{1}{n}A_n(Y_s^n) - \frac{1}{m}A_m(Y_s^m)\right\rangle \\ &\quad \leqslant -\left\langle A^n(Y_s^n) - A^m(Y_s^m),\, \frac{1}{n}A_n(Y_s^n) - \frac{1}{m}A_m(Y_s^m)\right\rangle.\end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned}&-\left\langle A^n(Y_s^n) - A^m(Y_s^m),\, \frac{1}{n}A_n(Y_s^n) - \frac{1}{m}A_m(Y_s^m)\right\rangle \\ &\quad = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)\langle A^n(Y_s^n),\, A^m(Y_s^m)\rangle - \frac{1}{n}|A_n(Y_s^n)|^2 - \frac{1}{m}|A_m(Y_s^m)|^2 \\ &\quad \leqslant \frac{1}{4n}|A_n(Y_s^n)|^2 + \frac{1}{4m}|A_m(Y_s^m)|^2.\end{aligned}$$

Cette dernière inégalité est conséquence de

$$\forall x \geqslant 0,\ \forall y \geqslant 0,\ xy \leqslant \tfrac{1}{4}x^2 + y^2.$$

Il en résult donc que

$$E|Y_t^n - Y_t^m|^2 + E\int_t^1 |Z_s^n - Z_s^m|^2\, ds \leqslant 2C\, E\int_t^1 \left((1+\alpha)|Y_t^n - Y_t^m|^2 + \frac{1}{\alpha}|Z_s^n - Z_s^m|^2\right)$$
$$+ E\int_t^1 \left(\frac{1}{4n}|A_n(Y_s^n)|^2 + \frac{1}{4m}|A_m(Y_s^m)|^2\right) ds.$$

En choisit $2C/\alpha < \frac{1}{2}$, la condition d'intégrabilité et le lemme de Gronwall permet d'avoir

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} E|Y_t^n - Y_t^m|^2 + \frac{1}{2} E\int_t^1 |Z_s^n - Z_s^m|^2\, ds \leqslant C\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right).$$

En utilisant l'inégalité de Burkholder–Davis–Gundy, on obtient

$$E \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |Y_t^n - Y_t^m|^2 + \frac{1}{2} E\int_t^1 |Z_s^n - Z_s^m|^2\, ds \leqslant C\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right).$$

La suite $(Y^n, Z^n)_{n \in N^*}$ est une suite de Cauchy dans l'espace de Banach des processus (Y, Z) muni de la norme

$$\|(Y, Z)\| = E \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |Y_t|^2 + \frac{1}{2} E\int_0^1 |Z_s|^2\, ds.$$

On peut donc définir les processus suivants:

$$Y = \lim_{n \to +\infty} Y_n \quad \text{et} \quad Z = \lim_{n \to +\infty} Z_n.$$

En revenant à l'équation différentielle stochastique rétrograde vérifiée par $(Y^n, Z^n)_{n \in N^*}$, on voit que le processus (K_n) converge uniformément dans $L^2(\Omega)$ vers une limite K:

$$K_\cdot = \lim_{n \to +\infty} \int_\cdot^1 A^n(Y_s^n)\, ds$$

dans le sens où

$$E \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |K_t^n - K_t|^2 = 0.$$

La suite de ce travail est consacrée à l'existence de la solution de notre problème EDSRM(ξ, A, f).

THÉORÈME 7 (existence). *Si en plus des données faites sur* (ξ, A, f), *la condition d'intégrabilité* (9) *est vérifiée, alors il y a existence de la solution de* EDSRM(ξ, A, f).

Démonstration. Nous allons montrer que le triplet, obtenu précédemment, est solution du problème EDSRM (ξ, A, f). On a clairement Y et K sont continus, comme limite uniforme de sous-suites de processus continus. Le lemme de Fatou et l'estimation (10) montrent que le processus $(K_t)_{0 \leqslant t \leqslant 1}$ est p.s. à variation bornée sur $[0, 1]$. Par passage à la limite dans l'équation (7), on voit que le triplet $\{(Y_t, Z_t, K_t);\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ satisfait l'équation (14).

Montrons que la mesure $\langle Y_u - \alpha_u,\ dK_u + \beta_u\, du\rangle$ est p.s. négative sur $[0, 1]$ pour tout couple de fonctions (α, β) continues, à valeurs dans $\boldsymbol{R}^d$ et telles que $(\alpha_u, \beta_u) \in \mathrm{Gr}(A)$ pour tout $u \in [0, 1]$.

Pour tout $n \in N^*$, la mesure $\langle J_n(Y_n(t)) - \alpha(t),\ dK_n(t) + \beta(t)\, dt\rangle$ est p.s. négative sur $[0, 1]$. Pour passer à la limite nous avons besoin d'un lemme très utile dû à Saisho [10].

LEMME 8. *Soit $(k^n)_{n \in N}$ une suite de fonctions de $[0, 1]$ à valeurs dans $\boldsymbol{R}^d$, continues à variation finie telles que*

(i) $\sup_n \mathrm{Var}(k^n) \leqslant C < +\infty$;

(ii) $k^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} k$ *uniformément sur* $[0, 1]$;

et soit $(f^n)_{n \in N}$ une suite de fonctions de $[0, 1]$ à valeurs dans $\boldsymbol{R}^d$, continues telles que

(iii) $f^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f$ *uniformément sur* $[0, 1]$.

Alors pour tout $t \in [0, 1]$ on a

$$\int_0^t \langle f^n(s), dk^n(s)\rangle \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_0^t \langle f(s), dk(s)\rangle.$$

En utilisant des sous-suites, on peut supposer que

$$\sup_{t \in [0,1]} |K_t^n - K_t| \to 0, \qquad \sup_{t \in [0,1]} |Y_t^n - Y_t| \to 0.$$

Puisque J_n est une contraction, il est clair que $J_n(Y_n(\cdot))$ converge vers Y dans $C[0, 1]$. En utilisant le lemme 8, et en passant à la limite dans la relation

$$\langle J_n(Y_n(t)) - \alpha(t),\ dK_n(t) + \beta(t)\, dt\rangle \leqslant 0,$$

nous avons le résultat désiré.

Enfin, pour achever la preuve d'existence, nous montrons que

$$\boldsymbol{P}\{Y_t \in \overline{\mathrm{Dom}(A)}:\ 0 \leqslant t < +\infty\} = 1.$$

Comme le processus (Y_t) est continue, il suffit de montrer que

$$\forall t \geqslant 0,\ \boldsymbol{P}\{Y_t \in \overline{\mathrm{Dom}(A)}\} = 1.$$

Supposons au contraire qu'il existe $\infty > t_0 > 0$ et $B_0 \in F$ tels que $\boldsymbol{P}(B_0) > 0$ et $Y_{t_0}(\omega) \notin \overline{\mathrm{Dom}(A)}$ pour tout $\omega \in C$. Par continuité, il existe $\delta > 0$ et $B_1 \in F$ tels que $Y_t(\omega) \notin \overline{\mathrm{Dom}(A)}$ pour tout $(\omega, t) \in B_1 \times [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. En utilisant l'estimation

$$\sup_{n\in N^*} E\int_0^1 |A_n(Y_s^n)|\,ds < +\infty, \tag{10}$$

le lemme de Fatou permet d'avoir

$$\int_{B_0}\int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} \underline{\lim}\,|A_n(Y_s^n)|\,ds\,dP < +\infty,$$

ce qui est impossible car $\underline{\lim}\,|A_n(Y_s^n)| = +\infty$ sur l'ensemble $B_1\times[t_0-\delta, t_0+\delta]$ et ce qui termine la démonstration d'existence de la solution.

3. PROBLÈME DE SKOROKHOD RÉTROGRADE ASSOCIÉ À UN OPÉRATEUR MAXIMAL MONOTONE MULTIVOQUE

Le problème de Skorokhod a été développé dans plusieurs directions, et par plusieurs auteurs (voir Lions et Sznitzmann [6]). Plus récemment, Cépa [2] a introduit le problème de Skorokhod associé à un opérateur maximal monotone.

L'objetif de cette section est la définition d'un nouveau type de problème, dit *problème de Skorokhod rétrograde associé à un opérateur maximal monotone.* Ce qui permet de donner une deuxième preuve du résultat d'existence et d'unicité pour le cas de la réflexion sur l'octant R_+^n.

DÉFINITION 9. On se donne

– une variable aléatoire $\xi\in L^2(\Omega, F_1, P, R^n)$,

– un opérateur maximal monotone multivoque A, de R^d, tel que $\mathrm{Int}(D(A))\neq\emptyset$ et $\xi\in D(A)$, un processus, progressivement mesurable

$$f\colon \Omega\times[0, 1]\mapsto R^n,$$

qui vérifie la condition suivante:

$$E\left[\int_0^1 |f(t, 0, 0)|^2\,dt\right] < +\infty.$$

On appelle *solution du problème de Skorokhod rétrograde* (PSR), associée aux données (ξ, A, f), tout triplet $\{(Y_t, Z_t, K_t); 0\leqslant t\leqslant 1\}$ de processus F_t-progressivement mesurables à valeurs dans $R^n\times R^{n\times n}\times R^n$ qui vérifient les conditions suivantes:

$$E\left[\sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |Y_t|^2\right] < +\infty, \tag{11}$$

$$E\left[\int_0^1 |Z_t|^2\,dt\right] < +\infty, \tag{12}$$

$$K \text{ est continu et } E\left[\int_0^1 d|K|_t\right] < +\infty, \tag{13}$$

(14) $$Y_t = \xi + \int_t^1 f(s)\,ds - \int_t^1 Z_s\,dW_s + K_1 - K_t,$$

(15) $$Y_t \in \overline{D(A)} \text{ p.s.},$$

$K_0 = 0$ et pour tout couple (α, β) de processus continus et progressivement mesurables, définis sur (Ω, F, P) et vérifiant

(16) $$u \in [0, 1],\ (\alpha_u, \beta_u) \in \mathrm{Gr}(A),$$

la mesure $\langle Y_u - \alpha_u, dK_u + \beta_u\,du\rangle$ est p.s. négative sur $\mathbb{R}^+$.

Le problème précédent sera désigné par $\mathrm{PSR}(\xi, A, f)$.

Nous n'allons pas résoudre le problème de Skorokhod rétrograde en toute généralité, mais seulement le résultat fondamental d'existence et d'unicité pour le problème de Skorokhod rétrograde associé à l'octant $\mathbb{R}^n_+$. On pose $A = \partial\chi_{\mathbb{R}^n_+}$.

Théorème 10. *Pour toutes données (ξ, A, f) qui satisfont les hypothèses précédentes, il y a une et une seule solution du problème* $\mathrm{PSR}(\xi, A, f)$.

Démonstration. L'unicité se démontre de la même manière que précédemment. Nous allons montrer l'existence. Dans un premier temps, on suppose que f ne dépend pas des variables (y, z). Soit pour $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$Y_t^i = \xi^i + \int_t^1 f^i(s)\,ds - \int_t^1 \sum_{k=1}^{k=n} Z_s^{i,k}\,dW_s^k + K_1^i - K_t^i,$$

on pose

$$Y_t^i = \operatorname*{ess\,sup}_{v \in T_t} E\left[\xi^i + \int_t^v f^i(s)\,ds \,|\, F_t\right],$$

où T_t désigne l'ensemble des temps d'arrêt qui sont supérieurs ou égaux à t.

$Y_t^i + \int_0^t f^i(s)\,ds$ est l'enveloppe de Snell du processus $\xi^i + \int_0^v f^i(s)\,ds$, c'est la plus petite surmartingale positive qui le majore. D'après la décomposition de Doob–Meyer, on a

$$Y_t^i + \int_0^t f^i(s)\,ds = M_t^i - K_t^i.$$

K^i est un processus croissant continu nul en zéro, et de carré intégrable (car Y_t^i et $\int_0^t f^i(s)\,ds$ sont de carré intégrable). Considèrons la martingale de carré intégrable

$$N_t^i = M_t^i - E[K_1^i \,|F_t].$$

Par le théorème de représentation des martingales, dans la filtration brownienne, il existe un processus prévisible $(Z^{i,k})_{1 \leqslant k \leqslant n}$ tel que

$$N_t^i = E[N_0^i] + \int_0^t \sum_{k=1}^{k=n} Z_s^{i,k}\,dW_s^k \quad \text{et} \quad E\left(\int_0^1 \sum_{k=1}^{k=n} |Z_s^{i,k}|^2\,dt\right) < +\infty.$$

Soit les processus

$$Y = (Y^i)_{1 \leqslant i \leqslant n}, \qquad Z = (Z^{i,k})_{1 \leqslant k \leqslant n, 1 \leqslant i \leqslant n}, \qquad K = (K^i)_{1 \leqslant i \leqslant n}.$$

(Y, Z, K) ainsi définis est solution du problème de Skorokhod rétrograde. Soit f quelconque satisfaisant les hypothèses du théorème, on construit, par recurrence, la suite $(Y^n, Z^n, K^n)_{n \in N}$ de la façon suivante:

$$(Y^0, Z^0, K^0) = (0, 0, 0)$$

et $(Y^{n+1}, Z^{n+1}, K^{n+1})$ est l'unique solution du problème de Skorokhod rétrograde

$$Y_t = \xi + \int_t^1 f(s, Y_s^n, Z_s^n)\, ds - \int_t^1 Z_s\, dW_s + K_1 - K_t$$

et on montre facilement que la suite $(Y^n, Z^n, K^n)_{n \in N}$ est convergente, et la limite est la solution de notre équation.

Pour illustrer l'intérêt des équations rétrogrades multivoques, nous allons en donner une application pour la gestion des portefeuilles dans un marché financier de type Black-sholls.

4. APPLICATION À LA FINANCE

Considèrons un marché financier comprenant:

– un actif non-risqué, dont le prix varie selon la loi

$$dP_0(t) = rP_0(t)\, dt, \qquad P_0(0) = 1,$$

où r désigne le taux d'intérêt instantané;

– n actifs risqués, dont les prix sont

$$dP_i(t) = P_i(t)\left[b_i(t)\, dt + \sum_{j=1}^{j=n} \sigma_{ij}(t)\, dW_j\right], \qquad P_i(0) = P_i.$$

Ce modèle est classique, c'est le modèle de Black-shools à coefficients variables. $[\sigma_{ij}(t)]$ est une matrice progressivement mesurable et fortement non-dégénérée. Enfin, on suppose que le risque relatif défini par

$$\theta(t) = \sigma^{-1}(t)\,[b(t) - r(t)\,\mathbb{1}]$$

vérifie la condition de Novokov:

$$E\int_0^1 \exp\{\tfrac{1}{2}\|\theta(t)\|^2\}\, dt < +\infty.$$

Si on note $\Phi = (\phi_0, \phi)$, la composition du portefeuille $\phi_0(t)$ représente la proportion de l'actif non-risqué détenu dans le portefeuille à l'instant $t \in [0, 1]$ et $\phi(t)$ représente la proportion de l'actif risqué détenu dans le portefeuille à l'instant t. Appelons C_t la consommation minimale cumulée jusqu'à l'instant $t\,(C_0 = 0)$. La valeur du portefeuille à l'instant t est donc donnée par la formule

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \phi_0(s)\,dP_0(s) + \sum_{j=1}^{j=n} \int_0^t \phi_j(s)\,dP_j(s) + C_t.$$

Le problème qui nous intéresse est le suivant: Etant donnée une richesse représentée par une variable aléatoire $\xi \in L^2(\Omega, F_1^W, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{R})$, $\xi \in I$ (I est un intervalle de $\boldsymbol{R}$), peut on déterminer une stratégie $\Phi = (\phi_0, \phi)$ et une consommation *minimale* C de sorte que $Y_1 = \xi$ et $Y_t \in I$. En reportant ceci dans l'équation ci-dessus, on remarque qu'on est amener à résoudre une équation différentielle stochastique rétrograde avec contraintes:

$$Y_t = \xi + \int_t^1 \Big(\phi_0(s)\,r(s)\,P_0(s) + \sum_{i=1}^{i=n} \phi_i(s)\,P_i(s)\,b_i(s)\Big)\,ds$$
$$- \int_t^1 \sum_{i=1}^{i=n} P_i(s) \sum_{j=1}^{j=n} \sigma_{ij}(s)\,dW_s^j, \qquad Y_t \in \bar{I}.$$

Le caractère minimal de C assure que la mesure dC_t est à support dans $\{t/Y_t \in \partial I\}$. D'après nos résultats sur les équations rétrogrades multivoques, il y a existence et unicité du triplet (Y, Φ, C).

5. APPENDICE

5.1. Opérateurs maximaux monotones multivoques. Les résultats sur les opérateurs maximaux monotones multivoques que nous allons rappeler dans cette section sont, pour la plupart, classiques. Pour les démonstrations complètes, le lecteur peut consulter l'ouvrage de Brézis [1].

DÉFINITION 11. On appelle opérateur *multivoque* de $\boldsymbol{R}^d$ toute application A de $\boldsymbol{R}^d$ dans $\mathfrak{p}(\boldsymbol{R}^d)$, où $\mathfrak{p}(\boldsymbol{R}^d)$ désigne l'ensemble des parties de $\boldsymbol{R}^d$. Le domaine de A est l'ensemble

$$D(A) = \{x \in \boldsymbol{R}^d:\ A(x) \neq \emptyset\}.$$

L'image de A est l'ensemble

$$\mathrm{Im}(A) = \bigcup_{x \in \boldsymbol{R}^d} A(x).$$

Si pour tout x, $A(x)$ est réduit à un seul élément, on dit que A est *univoque*.

Un opérateur multivoque est entièrement déterminé par son graphe, défini par

$$\mathrm{Gr}(A) = \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^{2d}:\ x \in \boldsymbol{R}^d,\ y \in A(x)\}.$$

L'opérateur inverse de A, noté A^{-1}, est l'opérateur dont le graphe est

$$\mathrm{Gr}(A^{-1}) = \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^{2d}:\ x \in \boldsymbol{R}^d,\ x \in A(y)\}.$$

DÉFINITION 12. Un opérateur multivoque A de $\boldsymbol{R}^d$ est dit *monotone* si et seulement si

$$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathrm{Gr}(A), \ \langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle \geqslant 0,$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire usuel de $\boldsymbol{R}^d$.

PROPOSITION 13. *Soit A un opérateur monotone multivoque de $\boldsymbol{R}^d$. Alors A est maximal monotone si et seulement si*

$$\forall \lambda > 0, \ \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathrm{Gr}(A), \ |x_1 - x_2| \leqslant |(x_1 - x_2) + \lambda (y_1 - y_2)|,$$

où $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Autrement dit, l'opérateur $(I + \lambda A)^{-1}$ est une contraction univoque de $\mathrm{Im}(I + \lambda A)$ dans $\boldsymbol{R}^d$ pour tout $\lambda > 0$.

L'ensemble des opérateurs multivoques de $\boldsymbol{R}^d$ est ordonné pour l'inclusion des graphes:

$$A \subset B \Leftrightarrow \{D(A) \subset D(B) \text{ et, pour tout } x \in D(A), \ A(x) \subset B(x)\},$$

et il est inductif pour cette relation d'ordre, d'où la

DÉFINITION 14. Un opérateur monotone multivoque A de $\boldsymbol{R}^d$ est dit *maximal monotone*, s'il est maximal dans l'ensemble des opérateurs monotone multivoques; autrement dit, A est *maximal monotone* si et seulement si

$$(x, y) \in \mathrm{Gr}(A) \Leftrightarrow \{\langle y - v, x - u \rangle \geqslant 0 \text{ pour tout } (u, v) \in \mathrm{Gr}(A)\}.$$

Remarque. Si A est maximal monotone, l'inclusion $z \in x + \lambda A(x)$ possède exactement une solution pour tout $z \in \boldsymbol{R}^d$ et tout $\lambda > 0$.

La caractérisation suivante est fondamentale dans l'étude des opérateurs maximaux monotones multivoques.

PROPOSITION 15. *Soit A opérateur multivoque de $\boldsymbol{R}^d$. Il y a équivalence entre les assertions suivantes*:

(i) *A est maximal monotone*;

(ii) *A est monotone et* $\mathrm{Im}(I + A) = \boldsymbol{R}^d$;

(iii) *pour tout $\lambda > 0$, $(I + \lambda A)^{-1}$ est une contraction univoque définie sur $\boldsymbol{R}^d$ tout entier.*

5.2. Exemple fondamental d'opérateur maximal monotone multivoque: $\partial\phi$.

DÉFINITION 16. Soit ϕ une fonction convexe de $\boldsymbol{R}^d$, c'est-à-dire une application $\phi\colon \boldsymbol{R}^d \to]-\infty, +\infty]$ telle que

$$\forall x, y \in \boldsymbol{R}^d, \ \forall t \in [0, 1], \ \phi(tx + (1-t)y) \leqslant t\phi(x) + (1-t)\phi(y).$$

Le domaine de ϕ est défini par

$$\mathrm{dom}(\phi) = \{x \in \boldsymbol{R}^d \colon \phi(x) < +\infty\}.$$

ϕ est dite *propre*, si $\mathrm{dom}(\phi)$ est non-vide.

Définition 17. Soit ϕ une fonction convexe propre de $\mathbb{R}^d$. On appelle *sous-différentiel* de ϕ, noté $\partial\phi$, l'opérateur multivoque de $\mathbb{R}^d$ défini par son graphe de la façon suivante:

$$(x, y) \in \mathrm{Gr}(\partial\phi) \Leftrightarrow \phi(x) \leqslant \phi(z) + \langle y, x-z \rangle \text{ pour tout } z \in \mathbb{R}^d.$$

Proposition 18. *Le sous-différentiel d'une fonction convexe, semi-continue inférieurement, propre de $\mathbb{R}^d$ est un opérateur maximal monotone multivoque de $\mathbb{R}^d$.*

Les équations différentielles stochastiques rétrogrades réfléchies étudiées par Gegout-Petit [5] correspondent aux fonctions indicatrices de convexes fermés; plus précisément, si D est un convexe fermé non-vide de $\mathbb{R}^d$. On appelle *indicatrice* de D, notée I_D, la fonction définie par

$$I_D(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in D, \\ +\infty & \text{si } x \notin D. \end{cases}$$

Il est facile de voir que la fonction ainsi définie est convexe, semi-continue inférieurement et propre, et $\mathrm{dom}(I_D) = D$. On a alors, pour tout x dans D,

$$\partial I_D(x) = \{y \in \mathbb{R}^d \colon \langle y, x-z \rangle \text{ pour tout } z \in D\},$$

c'est-à-dire

$$\partial I_D(x) = \begin{cases} \varnothing & \text{si } x \notin D, \\ \{0\} & \text{si } x \in \mathrm{Int}(D), \\ \Pi_x & \text{si } x \in \partial D, \end{cases}$$

où l'on a noté $\mathrm{Int}(D)$ l'intérieur de D et Π_x le cône normal extérieur à D en x.

Remarques. En dimension un ($d = 1$), tous les opérateurs maximaux monotones multivoques A sont de la forme décrite précédemment: $A = \partial\phi$ avec ϕ fonction convexe, s.c.i., propre de $\mathbb{R}^d$. En dimension supérieure à un, cette propriété cesse d'être vraie.

Quelques propriétés élémentaires.

Proposition 19. *Soit A un opérateur maximal monotone multivoque de $\mathbb{R}^d$. Alors on a les propriétés suivantes:*

(i) $\mathrm{Int}(D(A))$ *et* $\overline{D(A)}$ *sont des convexes de* $\mathbb{R}^d$, *de plus* $\mathrm{Int}(D(A)) = (\overline{D(A)})$;

(ii) *pour tout* $x \in \mathbb{R}^d$, $A(x)$ *est convexe fermé de* $\mathbb{R}^d$.

Proposition 20. *Soit A un opérateur maximal monotone multivoque de $\mathbb{R}^d$. Alors:*

(i) *pour tout x dans $D(A)$, l'ensemble $A(x)$ est convexe fermé et il existe un unique point de $\mathbb{R}^d$, noté $A^0(x)$, tel que*

$$|A^0(x)| = \min\{|y| \colon y \in A(x)\}.$$

(ii) $x \in D(A) \Leftrightarrow |A^0(x)| < +\infty$.

Si x_n converge fortement vers x, y_n converge faiblement vers y, et $y_n \in A(x_n)$, alors $y \in A(x)$.

Remerciements. Les auteurs remercient vivement le référee. Ses commentaires sur la première version de ce travail nous ont été très utiles.

TRAVAUX CITÉS

[1] H. Brézis, *Opérateurs maximaux monotones*, dans: *Mathematics Studies*, North Holland, 1973.

[2] E. Cépa, *Equations différentielles stochastiques multivoques*, Thèse de doctorat de l'Université d'Orléans, 1994.

[3] N. El Karoui, C. Kapoudjian, E. Pardoux, S. Peng and M. C. Quenez, *Reflected solutions of backward SDE's and related obstacle problems for PDE's*, preprint.

[4] N. El Karoui, S. Peng and M. C. Quenez, *Backward stochastic differential equations, finance and optimization*, preprint.

[5] A. Gegout-Petit, *Filtrage d'un processus partiellement observé et équations différentielles stochastiques rétrogrades refléchies*, Thèse de doctorat de l'Université de Provence-Aix-Marseille, 1995.

[6] P. L. Lions and A. S. Sznitzmann, *Stochastic differential equations with reflecting boundary conditions*, Comm. Pure Appl. Math. 37 (1984), pp. 511–537.

[7] M. N'zi and Y. Ouknine, *Multivalued backward stochastic differential equation with continuous coefficients*, Random Operators and Stochastic Equations (1996), to appear.

[8] Y. Ouknine, *Multivalued backward stochastic differential equations and Malliavin calculus*, Stochastics and Stochastics Reports (1996), to appear.

[9] E. Pardoux and S. Peng, *Adapted solution of a backward stochastic differential equation*, Systems Control Lett. 14 (1990), pp. 55–61.

[10] Y. Saisho, *Stochastic differential equations for multidimensional domains with reflecting boundary*, Probab. Theory Related Fields 74 (1987), pp. 455–477.

Modeste N'zi
Centre Universitaire de Cocody
Faculté des Sciences et Techniques
Département de Mathématiques
22 B.P. 582 Abidjan 22, Côte d'Ivoire

Youssef Ouknine
Département de Mathématique
Faculté des Sciences Semlalia
Université Cadi Ayyad
Marrakech, Maroc

Received on 5.8.1996