PROBABILITY
AND
MATHEMATICAL STATISTICS

Vol. 2, Fasc. 1 (1981), p. 1-29

ÉVALUATIONS DE CERTAINES FONCTIONNELLES ASSOCIÉES À DES FONCTIONS ALÉATOIRES GAUSSIENNES

PAR

X. FERNIQUE (STRASBOURG)

Abstract. Let $X = \{X(\omega, t),\ \omega \in \Omega,\ t \in T\}$ be a random function on (Ω, a, P), let T be a finite set, and μ a probability on T. We assume that the components of X are P-integrable. We denote by $\mathscr{M}(\mu)$ the set of the random probabilities $m = \{m(\omega),\ \omega \in \Omega\}$ on T whose expectation is μ. We put

$$\varphi(X, \mu) = \sup_{m \in \mathscr{M}(\mu)} \mathrm{E}\big[\int_T X(\omega, t)\, m(\omega, dt)\big].$$

In this paper, we extend and study this quantity when T is in fact a Polish space (Section 1); then we show (Section 2) that if X is Gaussian and rather regular, then $\varphi(X, \mu)$ is monotonic in terms of the metric defined by X (Theorem 2.1), finally (Section 3), we majorize (Theorem 3.1) or minorize (3.2) the function $\varphi(X, \mu)$ in some cases.

0.1. Soit $X = \{X(\omega, t), \omega \in \Omega, t \in T\}$ une fonction aléatoire (f.a.) d'espace d'épreuves $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ sur un espace polonais (T, d); soit de plus μ une probabilité sur T. Nous supposerons dans la suite X mesurable sur $\Omega \times T$ et $(P \otimes \mu)$-intégrable. Nous notons $\mathscr{M}(\mu)$ l'ensemble des familles $\mathscr{A}$-mesurables $m = \{m(\omega, dt), \omega \in \Omega\}$ de probabilités sur T dont l'intégrale relativement à P est la mesure μ:

$$\int_\Omega m(\omega, dt)\, dP(\omega) = \mu(dt). \tag{1}$$

0.2. Pour fixer les idées, supposons que μ ait un support fini; dans ces conditions, pour tout élément m de $\mathscr{M}(\mu)$, l'application

$$\omega \to \int_T X(\omega, t)\, m(\omega, dt) \tag{2}$$

est une v.a. usuelle intégrable que nous notons $\int X dm$; nous posons alors

$$\varphi(X, \mu) = \sup_{m \in \mathscr{M}(\mu)} \mathrm{E}\big[\int X dm\big] \tag{3}$$

et nous nous proposons d'étudier les variations de φ.

0.3. Si μ n'a pas un support fini, nous devons prendre quelques précautions.

(a) Si pour tout élément m de $\mathcal{M}(\mu)$ la probabilité $P\{\omega: X(\omega) \notin L^1(m(\omega))\}$ est nulle, alors l'application (2) définie P-p.s. est une v.a. que nous notons $\int X dm$; si, de plus, pour tout élément m de $\mathcal{M}(\mu)$, cette v.a. est P-intégrable, nous associons à X le nombre $\varphi(X, \mu)$ fini ou non, défini par (3).

(b) Si l'une des conditions (a) n'est pas réalisée, nous associons à X le nombre $\varphi(X, \mu) = +\infty$.

Nous nous proposons d'étudier les variations de φ.

0.4. Comme l'indique le titre, nous porterons un intérêt particulier au cas où X est gaussien: dans ce cas, la fonctionnelle $\{X \to \varphi(X, \mu)\}$ apparaîtra comme aussi maniable que $\{X \to \mathrm{E} \sup_T X\}$. Elle permettra d'évaluer la taille de certaines f.a. gaussiennes trop grandes pour être mesurées à partir de cette seconde fonctionnelle, par exemple certaines f.a. gaussiennes à covariance non bornée.

0.5. Malgré l'alternative exposée en 0.3, sous d'autres aspects le cas simple est celui où μ est portée par une partie T_0 dénombrable (ou finie) de T. Notons en effet, dans ce cas, $\mathcal{B}$ la sous-tribu de $\mathcal{A}$ engendrée par la restriction de X à T_0; soit m un élément de $\mathcal{M}(\mu)$; la propriété (1) montre que l'espérance conditionnelle bien définie $\mathrm{E}\{m \mid \mathcal{B}\}$ est encore un élément m' de $\mathcal{M}(\mu)$ vérifiant $\mathrm{E}\int X dm' = \mathrm{E}\int X dm$. De plus, le couple (X, m') sur Ω étant $\mathcal{B}$-mesurable à une image canonique $(\bar{X}, \bar{m})$ sur $(\boldsymbol{R}^{T_0}, \mathcal{B}(\boldsymbol{R}^{T_0}), P_{X_{T_0}})$, on a $\mathrm{E}\int X dm = \mathrm{E}\int \bar{X} d\bar{m}$; ceci prouve $\varphi(X, \mu) \leqslant \varphi(\bar{X}, \mu)$; l'inégalité inverse est facile et nous pouvons énoncer

Proposition 0.5. *Si μ est portée par une partie finie ou dénombrable de T, $\varphi(X, \mu)$ est déterminé par la loi temporelle de X.*

0.6. La situation peut être différente si μ n'est pas portée par une partie dénombrable de T. En effet, dans ce cas, on constate que la loi d'un couple (X, m) ne détermine pas celle de la v.a. $\int X dm$. L'exemple suivant montre la difficulté.

L'espace d'épreuves $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est l'intervalle $[0, 1]$ muni de sa tribu usuelle et de la mesure de Lebesgue; nous choisissons une v.a. intégrable et positive f et une v.a. gaussienne centrée et réduite λ; T est aussi l'intervalle $[0, 1]$. Nous définissons la f.a. (gaussienne) X en posant

$$X(\omega, t) = \lambda(\omega) \text{ si } \omega \neq t, \quad X(\omega, \omega) = f(\omega);$$

nous choisissons pour la mesure μ sur T la mesure de Lebesgue. On a alors immédiatement

$$m = \{\omega \to \delta_\omega(dt)\} \in \mathcal{M}(\mu), \quad \varphi(X, \mu) \geqslant \mathrm{E}\int X dm = \int f(t)\, dt.$$

Par contre, la v.a. X', définie par $X'(\omega, t) = \lambda(\omega)$, a la même loi temporelle que X et on a $\varphi(X', \mu) = 0$.

On voit bien ici que dans le cas où μ n'est pas portée par une partie dénombrable de T, nous devrons prévoir des conditions de régularité pour X si nous voulons que $\varphi(X, \mu)$ soit fixé par la loi temporelle de X (cf. 1.3).

0.7. Dans plusieurs articles précédents, nous avons défini une notion voisine de la manière suivante: nous notons $\iota(\mu)$ l'ensemble des applications mesurables ι de $(\Omega, \mathscr{A})$ dans (T, d) de loi μ:

(4) $$\forall A \in \mathscr{B}(T), \ P\{\iota^{-1}(A)\} = \mu(A);$$

supposons là encore pour simplifier que μ ait un support fini; pour tout élément ι de $\iota(\mu)$, l'application $\omega \to X(\omega, \iota(\omega))$ est alors une v.a. intégrable notée $X(\iota)$. Nous posons

$$\theta(X, \mu) = \sup_{\iota \in \iota(\mu)} \mathrm{E} X(\iota).$$

On vérifie immédiatement, par (4), que pour tout élément ι de $\iota(\mu)$ la probabilité aléatoire $\delta_{\iota(\omega)}(dt)$ est un élément de $\mathscr{M}(\mu)$ si bien que θ est majoré par φ. Réciproquement, pour tout élément m de $\mathscr{M}(\mu)$, il existe, par les propriétés classiques de désintégration, sur $\Omega' = (\Omega \times [0, 1], P \otimes dx)$ une application mesurable ι' à valeurs dans T telle que $\int \delta_{\iota'(\omega, x)} dx = m(\omega)$. On aura donc $\theta(X', \mu) = \varphi(X, \mu)$, où X' est la f.a. sur Ω' de même loi que X définie par $X'((\omega, x), t) = X(\omega, t)$.

L'exemple suivant montre que même dans le cas simple où μ est portée par un ensemble fini, la valeur de $\theta(X, \mu)$ peut effectivement dépendre de l'espace d'épreuves: (Ω, P) est un ensemble à deux éléments $\{\omega_1, \omega_2\}$ et P y est équirépartie. T est aussi un ensemble à deux éléments $\{t_1, t_2\}$ et la probabilité μ n'y est pas équirépartie. Dans ces conditions, $\iota(\mu)$ est vide, alors que $\mathscr{M}(\mu)$ ne l'est pas.

1. VERSIONS DE X ET VALEURS DE φ. VARIATIONS DE φ EN FONCTION DE μ

1.0. Soient X une f.a. sur un espace polonais T et μ une probabilité sur T; nous avons montré ci-dessus que si μ n'est pas à support dénombrable, $\varphi(X, \mu)$, sauf hypothèses de régularité, n'est pas déterminé par la loi temporelle de X. Dans l'exemple 0.6, il peut être rendu arbitrairement grand. Dans cette section, nous cherchons des minorations de $\varphi(X, \mu)$ déterminées par la loi temporelle de X et des liaisons entre $\varphi(X, \mu)$ et les valeurs de $\varphi(X, \mu')$ où μ' à support fini est proche de μ.

1.1. Nous notons $\mathscr{S} = \{s_k, k \in [1, K]\}$, une partition finie et mesurable de T, nous supposons que les éléments de $\mathscr{S}$ ne sont pas μ-négligeables; nous lui associons l'espace produit

$$\mathscr{U} = \prod_{1}^{K} s_k$$

sur lequel nous formons la probabilité produit

$$M = \bigotimes_{1}^{K} \frac{\mu/s_k}{\mu(s_k)};$$

à tout élément u de $\mathscr{U}$, nous associons la probabilité μ_u sur T définie par

$$\mu_u = \sum_{1}^{K} \mu(s_k)\,\delta_{u_k}.$$

Nous montrerons qu'on peut choisir u de sorte que $\varphi(X, \mu_u)$ soit inférieur ou égal à $\varphi(X, \mu)$. L'idée de la preuve est simple: elle constate que $\varphi(X, \cdot)$ est concave et qu'on a donc, à la régularité des choses près,

$$\int \varphi(X; \mu_u)\, M(du) \leqslant \varphi\big(X, \int \mu_u\, M(du)\big) = \varphi(X, \mu).$$

Par ailleurs, à la partition $\mathscr{S}$ nous associons aussi le vecteur aléatoire $X_{\mathscr{S}}$ sur l'ensemble fini $[1, K]$ et la probabilité $\mu_{\mathscr{S}}$ sur le même ensemble définis par

(5) $$\forall k \in [1, K],\ X_{\mathscr{S}}(k) = \frac{1}{\mu(s_k)} \int_{s_k} X d\mu,\quad \mu_{\mathscr{S}}(k) = \mu(s_k).$$

PROPOSITION 1.1. *Soit X une f.a. $L^1(P)$-continue sur un espace polonais (T, d). Avec les notations ci-dessus, pour toute partition finie et mesurable de T, on a alors*

(6) $$\varphi(X, \mu) \geqslant \int \varphi(X, \mu_u)\, dM(u) \geqslant \varphi(X_{\mathscr{S}}, \mu_{\mathscr{S}}).$$

En particulier, on peut choisir u dans $\mathscr{U}$ tel que $\varphi(X, \mu) \geqslant \varphi(X, \mu_u)$.

Démonstration. Notons d'abord que les propriétés de régularité de μ permettent de supposer que T est réunion dénombrable de parties compactes. Fixons $\varepsilon > 0$; la remarque ci-dessus et la $L^1(P)$-continuité de X permettent de former une partition dénombrable et mesurable $\mathscr{A} = \{a_j, j \in N\}$ de $\mathscr{U}$ telle que

$$\forall j \in N,\ \forall (u, v) \in (a_j \times a_j),\ \mathrm{E} \sum_{1}^{K} |X(u_k) - X(v_k)| \leqslant \varepsilon/4,$$

ce qui implique

$$|\varphi(X, \mu_u) - \varphi(X, \mu_v)| \leqslant \varepsilon/4,$$

et pour tout élément m de $\mathcal{M}(\mu)$:

$$\mathrm{E}\left|\int X d\left\{\sum_1^K m(s_k)(\delta_{u_k}-\delta_{v_k})\right\}\right| \leqslant \varepsilon/4.$$

Utilisant cette partition, on peut associer à tout élément u de $\mathcal{U}$ un élément m_u de $\mathcal{M}(\mu_u)$ de sorte que l'application $\{u \to m_u\}$ ne prenne qu'une infinité dénombrable de valeurs et soit mesurable et qu'on ait aussi

$$\forall u \in \mathcal{U},\ \ \mathrm{E}\int X dm_u \geqslant \varphi(X, \mu_u)-\varepsilon,\ \ \mathrm{E}\int |X|\, dm_u < \infty.$$

La mesurabilité de $\{u \to m_u\}$ permet de construire la famille $\bar{m} = \int m_u M(du)$; c'est un élément de $\mathcal{M}(\mu)$ et on a, par le théorème de Fubini,

$$\varphi(X, \mu) \geqslant \mathrm{E}\int X d\bar{m} \geqslant \int \varphi(X, \mu_u) M(du)-\varepsilon.$$

Faisant tendre ε vers zéro, on obtient la première inégalité (6).

Pour démontrer la seconde inégalité (6), nous fixons $\varepsilon > 0$ et nous choisissons un élément $m_{\mathscr{S}}$ de $\mathcal{M}(\mu_{\mathscr{S}})$ tel que

$$\mathrm{E}\int X_{\mathscr{S}}\, dm_{\mathscr{S}} \geqslant \varphi(X_{\mathscr{S}}, \mu_{\mathscr{S}})-\varepsilon. \tag{7}$$

Pour tout élément u de $\mathcal{U}$, nous posons

$$m_u = \sum_1^K \mu_{\mathscr{S}}(k)\, \delta_{u_k}.$$

C'est un élément de $\mathcal{M}(\mu_u)$ et on a

$$\int \varphi(X, \mu_u) dM(u) \geqslant \int \left[\mathrm{E}\int X dm_u\right] dM(u).$$

Ce terme vaut

$$\int \left[\mathrm{E}\sum_1^K X(u_k)\, m_{\mathscr{S}}(k)\right] dM(u).$$

On peut là encore appliquer le théorème de Fubini de sorte qu'on a

$$\int \varphi(X, \mu_u) dM(u) \geqslant \mathrm{E}\left[\sum_1^K m_{\mathscr{S}}(k)\int X(u_k) dM(u)\right] = \mathrm{E}\int X_{\mathscr{S}}\, dm_{\mathscr{S}}. \tag{8}$$

Le résultat se déduit donc de la comparaison de (7) et (8) en faisant tendre ε vers zéro.

1.2. Proposition 1.2. *Soit X une f.a. $L^1(P)$-continue sur un espace polonais (T, d); pour toute probabilité μ sur T, on peut construire, à partir de la seule loi temporelle de X, une suite $(\mu_n, n \in N)$ de probabilités sur T à supports finis convergeant étroitement vers μ telle que*

$$\limsup_{n\to\infty} \varphi(X, \mu_n) \leqslant \varphi(X, \mu). \tag{9}$$

Démonstration. Elle est immédiate à partir de la proposition 1.1, puisque les propriétés classiques d'approximation étroite des probabilités permettent de construire une suite $(\mathscr{S}_n, n \in N)$ de partitions finies et mesurables de T telle que pour toute suite de choix $(u^n, n \in N)$ associée, on ait, au sens de la convergence étroite,

$$\lim_{n\to\infty} \mu_{u^n} = \mu.$$

1.3. Versions régulières.

Définition. Soit X une f.a. $L^1(P)$-continue sur un espace polonais (T, d); soit de plus μ une probabilité sur T. Nous dirons que X est *μ-régulière* si

$$\sup_{\mathscr{S}} \varphi(X_{\mathscr{S}}, \mu_{\mathscr{S}}) = \varphi(X, \mu), \tag{10}$$

la borne supérieure portant sur l'ensemble des partitions finies et mesurables de (T, d).

La proposition 1.1 montre qu'une version μ-régulière de X donne à $\varphi(\cdot, \mu)$ la plus petite valeur possible. Nous ne savons pas si toute f.a. $L^1(P)$-continue possède une version μ-régulière. Nous savons en construire seulement si X ne prend que des valeurs positives ou nulles, ou si les trajectoires de X possèdent des propriétés de continuité.

PROPOSITION 1.3. *Soit X une f.a. $L^1(P)$-continue sur un espace polonais (T, d). On suppose que X ne prend que des valeurs positives ou nulles. Pour toute probabilité μ sur T, il existe alors une version $\bar{X}$ de X qui est μ-régulière.*

Démonstration. L'hypothèse de continuité implique que l'on peut construire une suite $(\mathscr{S}_n, n \in N) = (\{s_k^n, k \in [1, K_n]\}, n \in N)$ de partitions finies et mesurables de T telle qu'en posant

$$\forall n \in N, X_n(t) = \frac{1}{\mu(s_k^n)} \int_{s_k^n} X d\mu \text{ pour } t \in s_k^n \text{ et } \mu(s_k^n) > 0,$$

la mesure de la partie T_0 de T telle que

$$\forall t \in T_0, P\{\lim_{n\to\infty} X_n(t) = X(t)\} = 1 \tag{11}$$

vérifie $\mu(T_0) = 1$. On pose alors

$$\forall t \in T_0, \bar{X}(t) = \liminf_{n\to\infty} X_n(t), \quad \forall t \notin T_0, \bar{X}(t) = X(t).$$

La formule (11) implique que $\bar{X}$ est une version de X. Par ailleurs, pour tout élément m de $\mathscr{M}(\mu)$ on a, en appliquant le lemme de Fatou,

$$\mathrm{E} \int \bar{X} dm \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mathrm{E} \int X_n dm \leqslant \varphi(X_{\mathscr{S}_n}, \mu_{\mathscr{S}_n}),$$

et donc

$$\varphi(\bar{X}, \mu) \leqslant \sup \varphi(X_{\mathscr{S}}, \mu_{\mathscr{S}});$$

l'inégalité inverse résulte de la proposition 1.1; le résultat est établi.

1.4. La suite de cette section est consacrée à la démonstration du théorème suivant:

THÉORÈME 1.4. *Soit X une f.a. ayant p.s. ses trajectoires continues sur un espace polonais (T, d). On suppose*

$$\mathrm{E} \sup_T |X| < \infty.$$

Dans ces conditions, toute version X' séparable de X est μ-régulière pour toute probabilité μ sur T; on a alors $\varphi(X', \mu) = \varphi(X, \mu)$. De plus, pour toute suite $(\mu_n; n \in N)$ de probabilités convergeant étroitement vers μ, on a

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(X, \mu_n) = \varphi(X, \mu). \tag{12}$$

La démonstration du théorème se fera en trois étapes:

(a) nous démontrerons d'abord l'inégalité

$$\liminf_{n\to\infty} \varphi(X, \mu_n) \geqslant \varphi(X, \mu); \tag{12a}$$

(b) nous en déduirons ensuite que pour toute version séparable X' de X on a $\varphi(X', \mu) = \varphi(X, \mu)$;

(c) ce dernier résultat nous permettra d'achever la démonstration.

1.5. Première étape. Elle utilise le lemme suivant:

LEMME 1.5. *Soient $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace d'épreuves, (T, d) un espace polonais, μ une probabilité sur T et $m = \{m(\omega), \omega \in \Omega\}$ une famille $\mathscr{A}$-mesurable de probabilités sur T ayant μ pour intégrale. Soit de plus μ' une probabilité sur T dont la distance de Prohorov $\delta(\mu, \mu')$ soit inférieure à ε. Dans ces conditions, il existe une famille $M = \{M(\omega), \omega \in \Omega\}$ $\mathscr{A}$-mesurable de probabilités sur $T \times T$ telle que*

(i) *pour tout $\omega \in \Omega$, la première marge de $M(\omega)$ est $m(\omega)$,*

(ii) *l'intégrale par rapport à P de la seconde marge de M est μ',*

(iii) $\int M(\omega)\{(t, t') \in T \times T: d(t, t') > \varepsilon\} dP(\omega) < \varepsilon.$

Eléments de preuve. On construit facilement M en utilisant les lemmes de mariage classique si μ ou μ' sont à support fini. On en déduit la construction générale en intercalant entre μ et μ' une probabilité à support fini.

Nous démontrons maintenant l'inégalité (12a). Soient h un nombre positif et m une famille $\mathscr{A}$-mesurable de probabilités sur T telle que

$$\mathrm{E} \int X dm \geqslant \varphi(X, \mu) - h/2. \tag{13}$$

Les trajectoires de X étant p.s. continues, $\sup_T |X|$ étant intégrable, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

(14) $$\mathrm{E} \sup_{d(t,t')<\varepsilon} |X(t)-X(t')| \leqslant h/4,$$

(15) $$f \in L^\infty(P), |f| \leqslant 1, \int |f|\,dP < \varepsilon \Rightarrow \int |f| \sup_T |X|\,dP \leqslant h/8.$$

Soient alors μ' une probabilité sur T telle que $\delta(\mu', \mu)$ soit inférieure à ε et M la famille associée à ces données par le lemme 1.5; on a en utilisant (14)

$$\mathrm{E} \iint_{d(t,t')\leqslant\varepsilon} |X(t)-X(t')|\,M(dt, dt') \leqslant h/4,$$

en utilisant (15) et la conclusion (iii) du lemme 1.5

$$\mathrm{E} \iint_{d(t,t')>\varepsilon} |X(t)-X(t')|\,M(dt, dt') \leqslant 2\mathrm{E}\,[M\{d(t,t')>\varepsilon\} \sup_T |X|] \leqslant h/4.$$

On en déduit, en utilisant (13),

$$\varphi(X, \mu') \geqslant \mathrm{E} \iint X(t')\,M(dt, dt') \geqslant \mathrm{E} \int X\,dm - \mathrm{E} \iint |X(t)-X(t')|\,M(dt, dt'),$$
$$\varphi(X, \mu') \geqslant \varphi(X, \mu) - h.$$

Ceci prouve le résultat annoncé.

1.6. Deuxième étape. Elle résulte de la première étape et de la proposition 1.2. Cette proposition permet de construire, à partir de la seule loi temporelle de X qui est aussi celle de X', une suite $(\mu_n, n \in N)$ de probabilités à support fini convergeant vers μ telle que

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(X, \mu_n) \leqslant \varphi(X, \mu), \quad \lim_{n\to\infty} \varphi(X, \mu_n) = \lim_{n\to\infty} \varphi(X', \mu_n) \leqslant \varphi(X', \mu).$$

La première étape prouve les inégalités inverses, d'où le résultat.

1.7. Troisième étape. Soit $(\mu_n, n \in N)$ une suite de probabilités convergeant étroitement vers μ; pour tout $n \in N$, notons m_n un élément de $\mathscr{M}(\mu_n)$ tel que

$$\mathrm{E} \int X\,dm_n \geqslant \varphi(X, \mu_n) - 1/n;$$

notons aussi Z_n la v.a. à valeurs dans l'espace $(\mathscr{C}(T), \mathscr{M}^{+1}(T))$ définie par $Z_n = (X, m_n)$. Puisque $(\mu_n, n \in N)$ converge étroitement, elle vérifie les conditions de Prohorov; il existe donc une suite $(K_j, j \in N)$ de compacts dans T telle que

$$\forall n \in N, \sum_j 2^j \mu_n(T \setminus K_j) \leqslant 1.$$

Ceci s'écrit

$$\forall n \in N, \mathrm{E} \sum_j 2^j m_n(T \setminus K_j) \leqslant 1,$$

et donc

$$\forall \varepsilon > 0, \forall n \in N, P\{\sum_j 2^j m_n(T \backslash K_j) > 1/\varepsilon\} \leqslant \varepsilon.$$

Or l'ensemble K_ε des probabilités π sur T vérifiant

$$\sum_j 2^j \pi(T \backslash K_j) \leqslant 1/\varepsilon$$

est une partie compacte de $\mathscr{M}^{+1}(T)$, puisqu'elle est fermée et vérifie les conditions de Prohorov. On a donc

$$\forall \varepsilon > 0, \forall n \in N, P\{m_n \in T \backslash K_\varepsilon\} \leqslant \varepsilon,$$

ce qui signifie que les lois des m_n forment un ensemble étroitement relativement compact dans $\mathscr{M}^{+1}(\mathscr{M}^{+1}(T))$. Il en résulte que les lois des Z_n sont aussi étroitement relativement compactes; on peut en extraire une suite partielle convergeant en loi vers une variable aléatoire $Z = \{Y, h\}$. On vérifie par continuité que Y a la loi de X, que h est un élément de $\mathscr{M}(\mu)$ et en utilisant l'intégrabilité de $\sup_T |X|$ et le résultat de la deuxième étape:

$$\varphi(X, \mu) = \varphi(Y, \mu) \geqslant \mathrm{E} \int Y dh \geqslant \lim_{n \to \infty} \inf \mathrm{E} \int X dm_n.$$

La construction de la suite $(m_n, n \in N)$ implique alors l'inégalité (12a). On en déduit, par extraction de suites convenables,

$$\varphi(X, \mu) \geqslant \lim_{\mu' \to \mu} \sup \varphi(X, \mu'),$$

ce qui, joint au résultat de la première étape, prouve (12). Le théorème est prouvé.

2. LE CAS GAUSSIEN, VARIATIONS DE φ EN FONCTION DE X

2.0. Dans toute la suite, nous associerons à toute f.a. gaussienne centrée X sur un ensemble T les notations usuelles suivantes.

Pour tout couple (s, t) d'éléments de T, $d_X^2(s, t)$ désigne $\mathrm{E}[X(s) - X(t)]^2$ et $\gamma_X(s, t)$ est $\mathrm{E}[X(s) X(t)]$; pour tout élément t de T, $\sigma_X(t)$ désigne $\sqrt{\mathrm{E}|X(t)|^2} = \sqrt{\gamma_X(t, t)}$. Nous omettrons tous les indices inférieurs notés X s'il n'y a pas d'ambiguité.

Si pour étudier la taille d'une f.a. gaussienne centrée X sur un ensemble T on utilise la fonctionnelle $\mathrm{E} \sup_T X$, alors l'outil essentiel est la propriété de monotonie de cette fonctionnelle.

Les fonctionnelles $\varphi(X, \mu)$ ont une propriété de monotonie semblable.

2.1. THÉORÈME 2.1. *Soient X et Y deux f.a. gaussiennes centrées continues en probabilité sur un espace polonais (T, d); soit de plus μ une probabilité sur T. On suppose que pour tout couple (s, t) d'éléments de T on a*

(16) $$d_X(s, t) \leqslant d_Y(s, t).$$

On a alors aussi, pour toute partition finie $\mathscr{S}$ de T,

(17) $$\varphi(X_{\mathscr{S}}, \mu_{\mathscr{S}}) \leqslant \varphi(Y, \mu).$$

Il existe de plus une suite $(\mu_n, n \in N)$ de probabilités convergeant étroitement vers μ telle que

(18) $$\limsup_{n \to \infty} \varphi(X, \mu_n) \leqslant \varphi(Y, \mu).$$

Enfin, si X est μ-régulière, on a

(19) $$\varphi(X, \mu) \leqslant \varphi(Y, \mu).$$

Nous démontrerons ce théorème en deux étapes. Le cas simple est celui où T est un ensemble fini; dans ce cas, X est évidemment μ-régulière et on peut lui appliquer le théorème 1.4 de sorte qu'on aura prouvé le théorème 2.1 dans ce premier cas, si sous les hypothèses indiquées, on établit l'inégalité (19).

2.2. Nous commençons par quelques lemmes analysant l'action de $\mathscr{M}(\mu)$ sur X, quand T est fini et X a une covariance inversible.

2.2.1. LEMME 2.2.1. *Nous supposons que T est fini, X a une covariance inversible et l'espace d'épreuves est $(\boldsymbol{R}^T, \mathscr{B}(\boldsymbol{R}^T), P_X)$; alors l'application $\{m \to \mathrm{E}\int X dm\}$ de $\mathscr{M}(\mu)$ dans $\boldsymbol{R}$ atteint son maximum en un élément p.s. unique de la forme δ_ι, où ι est un élément de $\iota(\mu)$. On a donc en particulier dans ce cas $\theta(X, \mu) = \varphi(X, \mu)$.*

D é m o n s t r a t i o n. (a) Prouvons d'abord l'existence d'un élément maximal. Si on associe à tout élément m de $\mathscr{M}(\mu)$ la v.a. $Z(m) = \{(X(t), t \in T), (m(t), t \in T)\}$ à valeurs dans l'espace polonais $\boldsymbol{R}^{2T}$, on vérifie (comme en 1.7) que l'ensemble des lois des $Z(m)$, $m \in \mathscr{M}(\mu)$, est étroitement compact. Soit donc $(m_n, n \in N)$ une suite d'éléments de $\mathscr{M}(\mu)$ telle que $\mathrm{E}\int X dm_n$ converge vers $\varphi(X, \mu)$; on peut en extraire une suite partielle suivant laquelle les $Z(m_n)$ convergent en loi vers $Z = \{Y, h\}$. On vérifie que Y a la loi de X, que h appartient à $\mathscr{M}(\mu)$ et que $\mathrm{E}\int Y dh = \varphi(X, \mu)$. La version $h_0 = h_0(Y)$ de l'espérance $\mathrm{E}\{h | Y\}$ a les mêmes propriétés. La copie $\bar{h}$ de h_0 dans $(\boldsymbol{R}^T, \mathscr{B}(\boldsymbol{R}^T), P_X)$ est alors l'élément maximal cherché.

(b) Nous prouvons maintenant que tout élément maximal est p.s. de la forme δ_ι. Ordonnons les éléments de T sous la forme $[1, n]$ et notons $\mathscr{B}_{n-1}$ la tribu engendrée par $\{X_k, k \in [1, n-1]\}$; soit m un élément maximal. La loi de X ayant une densité continue puisque sa covariance est inversible, nous pouvons calculer une fonction $\mathscr{B}_{n-1}$-mesurable M telle que

(20) $$P\{X_n > M \,|\mathscr{B}_{n-1}\} = \mathrm{E}\,\{m(n)\,|\mathscr{B}_{n-1}\} \text{ p.s.}$$

Nous définissons alors une v.a. g à valeurs dans $\boldsymbol{R}^T$ en posant

$$\forall k \leqslant n-1, g(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } P\{X_n \leqslant M\,|\mathscr{B}_{n-1}\} = 0, \\ I_{\{X_n \leqslant M\}} \dfrac{\mathrm{E}\,\{m(k)|\mathscr{B}_{n-1}\}}{\mathrm{E}\,\{I_{\{X_n \leqslant M\}}|\mathscr{B}_{n-1}\}} & \text{sinon}, \end{cases}$$

$$g(n) = I_{\{X_n > M\}}.$$

Les propriétés du conditionnement montrent (attention aux dénominateurs!) que g appartient à $\mathscr{M}(\mu)$ et que

$$\mathrm{E} \int_{t \neq n} X dg = \mathrm{E} \int_{t \neq n} X dm;$$

la maximalité de m implique donc

(21) $$\mathrm{E}\,[X_n I_{\{X_n > M\}}] \leqslant \mathrm{E}\,[X_n m_n].$$

Pourtant la formule (20) montre qu'on a

$$\mathrm{E}\,[X_n (I_{\{X_n > M\}} - m_n)] = \mathrm{E}\,[(X_n - M)(I_{\{X_n > M\}} - m_n)];$$

les deux facteurs du dernier terme ont les mêmes signes, le premier est p.s. non nul de sorte que l'inégalité (21) exige: $m_n = I_{\{X_n > M\}}$ p.s. En permutant les indices, on en déduit le résultat (b).

(c) L'unicité presque sûre de l'élément maximal résulte de (b) puisque l'ensemble convexe des éléments maximaux doit se réduire à ses éléments extrémaux.

2.2.2. Le lemme 2.2.1 permet, dans la situation indiquée, d'associer à X et μ une application $\iota_X = \{\iota_X(\omega), \omega \in \Omega\}$ de $\boldsymbol{R}^T$ dans T définie p.s. par

$$\iota_X(\omega) = t \rightleftharpoons m(\omega, \{t\}) = 1,$$

m étant l'élément maximal de $\mathscr{M}(\mu)$.

Nous étudions maintenant les propriétés de ι_X, en utilisant un schéma proche de l'étude ([1], p. 23-25) donnée précédemment dans une situation plus simple.

Nous supposons que le vecteur gaussien centré $X = (X_1, \ldots, X_n)$ est construit de la façon suivante: $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ est un vecteur gaussien de loi $\mathscr{N}(0, 1)^n$, A est une matrice inversible $n \times n$ et X est égal à $A\Lambda$; nous notons $\Gamma = AA^*$ sa covariance et G la matrice inverse; nous utiliserons la notation ι_A au lieu de ι_X. Pour tout couple (s, t) d'éléments de $T = [1, n]$, nous posons

(22) $$K_A(s, t) = \mathrm{E}\,[(GX)_s I_{\{\iota_A = t\}}],$$

LEMME 2.2.2. *La matrice K_A est symétrique, ses éléments non diagonaux sont négatifs, la somme des éléments de chacune de ses lignes est nulle. De plus, pour toute $(n\times n)$-matrice B, on a*

$$\mathrm{E}(B\Lambda)_{\iota A} = \sum_t \mathrm{E}[(B\Lambda)_t I_{\{\iota_A=t\}}] = \mathrm{Tr}(A^* KB); \tag{23}$$

en particulier

$$\varphi(X,\mu) = \mathrm{Tr}(A^* KA). \tag{24}$$

Démonstration. (a) La formule (23) résulte immédiatement de la définition (22); la formule (24) se déduit alors des définitions de φ et ι_A. La somme des éléments de la ligne de rang s de K_A vaut, par définition de K_A, $\mathrm{E}(GX)_s$ qui est nulle puisque X est centré.

(b) Nous montrons maintenant la symétrie de K_A. Soit U une $(n\times n)$-matrice orthogonale de sorte que $AU\Lambda$ a la même loi que X; la définition de ι_A et le théorème 1.4 montrent donc que

$$0 \leqslant \mathrm{E}(A\Lambda)_{\iota A} - \mathrm{E}(AU\Lambda)_{\iota A} = \mathrm{Tr}\big(A^* K_A A(I-U)\big). \tag{25}$$

Choisissons U diagonale en dehors des lignes s, t et posons, pour tout α,

$$u_{ss} = u_{tt} = \cos\alpha, \quad u_{st} = -u_{ts} = \sin\alpha.$$

Posons $J = A^* K_A A$; la relation (25) s'écrit

$$\forall \alpha\in \boldsymbol{R},\ (1-\cos\alpha)(j_{ss}+j_{tt})+\sin\alpha(j_{ts}-j_{st}) \geqslant 0.$$

Ceci impose la nullité de $j_{st}-j_{ts}$: J est symétrique, K_A l'est aussi.

(c) Pour établir le signe des éléments non diagonaux, il suffit d'étudier celui de $K_A(n, n-1)$. Nous utilisons pour cela la fonction M et la v.a. $g(n-1)$ définie en 2.2.1, (b), formule (20). Nous obtenons, tenant compte de l'unicité de l'élément maximal,

$$I_{\{\iota_A=n-1\}} = g(n-1) = I_{\{X_n\leqslant M\}}\cdot C,$$

où M et C sont $\mathscr{B}(X_1,\dots,X_{n-1})$-mesurables, C est positif ou nul. On a alors, en choisissant l'ordre des intégrations,

$$K_A(n, n-1) = \mathrm{E}[(GX)_n I_{\{\iota_A=n-1\}}]$$

$$= \int \bar{C}(x_1,\dots,x_{n-1})\frac{dx}{dx_n}\int_{-\infty}^{M}\left(\frac{\partial g}{\partial x_n}\right)\exp\left(-\frac{1}{2}g\right)dx_n,$$

$$g(x) = x^* Gx, \quad g(x_n=-\infty) = +\infty, \quad \bar{C}(x_1,\dots,x_{n-1}) \geqslant 0.$$

En intégrant sous cette forme, on obtient

$$K_A(n, n-1) = -2\int \bar{C}(x_1,\dots,x_{n-1})\exp\big(-\tfrac{1}{2}g(x_n=M)\big)dx_1,\dots,dx_{n-1}.$$

Ce dernier membre est bien négatif, le lemme est établi.

2.2.3. Soit $\{u \to A(u)\}$ une application différentiable de $[0,1]$ dans l'ensemble des $(n \times n)$-matrices inversibles. Nous définissons une fonction f sur $[0,1]$ en posant

$$f(u) = \varphi[A(u)\Lambda, \mu]. \tag{26}$$

Nous étudions les variations de f; pour simplifier, nous noterons $\imath(u)$ à la place de $\imath_{A(u)}$.

LEMME 2.2.3. *Supposons que, pour tout couple (s,t) d'éléments de $[1,n]$ différents, on ait*

$$\forall u \in [0,1], \frac{d}{du}\{\sum_{k=1}^{n} [a_{sk}(u) - a_{tk}(u)]^2\} > 0. \tag{27}$$

Dans ces conditions, la fonction f est non décroissante.

Démonstration. (a) Notons d'abord que f est continue. En effet, pour tout couple (u,v) d'éléments de $[0,1]$ et pour tout élément m de $\mathcal{M}(\mu)$, on a

$$f(u) - f(v) \leqslant f(u) - \mathrm{E}\int (A(u)\Lambda)_t\, dm(t)$$

et donc, en particulier,

$$f(u) - f(v) \leqslant \mathrm{E}\,[(A(u) - A(v))\Lambda]_{\imath(u)} \tag{28}$$

ce qui implique, par permutation,

$$|f(u) - f(v)| \leqslant \sum_{s,t=1}^{n} |a_{st}(u) - a_{st}(v)|;$$

la continuité de f résulte donc de la continuité de A.

(b) Pour prouver le lemme, il suffit donc, utilisant un lemme des accroissements finis adapté, de prouver qu'en tout point de $[0,1]$ les deux demi-dérivées inférieures, à gauche ou à droite de f, sont positives ou nulles. Soit donc (u,v) un couple sur $[0,1]$ avec $u \leqslant v$; l'inégalité (28) fournit

$$f(v) - f(u) \geqslant \mathrm{Tr}\,(A^*(u)\, K_{A(u)}\{A(v) - A(u)\}).$$

Nous développons cette dernière quantité en utilisant le lemme 2.2.2; $[f(v) - f(u)]/(v-u)$ est minoré par

$$-\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{t \neq s}\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{[(a_{sk}(v) - a_{tk}(v)) - (a_{sk}(u) - a_{tk}(u))]}{v-u}\times\right.$$
$$\left.\times [a_{sk}(u) - a_{tk}(u)]\right\} K_{A(u)}(s,t).$$

En fixant u sur $[0, 1[$ et en faisant tendre v vers u par valeurs supérieures, on obtient

$$\liminf_{v \downarrow u} \frac{f(v)-f(u)}{v-u} \geqslant 0,$$

en tenant compte des signes des $K_{A(u)}(s, t)$ et des hypothèses (27).

Le signe de la demi-dérivée inférieure à gauche s'obtient de la même façon en fixant v et faisant tendre u vers v par valeurs inférieures.

2.2.4. Démonstration du théorème dans le cas où T est fini. Soient donc X et Y deux vecteurs aléatoires gaussiens centrés sur $[1, n]$ et μ une probabilité sur T. On suppose que X et Y vérifient l'hypothèse (16). Les covariances de X et Y sont simultanément diagonalisables dans le sens suivant: il existe une matrice régulière R et deux matrices diagonales D_X et D_Y telles que

$$\Gamma_X = R(D_X)^2 R^* \quad \text{et} \quad \Gamma_Y = R(D_Y)^2 R^*.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $u \in [0, 1]$, définissons la matrice $A(u, \varepsilon)$ en posant

$$A(u, \varepsilon) = R\sqrt{(D_X)^2 + \varepsilon^2 I + u\left((D_Y)^2 - (D_X)^2 + 3\varepsilon^2 I\right)}.$$

Fixons $\varepsilon > 0$; l'application $A = \{u \to A(u, \varepsilon)\}$ est alors une application différentiable de $[0, 1]$ dans l'ensemble des $(n \times n)$-matrices inversibles vérifiant les relations (27) du fait des hypothèses (16). Le lemme 2.2.3 assure alors que

$$\varphi\left(A(0)\Lambda, \mu\right) \leqslant \varphi\left(A(1)\Lambda, \mu\right).$$

Soit alors Λ' un vecteur gaussien normal indépendant de X et de Y; $X + \varepsilon R\Lambda'$ et $Y + 2\varepsilon R\Lambda'$ ont les mêmes lois que $A(0)\Lambda$ et $A(1)\Lambda$; le théorème 1.4 implique donc

$$\varphi(X + \varepsilon R\Lambda', \mu) \leqslant \varphi(Y + 2\varepsilon R\Lambda', \mu).$$

Le résultat dans le cas fini s'ensuit en faisant tendre ε vers zéro.

2.2.5. Démonstration du théorème dans le cas général. Pour démontrer le théorème dans le cas général, nous utilisons le résultat particulier précédent et les propositions 1.1 et 1.2 avec leurs notations. Soient X et Y deux f.a. gaussiennes centrées continues en probabilité, donc dans $L^1(P)$ sur un espace polonais (T, d) et vérifiant les inégalités (16); pour toute partition finie $\mathscr{S}$ de T et tout élément u de l'espace produit $\mathscr{U}$ associé, on a, en appliquant 2.2.4 dans le support fini de μ_u,

$$\varphi(X, \mu_u) \leqslant \varphi(Y, \mu_u)$$

et donc, en appliquant 1.1 à X et à Y,

$$\varphi(X_{\mathscr{S}}, \mu_{\mathscr{S}}) \leqslant \int \varphi(X, \mu_u)\, dM_u \leqslant \int \varphi(Y, \mu_u)\, dM(u) \leqslant \varphi(Y, \mu).$$

L'inégalité (17) est donc vérifiée. On obtient les relations (18) à partir des inégalités ci-dessus en suivant le schéma de la proposition 1.2. Si on suppose de plus X μ-régulière, on a alors

$$\varphi(X, \mu) \leqslant \sup_{\mathscr{S}} \varphi(X_{\mathscr{S}}, \mu_{\mathscr{S}}) \leqslant \varphi(Y, \mu).$$

C'est le résultat (19) qui est donc établi. Le théorème est démontré.

2.3. Dans cette section, nous énonçons et démontrons des corollaires du théorème 2.1.

2.3.1. COROLLAIRE 2.3.1. *Soient X et Y deux f.a. gaussiennes centrées continues en probabilité sur un espace polonais (T, d); soit de plus μ une probabilité sur T. On suppose que, pour tout couple (s, t) d'éléments de T, on a*

$$d_X(s, t) \leqslant d_Y(s, t), \quad \sigma_X(s) \leqslant \sigma_Y(s).$$

On suppose aussi que X^+ est μ-régulière. On a alors

$$\varphi(X^+, \mu) \leqslant \varphi(Y^+, \mu).$$

Démonstration. (a) Démontrons d'abord le corollaire en supposant que T est fini. Complétons alors T par un élément supplémentaire a et sur $\bar{T} = T \cup \{a\}$ définissons deux f.a. gaussiennes $\bar{X}$ et $\bar{Y}$ prolongeant X et Y et nulles en a. Soit m un élément de $\mathscr{M}(\mu)$; on a

$$\mathrm{E} \int X^+ \, dm = \sum_T \mathrm{E}[\bar{X}(t)\bar{m}(t)] + \mathrm{E}[\bar{X}(a)\bar{m}(a)],$$

où la probabilité $\bar{m}(\omega, dt)$ est définie sur $\bar{T}$ par

$$\forall t \in T,\ \bar{m}(\omega, t) = m(\omega, t) I_{\{X(\omega,t) \geqslant 0\}}, \quad \bar{m}(\omega, a) = m(\omega)\{t\colon X(\omega, t) < 0\}.$$

Si on note $\bar{\mu}$ l'espérance de $\bar{m}$, on a donc $\mathrm{E} \int X^+ \, dm \leqslant \varphi(\bar{X}, \bar{\mu})$. Le théorème 2.1 étant applicable à $\bar{X}$ et $\bar{Y}$, on a aussi $\mathrm{E} \int X^+ \, dm \leqslant \varphi(\bar{Y}, \bar{\mu})$. Par ailleurs, la restriction de $\bar{\mu}$ à T étant majorée par μ, à tout élément $\bar{m}$ de $\mathscr{M}(\bar{\mu})$, on peut associer un élément m de $\mathscr{M}(\mu)$ majorant sa restriction à T en posant

$$m = \bar{m} + \frac{\mu - \bar{\mu}}{\bar{\mu}\{a\}} \bar{m}\{a\}.$$

On a alors

$$\mathrm{E} \int \bar{Y} d\bar{m} = \sum_T \mathrm{E}[Y^+(t)\bar{m}(t)] \leqslant \mathrm{E} \int Y^+ \, dm.$$

Et finalement

$$\varphi(X^+, \mu) = \sup_{\mathscr{M}(\mu)} \mathrm{E} \int X^+ \, dm \leqslant \sup_{\mathscr{M}(\mu)} \mathrm{E} \int \bar{Y} d\bar{m} \leqslant \sup_{\mathscr{M}(\mu)} \mathrm{E} \int Y^+ \, dm = \varphi(Y^+, \mu).$$

C'est le résultat dans le cas particulier où T est fini.

(b) L'extension au cas général s'opère suivant le même schéma qu'en 2.2.5 puisque X^+ est alors supposée μ-régulière.

2.3.2. COROLLAIRE 2.3.2. *Soit X f.a. gaussienne centrée continue en probabilité sur un espace polonais (T, d). Soient de plus μ une probabilité sur T et λ une v.a. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. On pose $\sigma(t) = \sigma_X(t)$. On a alors*

$$\varphi(\lambda\sigma, \mu) \leqslant \varphi(X, \mu), \qquad \varphi(\lambda^+\sigma, \mu) \leqslant \varphi(X^+, \mu).$$

Si de plus $|X|$ est μ-régulière, on a aussi

$$\varphi(|X|, \mu) \leqslant \varphi(X, \mu) + 2\sqrt{2}\,\varphi(\lambda^+\sigma, \mu).$$

Démonstration. Comme précédemment, il suffit de prouver ces inégalités lorsque T est fini. Les deux premières formules résultent de l'application du théorème 2.1 et du corollaire 2.3.1 aux f.a. gaussiennes $\lambda\sigma$ et X.

Prouvons la dernière affirmation. Sur le produit $T \times (1, 2)$, nous définissons deux vecteurs gaussiens centrés U et V à partir d'un couple (λ_1, λ_2) de v.a. indépendantes de lois $\mathcal{N}(0, 1)$ en posant

$$\begin{aligned} U(t, 1) &= X(t), & V(t, 1) &= X(t) + \lambda_1 \sigma(t)\sqrt{2}, \\ U(t, 2) &= -X(t), & V(t, 2) &= +X(t) + \lambda_2 \sigma(t)\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Les coëfficients ont été choisis de sorte que d_U soit majoré par d_V, puisque

$$\left.\begin{aligned} d_U^2(t, 1;\ s, 2) &= \sigma^2(t) + \sigma^2(s) + 2\gamma(t, s), \\ d_V^2(t, 1;\ s, 2) &= 3\sigma^2(t) + 3\sigma^2(s) - 2\gamma(t, s), \end{aligned}\right. \quad \gamma(t, s) \leqslant \sigma(t)\sigma(s).$$

Soit alors $m \in \mathcal{M}(\mu)$; $\mathrm{E}\int |X|\, dm$ peut s'écrire

$$\sum_T \mathrm{E}\big[U(t, 1)\, m(t)\, I_{\{X(t) \geqslant 0\}}\big] + \sum_T \mathrm{E}\big[U(t, 2)\, m(t)\, I_{\{X(t) < 0\}}\big].$$

Nous définissons alors une probabilité $\bar{\mu}$ sur $T \times (1, 2)$ à partir des espérances des coëfficients de U dans ces sommes et nous appliquons le théorème 2.1:

$$\mathrm{E}\int |X|\, dm \leqslant \varphi(U, \bar{\mu}) \leqslant \varphi(V, \bar{\mu});$$

maintenant tout élément $\bar{m}$ de $\mathcal{M}(\bar{\mu})$ définit, par regroupement sur T, un élément m de $\mathcal{M}(\mu)$ et on a donc

$$\varphi(V, \bar{\mu}) \leqslant \varphi(X, \mu) + 2\sqrt{2}\,\varphi(\lambda^+\sigma, \mu).$$

En comparant les deux dernières inégalités, on obtient le résultat.

Le corollaire ci-dessus montre l'importance pour les évaluations générales du calcul de $\varphi(\lambda\sigma, \mu)$ et de $\varphi(\lambda^+\sigma, \mu)$.

2.3.3. PROPOSITION 2.3.3. *Soient T un espace polonais, σ une fonction continue sur T à valeurs positives ou nulles et μ une probabilité sur T; on* *suppose* $\int \sigma d\mu < \infty$; *soit de plus* λ *une v.a. de loi* $\mathcal{N}(0, 1)$. *Dans ces conditions,* $\lambda\sigma$ *et* $\lambda^+ \sigma$ *sont* μ*-régulières et on a*

$$\varphi(\lambda^+ \sigma, \mu) \leqslant 10 \int \sigma(t) \sqrt{\ln\left(1+\frac{\sigma(t)}{\int \sigma d\mu}\right)}\, d\mu(t),$$

$$\int \sigma(t) \sqrt{\ln\left(1+\frac{\sigma(t)}{\int \sigma d\mu}\right)}\, d\mu(t) \leqslant 10 \left[\varphi(\lambda\sigma, \mu)+ \int \sigma d\mu\right].$$

Démonstration. (a) Fixons $\varepsilon > 0$ et construisons une partition finie et mesurable $\mathcal{S} = \{s_j, 1 \leqslant j \leqslant n\}$ de T telle que

$$\forall j < n, (s, t) \in s_j \times s_j \Rightarrow |\sigma(s)-\sigma(t)| < \varepsilon; \quad \int_{s_n} \sigma d\mu < \varepsilon.$$

On majore immédiatement pour tout élément m de $\mathcal{M}(\mu)$ les différences

$$\left|\mathrm{E} \int X dm - \mathrm{E} \int X_{\mathcal{S}}\, dm_{\mathcal{S}}\right|, \quad X = \lambda^+ \sigma \text{ ou } X = \lambda\sigma,$$

par 2ε. La régularité de $\lambda^+ \sigma$ et de $\lambda\sigma$ en résulte.

(b) Pour obtenir la première inégalité, on utilise l'espace d'Orlicz (E, N) associé à $P(d\omega)$ et $\exp(x^2)$ muni de sa norme d'Orlicz. Soit (E', N') son dual; on obtient pour tout élément m de $\mathcal{M}(\mu)$:

$$\mathrm{E}\left[|\lambda| \int \sigma dm\right] \leqslant N(\lambda)\, N'\left(\int \sigma dm\right).$$

$N(\lambda)$ est inférieur à 2 et $N'\left(\int \sigma dm\right)$ se majore ([1], p. 59) par

$$5 \int \sigma(t) \sqrt{\ln\left(1+\frac{\sigma(t)}{\int \sigma d\mu}\right)}\, d\mu(t),$$

c'est le résultat.

(c) Démontrons la deuxième inégalité. On peut supposer que σ sépare le support de μ; nous posons

$$\forall u \in \boldsymbol{R}, \Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_u^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx,$$

$$\forall t \in T, F(t) = \mu\{s \colon \sigma(s) \geqslant \sigma(t)\}.$$

Nous définissons une v.a. $\imath = \imath(\omega)$ en posant

$$\imath(\omega) = t \rightleftarrows F(t) \leqslant \Phi \circ \lambda(\omega) \leqslant \sup_{\sigma(s) > \sigma(t)} F(s),$$

de sorte que $\imath$ a pour loi μ. On calcule facilement la loi de $(\imath, \lambda)$ et donc l'espérance de $[\sigma(\imath)\lambda]$. On obtient

$$10\mathrm{E}\left[\sigma(\imath)\lambda\right] \geqslant \sum_T \sigma(t)\mu(t) \sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{F(t)}\right)} - 3 \sum_T \sigma(t)\mu(t).$$

On en déduit le résultat puisque l'inégalité de Čebičev implique

$$F(t) \leqslant \frac{1}{\sigma(t)} \int \sigma d\mu.$$

Remarque. En utilisant l'espace d'Orlicz associé sur T à μ et $\exp(x^2)$, on déduit ([1], théorème 5.1.2) de la proposition 2.3.3 les formules

$$(29) \qquad \varphi(\lambda^+ \sigma, \mu) \leqslant 2N'(\sigma), \quad N'(\sigma) \leqslant 30\left[\varphi(\lambda\sigma, \mu) + \int \sigma d\mu\right].$$

2.4. Régularité de fonctions aléatoires gaussiennes. Les résultats précédents ne donnent pas un champ d'application suffisamment vaste au théorème 2.1. Si par exemple μ est portée par un ensemble dénombrable, la conclusion (18) de ce théorème semble nécessiter des conditions restrictives de régularité pour X; nous montrons maintenant que de telles restrictions sont inutiles. Plus généralement:

THÉORÈME 2.4. *Soit X une f.a. gaussienne centrée sur un espace polonais (T, d); soient de plus μ une probabilité sur T et $(A_k, k \in N)$ une suite croissante de parties mesurables de T. On suppose que $\int \sigma d\mu$ est fini et que les hypothèses suivantes sont vérifiées*:

(i) $\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = 1$,

(ii) $\forall k \in N$, $I_{A_k} \cdot X$ *est μ-régulière*,

(iii) $\forall m \in \mathcal{M}(\mu)$, $\mathrm{E} \int |X| dm < \infty$

ou

(iii') $\forall k \in N$, $I_{A_k} \cdot |X|$ *est μ-régulière.*

Dans ces conditions, X est aussi μ-régulière.

La démonstration de ce théorème utilisera plusieurs lemmes que nous énonçons et démontrons maintenant.

2.4.1. LEMME 2.4.1. *Soient X une f.a. gaussienne continue en probabilité sur un espace polonais (T, d), μ une probabilité sur T et A une partie mesurable de T. Nous notons $I_A \cdot X$ la f.a. gaussienne sur T définie par*

$$I_A \cdot X(t) = \begin{cases} X(t) & \text{si } t \in A, \\ 0 & \text{sinon}. \end{cases}$$

On a alors $\varphi(I_A \cdot X, \mu) \leqslant 51\left[\varphi(X, \mu) + \int \sigma d\mu\right]$.

Démonstration. Nous supposons que $\mu(A)$ est inférieure à 1 et que $\varphi(X, \mu)$ et $\int \sigma d\mu$ sont finis. Nous appliquons la proposition 1.1 à la partition formée par A et son complémentaire; évaluant $\varphi(X_{\mathcal{S}}, \mu_{\mathcal{S}})$ à partir de la proposition 2.3.3, nous obtenons

$$(30) \qquad 10\left[\varphi(X, \mu) + \int \sigma d\mu\right] \geqslant \sqrt{\ln \frac{1}{\mu(A)} \iint_{A\times A} \gamma(u, v) d\mu(u) d\mu(v)}.$$

Par ailleurs, pour tout élément m de $\mathcal{M}(\mu)$, le calcul de l'intégrale $\int I_A \cdot X dm$ utilise seulement la restriction de m à A et si l'on pose

$$\bar{m} = I_A \cdot m + \frac{1-m(A)}{1-\mu(A)}(1-I_A)\cdot\mu,$$

alors $\bar{m}$ est aussi un élément de $\mathcal{M}(\mu)$ et on a donc

$$\mathrm{E}\int I_A \cdot X dm \leqslant \varphi(X,\mu) + \left|\mathrm{E}\left[\frac{1-m(A)}{1-\mu(A)} \int_{T\setminus A} X d\mu\right]\right|. \tag{31}$$

Puisque $1-m(A)$ est compris entre zéro et un et $\mathrm{E}[1-m(A)]$ est égal à $1-\mu(A)$, un lemme classique majore le dernier terme; on obtient

$$5\sqrt{\ln\frac{1}{1-\mu(A)} \iint_{(T\setminus A)\times(T\setminus A)} \gamma(u,v)\,d\mu(u)\,d\mu(v)}\,.$$

Les formules (30) et (31) donnent alors le résultat.

2.4.2. LEMME 2.4.2. *Soient X une f.a. gaussienne centrée continue en probabilité sur un espace polonais (T,d) et μ une probabilité sur T. On suppose que $\varphi(X,\mu)$ est fini. On a alors*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{\mu(A)<\varepsilon}\sqrt{\ln\frac{1}{\mu(A)}}\int_A \sigma d\mu = 0.$$

Démonstration. Des hypothèses, il résulte (proposition 2.3.3) que σ appartient au dual de l'espace d'Orlicz associé sur T à μ et à $\exp(x^2)$; la conclusion traduit alors une propriété générale de cet espace. Détaillons en notant pour tout entier k: $A_k = A\cap\{\sigma\leqslant k\}$ et $B_k = A\cap\{\sigma > k\}$. On a

$$N'(\sigma I_{B_k}) \leqslant 3\int_{\sigma\geqslant k}\sigma\sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{\mu\{s:\ \sigma(s)\geqslant\sigma\}}\right)}\,d\mu;$$

le dernier membre tend vers zéro quand k tend vers l'infini. Fixons $\varepsilon > 0$ et choisissons k de sorte $N'(\sigma I_{B_k})$ soit inférieur à $\varepsilon/2$. Maintenant, on a aussi

$$N'(\sigma I_{A_k}) \leqslant kN'(I_A) \leqslant k\mu(A)\sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{\mu(A)}\right)}.$$

Choisissons donc $\eta > 0$ de sorte que

$$0 < t \leqslant \eta \Rightarrow t\sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2k};$$

on aura alors

$$\mu(A) < \eta \Rightarrow \int_A \sigma d\mu \leqslant N(I_A)\{N'(\sigma I_{A_k}) + N'(\sigma I_{B_k})\} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\ln 1/\mu(A)}}\varepsilon,$$

c'est le résultat.

2.4.3. Lemme 2.4.3. *Soit X une f.a. gaussienne centrée sur un espace polonais (T, d); soient de plus μ une probabilité sur T et $(A_k, k \in N)$ une suite croissante de parties mesurables de T. On suppose vérifiées les hypothèses* (i) *et* (iii) *du théorème* 2.4. *On a alors*

$$\lim_{k \to \infty} \varphi(I_{A_k} \cdot X, \mu) = \varphi(X, \mu).$$

Démonstration. L'inégalité (31) implique

$$\forall k \in N, \varphi(I_{A_k} \cdot X, \mu) \leqslant \varphi(X, \mu) + 5\sqrt{\ln \frac{1}{1-\mu(A_k)}} \int_{T \setminus A_k} \sigma d\mu.$$

Utilisant, si $\varphi(X, \mu)$ est fini, l'hypothèse (i) et le lemme 2.4.2, on en déduit

$$\limsup_{k \to \infty} \varphi(I_{A_k} \cdot X, \mu) \leqslant \varphi(X, \mu). \tag{32}$$

Inversement, pour tout élément m de $\mathscr{M}(\mu)$, on a

$$\forall k \in N, \mathrm{E} \int X dm \leqslant \varphi(I_{A_k} \cdot X, \mu) + \mathrm{E} \int_{T \setminus A_k} |X| dm.$$

Les hypothèses (i) et (iii) impliquent que le dernier terme tend vers zéro quand k tend vers l'infini, on a donc

$$\varphi(X, \mu) \leqslant \sup_{\mathscr{M}(\mu)} \mathrm{E} \int X dm \leqslant \liminf_{k \to \infty} \varphi(I_{A_k} \cdot X, \mu). \tag{33}$$

Les inégalités (32) et (33) impliquent le résultat.

2.4.4. Démonstration du théorème 2.4. (a) Montrons d'abord que si $\varphi(\lambda\sigma, \mu)$ est infini, alors X est régulier. En effet, utilisant le dual (E', N') de l'espace d'Orlicz associé à μ et à $\exp(x^2)$, la proposition 2.3.3 implique que, pour tout $M > 0$, il existe une partie compacte K de T telle que $N'(\sigma I_K) > M$. Fixons $\varepsilon > 0$, il existe une partition finie et mesurable $\mathscr{S} = \{s_j, 1 \leqslant j \leqslant n+1\}$ de T telle que

$$\forall j \in [1, n], d(s_j) \leqslant \varepsilon, \quad N'\Big(\sigma \sum_1^n I_{s_j}\Big) > M.$$

On constate alors que $30\left[\varphi(X_{\mathscr{S}}, \mu_{\mathscr{S}}) + \int \sigma d\mu\right] \geqslant M - \varepsilon$. Ceci montre que $\sup \varphi(X_{\mathscr{S}}, \mu_{\mathscr{S}})$ n'est pas fini, X est donc régulier.

(b) Dans les conditions du théorème, supposons les hypothèses (i), (ii) et (iii) vérifiées et $\varphi(\lambda\sigma, \mu)$ fini. Le lemme 2.4.2 implique alors

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt{\ln \frac{1'}{1-\mu(A_k)}} \int_{T\setminus A_k} \sigma d\mu = 0. \tag{34}$$

Fixons $\varepsilon > 0$; la relation (34) et le lemme 2.4.3 montrent qu'il existe un entier k_0 tel que

$$\varphi(X, \mu) \leqslant \varphi(I_{A_{k_0}} \cdot X, \mu) + \frac{\varepsilon}{3}, \qquad \sqrt{\ln \frac{1}{1-\mu(A_{k_0})}} \int_{T\setminus A_{k_0}} \sigma d\mu \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Il existe aussi (hypothèse (ii)) une partition finie et mesurable $\mathscr{S}$ de T tell que

$$\varphi\left((I_{A_{k_0}} \cdot X)_{\mathscr{S}}, \mu_{\mathscr{S}}\right) \geqslant \varphi(I_{A_{k_0}} \cdot X, \mu) - \varepsilon/3;$$

comme le premier membre de cette inégalité est une fonction croissante de $\mathscr{S}$, on peut supposer que $\mathscr{S}$ contient une partition du complémentaire de A_{k_0} et même, puisque $(I_{A_{k_0}} \cdot X)$ est constant dans ce complémentaire, que c'est un élément de $\mathscr{S}$ de sorte que $(I_{A_{k_0}} \cdot X)_{\mathscr{S}}$ et $(X)_{\mathscr{S}}$ ne différent que du seul terme correspondant. On a alors

$$\varphi\left((I_{A_{k_0}} \cdot X)_{\mathscr{S}}, \mu_{\mathscr{S}}\right) \leqslant \varphi(X_{\mathscr{S}}, \mu_{\mathscr{S}}) + \sqrt{\ln \frac{1}{1-\mu(A_{k_0})}} \int_{T\setminus A_{k_0}} \sigma d\mu.$$

En regroupant ces inégalités, on obtient $\varphi(X, \mu) \leqslant \varphi(X_{\mathscr{S}}, \mu_{\mathscr{S}}) + \varepsilon$, X est donc régulier.

(c) Dans les conditions du théorème, si les hypothèses (i), (ii) et (iii') sont vérifiées, le corollaire 2.3.2 et la proposition 2.3.3 permettent d'écrire

$$\forall k \in N, \varphi(I_{A_k} \cdot |X|, \mu) \leqslant 300 \left[\varphi(I_{A_k} \cdot X, \mu) + \int \sigma d\mu\right].$$

On en déduit que si $\sup_k \varphi(I_{A_k} \cdot X, \mu)$ est fini, l'hypothèse (iii) est vérifiée de sorte que (b) montre que X est régulier. Si, au contraire, $\sup_k \varphi(I_{A_k} \cdot X, \mu)$ est infini, alors $\sup_{\mathscr{S},k} \varphi\left((I_{A_k} \cdot X)_{\mathscr{S}}, \mu_{\mathscr{S}}\right)$ l'est aussi, et on montre comme en (b) que X est aussi régulier. Le théorème est prouvé.

2.4.5. COROLLAIRE 2.4.5. *Soient X une f.a. gaussienne centrée continue en probabilité sur un espace polonais (T, d) et μ une probabilité sur T. On suppose $\int \sigma d\mu < \infty$.*

(a) *Supposons que μ soit à support dénombrable; alors X est μ-régulière.*

(b) *Supposons que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie mesurable A de T telle que*

(b_1) $\mu(A) > 1-\varepsilon$,

(b_2) *la restriction de X à A a p.s. ses trajectoires continues.*

Alors toute version séparable de X est μ-régulière.

Eléments de démonstration. Le corollaire résulte du théorème en remarquant dans le cas (a) que $I_A \cdot X$ est μ-régulière pour toute partie finie A de T et dans le cas (b) en utilisant le théorème 1.4 dans une suite croissante de compacts.

3. LES ÉVALUATIONS

3.1. THÉORÈME 3.1. *Soient X une f.a. gaussienne centrée continue en probabilité sur un espace polonais (T, d) et μ une probabilité sur T. Pour tout élément t de T et tout $u > 0$, on pose*

$$(35)\quad B(t,u) = \{s \in T\colon d_X(s,t) \leqslant u\}, \qquad a(t) = \inf\{a \in \boldsymbol{R}\colon \mu B(t,a) \geqslant \tfrac{1}{2}\}.$$

On suppose que

$$(36)\ I(X,\mu) = \int d\mu(t) \left\{\sigma(t)\sqrt{\log\left(1+\frac{\sigma(t)}{\int \sigma d\mu}\right)} + \int_0^{a(t)} \sqrt{\log\left(1+\frac{1}{\mu B(t,u)}\right)}\, du\right\}$$

est fini.

Dans ces conditions, toute version séparable X' de X est μ-régulière et on a

$$(37)\qquad \varphi(|X'|, \mu) \leqslant 200\, I(X,\mu).$$

3.1.1. On remarquera que la majoration (37) utilise deux termes dont le premier est naturel puisque la proposition 2.3.3 montre qu'il est nécessairement fini si $\varphi(X,\mu)$ l'est. L'introduction du second terme sera justifiée par la suite dans certains cas. On remarquera aussi que l'hypothèse (36) se recopie plus simplement si $\sigma(t)$ est fini.

3.1.2. Démonstration. (a) L'hypothèse implique qu'il existe une suite positive $(\varepsilon_n, n \in \boldsymbol{N})$ tendant vers zéro telle que

$$\sum_n \int d\mu(t) \cdot 2^n \int_0^{\varepsilon_n} \sqrt{\log\left(1+\frac{1}{\mu B(t,u)}\right)}\, du < \infty.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe alors un nombre C tel que

$$(38)\qquad \mu\left\{t\colon \sum_n 2^n \int_0^{\varepsilon_n} \sqrt{\log\left(1+\frac{1}{\mu B(t,u)}\right)}\, du < C\right\} > 1-\varepsilon.$$

En appliquant le corollaire 2.4.5 (b), on en conclut ([1], théorème 6.2.1) la régularité de X'.

(b) Supposons X séparable et mesurable. En adaptant la construction de [1], théorème 6.1.1, nous associons à tout élément t du support de μ la série

$$\int_{B(t,a(t))} \frac{X d\mu}{\mu B(t, a(t))} + \sum_1^\infty \left\{ \int\int \frac{X(u)-X(v)}{d(u,v)} \theta_k(t;\ u, v)\, d\mu(u)\, d\mu(v) \right\},$$

avec

$$\theta_k(t;\ u, v) = \frac{I_{B_1 \times B_2}(u, v) - I_{B_1 \times B_2}(v, u)}{\mu(B_1)\mu(B_2)} d(u, v),$$

où

$$B_1 = B\left(t, \frac{a(t)}{2^k}\right) \quad \text{et} \quad B_2 = B\left(t, \frac{a(t)}{2^{k-1}}\right).$$

Le théorème 6.1.1 de [1] et la propriété (38) impliquent que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie A de T sur laquelle la série converge uniformément p.s. vers X telle que de plus $\mu(A) > 1-\varepsilon$. Ceci suffit pour majorer $\varphi(|X|, \mu)$ à partir des valeurs associées aux différents termes de la série. On a

$$\varphi\left(\int_{B(t,a(t))} \frac{|X|\, d\mu}{\mu B(t, a(t))}, \mu \right) \leqslant 2\varphi\left(\int |X|\, d\mu, \mu\right) \leqslant 2 \int \sigma d\mu.$$

On majore les termes suivants en utilisant l'espace d'Orlicz associé à $\exp(x^2)$ sur $\Omega \times T \times T$ muni de $P \otimes \mu \otimes \mu$ et l'espace associé à $x\sqrt{\log(1+x)}$ sur $T \times T \times T$ muni de $\mu \otimes \mu \otimes \mu$. On obtient

$$\varphi\left[\left| \int\int \frac{X(u)-X(v)}{d(u,v)} \theta_k(t;\ u, v)\, d\mu(u)\, d\mu(v) \right|, \mu \right] \leqslant \sqrt{\frac{8}{3}}\, N'(\theta_k),$$

$$N'(\theta_k) \leqslant 18 \int \frac{a(t)}{2^k} \sqrt{\log\left(1 + \frac{a(t)}{[\mu B(t, a(t)/2^k)]^2 \int a d\mu}\right)}\, d\mu(t)$$

et par suite

$$\sum_{k=1}^\infty N'(\theta_k) \leqslant 18 \int \left[\int_0^{a(t)} \sqrt{\log\left(1 + \frac{a(t)}{(\int a d\mu)\mu^2 B(t, u)}\right)}\, du \right] d\mu(t);$$

on en déduit facilement (37) puisque l'inégalité de Čebičev montre

$$a(t) \leqslant 2\sigma(t) + 2 \int \sigma(s)\, d\mu(s),$$

et donc

$$\int a(t)\sqrt{\log\left(1+\frac{a(t)}{\int a d\mu}\right)}\,d\mu(t) \leqslant 6\int \sigma(t)\sqrt{\log\left(1+\frac{\sigma(t)}{\int \sigma d\mu}\right)}\,d\mu(t)+2\int \sigma d\mu.$$

Le théorème est prouvé.

3.2. Minorations de $\varphi(X, \mu)$. Les méthodes de minoration de $\mathrm{E}\sup X$ ne se transposent pas directement à $\varphi(X, \mu)$. En effet, elles utilisent des parties suffisamment éparpillées de T qui risquent de porter très peu la mesure μ. Nous avons explicité précédemment deux minorations dans le cas indépendant ([2], exemple 2.3) et dans le cas ultramétrique ([3], 1.2). Utilisant le théorème de comparaison (théorème 2.1), nous pouvons énoncer

3.2.1. THÉORÈME 3.2.1. *Soient X une f.a. gaussienne centrée continue en probabilité sur un espace polonais T et μ une probabilité sur T; soit de plus $\mathscr{S} = \{s_k, k\in[1, K]\}$ une partition finie et mesurable de T. Dans ces conditions, on a*

(39) $$\sum_{1}^{K}\sqrt{\log\left(1+\frac{1}{\mu(s_k)}\right)}\int_{t\in s_k}[\inf_{s\notin s_k} d(s, t)]\,d\mu(t) \leqslant 20\varphi(X, \mu).$$

Démonstration. Nous utilisons les notations de 1.1; de plus pour tout choix u appartenant à $\prod_{1}^{K} s_k$, nous définissons Y sur u en posant

$$\forall k\in[1, K],\ Y(u_k) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\inf_{s\notin s_k} d(u_k, s)]\,\lambda_k,$$

où $(\lambda_k, k\in[1, K])$ a pour loi $\mathscr{N}(0, 1)^K$. Le théorème 2.1 permet d'écrire $\varphi(Y, \mu_u) \leqslant \varphi(X, \mu_u)$. On sait aussi ([2], exemple 2.3) que l'on a

$$\varphi(Y, \mu_u) \geqslant \frac{1}{15}\sum_{1}^{K}\mu(s_k)\left(\sqrt{\log\frac{1}{\mu(s_k)}}-1\right)\sigma\big(Y(u_k)\big).$$

La proposition 1.1 donne alors le résultat.

3.2.2. THÉORÈME 3.2.2. *Soient X une f.a. gaussienne centrée sur T égal à $\boldsymbol{R}$ ou à un intervalle de $\boldsymbol{R}$ et μ une probabilité sur T. On suppose que X est séparable et mesurable et que la distance associée à X est croissante en le sens suivant:*

(40) $$\forall(s, t, s', t')\in T^4,\ s \leqslant s' \leqslant t' \leqslant t \Rightarrow d_X(s', t') \leqslant d_X(s, t).$$

Dans ces conditions, avec les notations du théorème 3.1, pour que $\varphi(X, \mu)$ soit fini, il faut et il suffit que $I(X, \mu)$ le soit et on a

(41) $$2\cdot 10^4\,\varphi(|X|, \mu) \geqslant I(X, \mu).$$

3.2.3. Remarque 3.2.3. Nous avons déjà utilisé les f.a. gaussiennes à distance croissante au sens (40) dans un travail précédent [3]. On notera en particulier que puisque X est séparable, l'ensemble

$$\{t \in T: \limsup_{s \to t} d_X(s, t) > 0\}$$

est au plus dénombrable ([3], lemme 2.2.1a). On notera aussi que pour tout élément t de T la relation (40) implique

$$\lim_{s \downarrow t} \lim_{u \downarrow t} d_X(s, u) = 0, \quad \lim_{s \uparrow t} \lim_{u \uparrow t} d_X(s, u) = 0.$$

Pour démontrer le théorème, nous utiliserons quelques lemmes que nous énonçons maintenant; dans ces lemmes, nous supposons que T contient 0.

3.2.4. LEMME 3.2.4. *Sous les hypothèses du théorème, pour tout nombre positif a, on peut recouvrir T par une partition finie ou dénombrable d'intervalles $(I_k^a, k \in \boldsymbol{Z})$ telle que*

(i) $I_0^a = B(0, a)$,

(ii) $\forall k \in \boldsymbol{Z}, d_X(I_k^a) \leqslant 2a$,

(iii) $|k-l| > 1 \Rightarrow d_X(I_k^a, I_l^a) \geqslant a$.

Démonstration. La construction est la suivante: I_0^a étant fixé par (i), on détermine, pour tout $k > 0$, I_k^a en fonction de I_{k-1}^a en posant

$$b_{k-1} = \begin{cases} \sup I_{k-1}^a & \text{si } I_{k-1}^a \text{ n'est pas vide,} \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

et en distinguant l'alternative suivante:

si b_{k-1} appartient à I_{k-1}^a, alors on pose

$$I_k^a = \{t > b_{k-1}: \lim_{s \downarrow b_{k-1}} d_X(s, t) \lneqq a\};$$

si, au contraire, b_{k-1} n'appartient pas à I_{k-1}^a, alors on pose

$$I_k^a = \{t \geqslant b_{k-1}: d_X(b_{k-1}, t) \leqslant a\}.$$

Par ailleurs, pour tout $k < 0$, I_k^a est construit symétriquement en fonction de I_{k+1}^a. Par construction, la suite est formée d'intervalles successifs disjoints vérifiant (i), (ii) et (iii) de sorte que nous aurons démontrer le lemme si nous montrons qu'elle recouvre T et plus spécialement $T \cap \boldsymbol{R}^+$. Notons que la suite $(b_k, k > 0)$ est croissante et ne peut être finalement stationnaire que si, à partir d'un certain rang k_0, I_k^a est vide ce qui d'après (42) implique que T est fermé à droite par b_{k_0} et donc que les $(I_k^a, k \leqslant k_0)$ recouvrent $T \cap \boldsymbol{R}^+$. Notons aussi que la suite $(b_k, k \geqslant 0)$ ne peut pas converger vers b dans T, on aurait alors

$$\lim_{k \to \infty} \lim_{l \to \infty} d_X(b_k, b_l) \geqslant a, \quad \lim_{s \uparrow b} \lim_{t \uparrow b} d_X(s, t) \geqslant a,$$

ce qui contredirait (42). Dans ces conditions, la seule possibilité restante est celle où la suite (b_k) diverge dans T; T est alors ouvert à droite et les intervalles $(I_k^a, k \geqslant 0)$ recouvrent T. Le lemme est démontré.

3.2.5. LEMME 3.2.5. *Soit $(\lambda_n, n \in N)$ une suite gaussienne normale. Utilisant les notations* 3.2.2-3.2.4, *nous construisons sur T une seconde f.a. gaussienne centrée Z en posant*

$$Z(t) = \sum_{n \in Z} (C \cdot 2^n) \lambda_n I_{V_n}, \quad \text{où } V_n = \{t \in \bigcup_{k \in Z} I_{2k+1}^{(C \cdot 2^n)}\}.$$

Nous supposons que $\varphi(X, \mu)$ est fini, alors $\varphi(Z, \mu)$ l'est aussi et on a

$$\varphi(Z, \mu) \leqslant 9 \int \sigma \sqrt{\log\left(1 + \frac{\sigma}{\int \sigma d\mu}\right)} d\mu. \tag{43}$$

Démonstration. Notons d'abord que, pour tout élément t de T, la convergence p.s. de la série Z du côté $(n < 0)$ ne pose pas de problème et que l'hypothèse (i) du lemme 3.2.4 montre que les termes du côté $(n > 0)$ sont nuls dès que $C \cdot 2^n$ est supérieure à $d_X(0, t)$ puisqu'alors T appartient à $I_0^{C \cdot 2^n}$. On a d'ailleurs

$$\varphi(Z, \mu) \leqslant \sum_{n \in Z} C \cdot 2^n \sup_{m \in \mathcal{M}(\mu)} \mathrm{E}[|\lambda_n| m\{d(0, t) > C \cdot 2^n\}]$$

et donc, en utilisant les espaces d'Orlicz habituels,

$$\varphi(Z, \mu) \leqslant \sqrt{\frac{8}{3}} \sum_{n \in Z} 2^n C \mu[d_X(0, t) > C \cdot 2^n] \sqrt{\log\left(1 + \frac{1}{\mu[d_X(0, t) > C \cdot 2^n]}\right)}.$$

Ceci fournit

$$\varphi(Z, \mu) \leqslant \sqrt{\frac{8}{3}} \int_0^\infty \mu[d_X(0, t) > u] \sqrt{\log\left(1 + \frac{1}{\mu[d_X(0, t) > u]}\right)} du.$$

L'inégalité (43) s'en déduit facilement; le second membre est fini si $\varphi(X, \mu)$ l'est (proposition 2.3.3), le lemme est démontré.

3.2.6. Nous démontrons maintenant le théorème. Nous supposons que $\varphi(X, \mu)$ est fini et nous utilisons les éléments mis en évidence dans les lemmes 3.2.4 et 3.2.5. Bien entendu $\varphi(X+Z, \mu)$ est fini et nous allons utiliser la structure particulière de $X+Z$ et le théorème 2.1.

Soit C un nombre positif; nous notons $\mathcal{S}_n$ la partition de T définie par $\{I_k^{C \cdot 2^n}, k \in \boldsymbol{Z}\}$, $\mathcal{T}_n$ la partition de T engendrée par $\{\mathcal{S}_k, k \geqslant n\}$ dont l'un des éléments est $B(0, C \cdot 2^n)$. Nous notons λ une suite normale sur $\{\mathcal{T}_n, n \in \boldsymbol{Z}\}$ et

π_n l'application canonique de T dans $\mathscr{T}_n$. Nous définissons une f.a. gaussienne centrée U sur T en posant

$$U(t) = \sum_{\substack{n>0 \\ \pi_n(t)\neq\pi_n(0)}} C\cdot 2^n \lambda(\pi_n(t)) + \sum_{n\leqslant 0} C\cdot 2^n \lambda(\pi_n(t)).$$

On peut comparer les distances définies par U, X et $X+Z$. Notons, en effet, $n_0 = n_0(s,t)$ le plus grand des entiers n tels que $\mathscr{T}_n$ sépare s et t.

$$C\cdot 2^{n_0} \leqslant d_U(s,t) \leqslant \sqrt{8/3}\, C\cdot 2^{n_0}, \tag{44}$$

$$d_X(s,t) \leqslant C\cdot 2^{n_0+1}, \quad d_{X+Z}(s,t) \geqslant C\cdot 2^{n_0}. \tag{44'}$$

En particulier on en déduit $d_U(s,t) \leqslant \sqrt{8/3}\, d_{X+Z}(s,t)$, de sorte que le théorème 2.1 implique

$$\varphi(U,\mu) \leqslant \sqrt{8/3}\, \varphi(X+Z,\mu). \tag{45}$$

Nous pouvons maintenant minorer $\varphi(U,\mu)$ en utilisant le même schéma qu'à l'alinéa 3.3.2 de [2], avec des précautions supplémentaires puisqu'ici U n'a pas de diamètre borné et ne contient pas de terme associé à $\pi_n(0)$, $n > 0$. Nous obtenons

$$15\varphi(U,\mu) \geqslant \sum_{n\in Z} C\cdot 2^n \sum_{t\in\mathscr{T}_{n+1}} \sum_{\substack{u\in\mathscr{T}_n \\ \pi_n^{-1}(u)=\pi_{n+1}^{-1}(t) \\ u\neq B(0,C\cdot 2^n),n>0}} \left(\sqrt{\log\frac{\mu(t)}{\mu(u)}}-1\right)\mu(u),$$

et, par conséquent, en développant:

$$15\varphi(U,\mu) \geqslant \sum_{n\in Z} C\cdot 2^{n-1} \sum_{\substack{t\in\mathscr{T}_n \\ t\neq B(0,C\cdot 2^n),n>0}} \sqrt{\log\left(1+\frac{1}{\mu(t)}\right)}\,\mu(t) -$$
$$-\left[1+\sqrt{\log\left(1+\frac{1}{\mu B(0,2C)}\right)}\right]\sum_{n\in Z} C\cdot 2^{n-1}\mu\{d(0,t) > C\cdot 2^{n-1}\}.$$

Des calculs élémentaires donnent alors

$$15\varphi(U,\mu) \geqslant \frac{1}{4}\int d\mu(t) \int_0^{4\sup(C,d(0,t))} \sqrt{\log\left(1+\frac{1}{\mu B(t,u)}\right)}\,du - \tag{46}$$
$$-2\left[1+\sqrt{\log\left(1+\frac{1}{\mu B(0,2C)}\right)}\right]\int d(0,t)\,d\mu(t).$$

Posant alors $C = \frac{1}{2}a(0)$, où $a(0)$ est défini par (35), on a

$$a(t) \leqslant 4 \sup(C, d(0,t)), \quad \mu B(0, 2C) \geqslant \tfrac{1}{2},$$

et, par conséquent,

$$\int d\mu(t) \int_0^{a(t)} \sqrt{\log\left(1+\frac{1}{\mu B(t,u)}\right)}\, du \leqslant 60\varphi(U,\mu)+9\int \sigma(t)\, d\mu(t).$$

Le résultat s'ensuit en appliquant 2.3.3, (43) et (45); le théorème est prouvé.

3.2.7. COROLLAIRE 3.2.7. *Soient X une f.a. gaussienne centrée sur T égal à $\mathbf{R}$ ou à un intervalle de $\mathbf{R}$ et μ une probabilité sur T. On suppose que X est séparable et mesurable et que sa distance est croissante au sens* (40) *et bornée sur T. Dans ces conditions, pour $\varphi(X,\mu)$ soit fini, il faut et il suffit que l'intégrale*

$$\int d\mu(t) \int \sqrt{\log \frac{1}{\mu B(t,u)}}\, du$$

soit finie.

Démonstration. La suffisance résulte du théorème 3.1; la nécessité se déduit de l'inégalité (46) en prenant pour C le diamètre de T.

3.3. Remarques finales. Initialement, ce travail visait à mieux comprendre l'introduction des probabilités μ dans les majorations et les minorations de la loi de $\sup_T X$ associées à une f.a. gaussienne X sur un espace polonais T. Ce but est atteint puisque les majorations (théorème 3.1) et les minorations (théorème 3.2.2) présentées ici analysent exactement en fonction de μ les majorations et les minorations précédemment connues ([1], [3]) pour $\mathrm{E} \sup_T X$. L'outil essentiel est le remarquable théorème 2.1 qui élargit le champ des propriétés de monotonie des vecteurs gaussiens. On peut espérer qu'il existe un énoncé du même genre utilisant à la place de l'hypothèse uniforme (16) des hypothèses spécifiquement liées à μ! On notera par ailleurs que l'étude des versions régulières des f.a. gaussiennes (théorème 2.4 et corollaire 2.4.5) introduit le problème suivant:

Soient X une f.a. gaussienne centrée séparable et mesurable sur un espace polonais T et μ une probabilité sur T. Ecrivons deux propriétés suivantes:

(a) $\varphi(X,\mu)$ est fini;

(b) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie mesurable A de T sur laquelle la restriction de X a p.s. des trajectoires continues vérifiant $\mu(A) > 1-\varepsilon$.

Quelles relations lient les propriétés (a) et (b)?

TRAVAUX CITÉS

[1] X. Fernique, *Régularité des trajectoires des fonctions aléatoires gaussiennes*, Lect. Notes Math. 480 (1975), p. 1-96.
[2] — *Evaluation de processus gaussiens composés*, ibidem 526 (1976), p. 67-83.
[3] — *Caractérisation de processus à trajectoires majorées ou continues*, ibidem 649 (1978), p. 691-706.

Institut de Recherche Mathématique Avancée
Laboratoire Associé au C.N.R.S.
7, rue René Descartes
67084 Strasbourg Cédex, France

Received on 28. 11. 1979