PROBABILITY
AND
MATHEMATICAL STATISTICS

Vol. 6, Fasc. 1 (1985), p. 19-27

CALCUL DE LA VITESSE DE CONVERGENCE DANS LE THEOREME CENTRAL LIMITE VIS A VIS DES DISTANCES DE PROHOROV, DUDLEY ET LEVY DANS LE CAS DE VARIABLES ALEATOIRES DEPENDANTES

PAR

P. DOUKHAN, J. LEON* ET F. PORTAL (PARIS)

Abstract. The paper gives a general framework to estimate Dudley and Lévy's metrics for Hilbert space valued random variables and Prohorov's one for the k-dimensional distributions of an $\mathbf{R}^d$-valued process, in the case of central limit theorem for stationary and mixing random variables. The speeds of convergence obtained here are approximately $n^{-1/4}$, $n^{-1/12}$ and $k^{5/8}n^{-1/12}$, where n is the length of the observed sample and with quite strong mixing hypotheses.

1. Introduction. Soit $(X_n)_{n\in N}$ une suite stationnaire et φ-mélangeante de variables aléatoires à valeurs dans un espace de Hilbert, H, séparable.

Nous notons $S_n = (X_1 + \ldots + X_n)/\sqrt{n}$ et Y, une variable aléatoire gaussienne centrée et de covariance Γ,

$$\Gamma(a, b) = E(Ya)(Yb) = (X_0 a)(X_0 b) + \sum_{n=1}^{\infty} E[(X_n a)(X_0 b) + (X_0 a)(X_n b)].$$

Cette expression est bien définie lorsque

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n^{1/2} < \infty$$

et que les X_n admettent un moment d'ordre 2.

Nous donnons ici, sous des hypothèses additionnelles concernant le mélange et l'existence de moments, des évaluations de la vitesse de convergence de la suite $(\nu_n)_{n\geqslant 1}$ des lois de $(S_n)_{n\geqslant 1}$ vers celle, ν, de Y. Nous nous intéressons aux distances de Dudley, d_3, et de Lévy, Δ_n, définies par

$$d_3(\nu_n, \nu) = \operatorname{Sup}\Big\{\Big|\int f\, d(\nu_n-\nu)\Big|;\, f\in C^3(H),\ \sum_{j=0}^{3} \|D^j f\|_\infty \leqslant 1\Big\},$$

où $C^3(H)$ désigne l'espace des fonctions trois fois continuement différentiables sur H,

$$\Delta_n = \operatorname*{Sup}_{t>0} \big|P(\|S_n\| < t) - P(\|Y\| < t)\big|;$$

pour cela nous utilisons la méthode et les résultats de Kuelbs et Kurtz [8].

Nous évaluons aussi, lorsque $H = \mathbf{R}^k$ est un espace de dimension finie et que les X_n sont les répartitions fini-dimensionnelles d'une suite $(x_n(t))_{n\geqslant 0}$ de processus centrés, la distance de Prohorov $\varrho_k(\nu_n, \nu)$ en suivant Yurinskii [10].

Dans les cas considérés, l'évaluation de la distance entre ν_n et ν repose sur celle d'une expression du type

$$\delta_n(f) = \big|E\big(f(S_n) - f(Y)\big)\big|.$$

La fonction f vérifie:

$$C_j = \operatorname*{Max}_{0\leqslant i\leqslant j} \|D^i f\|_\infty < \infty \qquad \text{pour } j = 1, 2, 3 \text{ et } \|f\|_\infty \leqslant 1.$$

2. Lemme fondamental. Pour évaluer δ_n, nous effectuons un regroupement par blocs.

Soient $0 < q < p < n$ des entiers à préciser. Nous posons:

$$H_j = [(j-1)(p+q),\, j(p+q)-q[\, \cap N$$

pour

$$j = 1, \ldots, l = \left[\frac{n}{p+q}\right],\ H = [l(p+q),\, n] \cap N \text{ et } I = ([0, n]\cap N)\setminus\Big(H \cup \Big(\bigcup_{j=1}^{l} H_j\Big)\Big).$$

Nous faisons alors le regroupement des variables X_n par paquets:

$$u_j = \sum_{i\in H_j} X_i/\sqrt{n}, \quad v = \sum_{i\in I} X_i/\sqrt{n}, \quad w = \sum_{i\in H} X_i/\sqrt{n} \text{ et } u = u_1 + \ldots + u_l.$$

Nous construisons de plus les variables $\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_l$ indépendantes et de même loi que $u_1, \ldots, u_l$; la distance en variation totale de la loi de u à celle de $\tilde{u} = \tilde{u}_1 + \ldots + \tilde{u}_l$ est majorée par $(l-1)\varphi_q$. Ainsi, si les variables $y_1, \ldots, y_l$ sont gaussiennes centrées et de même covariance que $u_1, \ldots, u_l$ et $y = y_1 + \ldots + y_l$ nous avons

$$\delta_n(f) = |Ef(u+v+w) - f(Y)| \leqslant a+b+c+d+e$$

avec $a = |Ef(u+v+w)-f(u+w)|$, $b = |Ef(u+w)-f(u)|$, $c = |Ef(u)-f(\tilde{u})|$, $d = |Ef(\tilde{u})-f(y)|$ et $e = |Ef(y)-f(Y)|$.

L'inégalité des accroissements finis montre que $a \leqslant C_1 \|v\|_2$.

La formule de Taylor à l'ordre 1 donne: $b \leqslant C_1 \varphi_q^{1/2} \|w\|_2 + C_2 \|w\|_2^2$. D'après la remarque précédente, $c \leqslant l\varphi_q$.

Le terme d est majoré par la distance de Dudley calculée par Kuelbs et Kurtz [8]: $d \leqslant KC_3\, lE\|u_1\|^3$ pour une constante K universelle.

Enfin, [5] fournit une majoration du dernier terme en considérant la notion de norme de la trace d'un opérateur de covariance utilisée par Dehling [1].

Commençons par évaluer la distance de Dudley de deux lois gaussiennes μ et ν sur H.

Soit $f \in C^3(H)$ telle que

$$\sum_{i=0}^{3} \|D^i f\|_\infty < 1, \qquad \delta(f) = \left|\int f\, d(\mu-\nu)\right|.$$

Si $M_1, \ldots, M_r$, M et $N_1, \ldots, N_r$, N sont des copies indépendantes de variables aléatoires de lois respectives μ et ν: $d_3(\mu, \nu) \leqslant r d_3(\boldsymbol{P}_{M_1/\sqrt{r}}, \boldsymbol{P}_{N_1/\sqrt{r}})$. De plus,

$$|Ef(M)-f(N)| \leqslant r\,|ED^2 f(0)(M_1/\sqrt{r}) - D^2 f(0)(N_1/\sqrt{r})| + \frac{\|M_1\|_3^3 + \|N_1\|_3^3}{r^{1/2}}.$$

Une application répétée du théorème de convergence dominée montre que le premier terme est majoré par

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} |((A-B)e_i, e_j)|$$

et où $(e_i)_{i\geqslant 1}$ est une base orthonormée de H qui diagonalise $A-B$. Les termes de degré 3 disparaissent lorsque l'on fait tendre r vers l'infini. Ainsi, $d_3(\mu, \nu) \leqslant \|A-B\|_1$.

Etudions la norme de la trace de $A-B$ où A est la covariance de y et B celle de Y. C'est la borne supérieure de

$$\theta((e_i)_{i\geqslant 1}) = \sum_{i=1}^{\infty} |((A-B)e_i, e_i)|$$

lorsque $(e_i)_{i\geqslant 1}$ désigne une base orthonormée de H. Soit C l'opérateur de covariance de $\sqrt{n/p}u_1$; il vient:

$$\|A-C\|_1 \leqslant 4\Big(1+\sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i^{1/2}\Big)\|X_0\|_2^2 \left(\frac{lq+p}{n}\right).$$

De même, $\|B-C\|_1$ est la borne supérieure d'expressions de la forme

$$\lambda\big((e_i)_{i\geq 1}\big) = \sum_{i=1}^{\infty} \big|\big((B-C)e_i,\, e_i\big)\big|.$$

Or

$$\big((B-C)e_i,\, e_i\big) = \frac{1}{p}\mathrm{E}\Big(\sum_{k=1}^{p} X_k\cdot e_i\Big)^2 - \Big[2\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{E}(X_1\cdot e_i)(X_k\cdot e_i) + \mathrm{E}(X_1\cdot e_i)^2\Big],$$

d'où

$$\big((B-C)e_i,\, e_i\big) = \frac{2}{p}\sum_{k=1}^{p} (1-k)\mathrm{E}(X_1\cdot e_i)(X_k\cdot e_i) - 2\sum_{k=p+1}^{\infty} \mathrm{E}(X_1\cdot e_i)(X_k\cdot e_i)$$

et

$$\big|\big((B-C)e_i,\, e_i\big)\big| \leqslant 4\left[\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{\infty} k\varphi_k^{1/2} + \sum_{k=p+1}^{+\infty} \varphi_k^{1/2}\right]\mathrm{E}(X_1\cdot e_i)^2.$$

Or le facteur de $E(X_1 e_i)^2$ est un $O(q/p)$ lorsque $p\to\infty$ si $\operatorname{Sup}_n n^4\varphi_n < \infty$ lorsque $q = O(p)$, $p^2 = O(n)$ quand n tend vers l'infini et si

$$\sum_{k=0}^{\infty} k\varphi_k^{1/2} < \infty.$$

Ainsi

$$\|B-C\|_1 = O\left(\frac{1}{p}\|X_1\|_2^2\right) \quad \text{quand } p\to\infty$$

et donc

$$e \leqslant K' C_3 \|X_0\|_2^2\, q/p \quad \text{si } \sup_n n^4\varphi_n < \infty \text{ et } \sum_{n\geqslant 0} n\varphi_n^{1/2} < \infty$$

pour une constante K' universelle lorsque $0\leqslant q\leqslant p\leqslant n^{1/2}$.

A présent, nous pouvons donner les évaluations de moments suivantes:

$$\|w\|_2^2 \leqslant 8\frac{p}{n}\|X_0\|_2^2 \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i^{1/2}, \qquad \|v\|_2^2 \leqslant 4\frac{lq}{n}\|X_0\|_2^2 \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i^{1/2}.$$

Lemme 1. *Si*

$$\sup_n n^4\varphi_n < \infty, \quad \sum_n n\varphi_n^{1/2} < \infty \quad \textit{et} \quad 0 < \quad < p < n^{1/2},$$

nous obtenons la majoration:

$$\delta_n(f) \leqslant C\{C_1[(lq/n)^{1/2} + \varphi_q^{1/2}(p/n)^{1/2}]A + C_2 A^2 p/n + l\varphi_q + {}$$
$$+ C_3[A^2 q/p + l\|u_1\|_3^3]\};$$

ici C désigne une constante ne dépendant que du mélange, et $A = \|X_0\|_2$.

3. Evaluation des distances de Dudley et de Levy. Nous commençons par l'étude de la distance de Dudley; elle correspond à $C_1 = C_2 = C_3 = 1$. Le seul terme restant à évaluer est $\|u_1\|_3^3 \leqslant \|u_1\|_4^3$, or ce terme est majoré [3] par

$$\|u_1\|_4^4 \leqslant K'' n^{-2}(p\|X_0\|_2^4 + p^2\|X_0\|_{4+\delta}^4),$$

où la constante K'' ne dépend que du mélange.

En définitive, il existe une constante C' ne dépendant que du mélange telle que

$$d_3(\nu_n, \nu) \leqslant C'\{[(q/p)^{1/2} + \varphi_q^{1/2}(p/n)^{1/2}]A + (p/n)A^2 + \varphi_q n/p + \\ + A^2 q/p + B^3(p/n)^{1/2}\}$$

pour $B = \|X_0\|_{4+\delta}$.

Cette expression est optimisée par $p = [n^{(b+1)/2}]$, $q = [n^b]$ et on obtient:

THÉORÈME 1. *Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une suite stationnaire et φ-mélangeante de variables aléatoires à valeurs dans un espace de Hilbert, H, séparable et telle que*:

(i) $\mathrm{E}\|X_n\|^{4+\delta} < \infty$ *pour un* $0 < \delta \leqslant 1$ *et* $\mathrm{E}X_n = 0$;

(ii) $\sum_{n\geqslant 0} n^2 \varphi_n^{\delta/(4+\delta)} < \infty$ *et il existe* $0 < b \leqslant \frac{1}{4}$ *tel que* $\varphi_n = O(n^{-\beta})$ *quand* $n \to \infty$, *si* $\beta = (b^{-1} - \frac{1}{4})$.

Alors il existe une constante C_b ne dépendant que de b et du mélange φ, telle que

$$d_3(\nu_n, \nu) \leqslant C_b[1 + \|X_0\|_{4+\delta}^3) n^{(b-1)/4}.$$

Remarquons que, si H est un espace euclidien de dimension finie, on peut affaiblir les hypothèses, en supposant $\mathrm{E}\|X_n\|^4 < \infty$ au lieu de (i) et en remplaçant l'hypothèse $\sum_{n\geqslant 0} n^2\varphi_n^{\delta/(4+\delta)} < \infty$ par $\sum_{n\geqslant 0} n^2 \varphi_n^{1/4} < \infty$.

En suivant la méthode de Kuelbs et Kurtz, nous obtenons directement une majoration de la distance de Lévy,

$$\Delta_n \leqslant \frac{d_3(\nu_n, \nu)}{\varepsilon^3} + C_0\varepsilon,$$

c'est-à-dire que, sous les hypothèses du théorème 1,

$$\Delta_n \leqslant K_b(1 + \|X_0\|_{4+\delta}^{3/4}) n^{(b-1)/16}.$$

Toutefois, il est préférable de considérer l'évaluation du lemme 1 en considérant $0 < \varepsilon < 1$, $t \geqslant 0$ et des fonctions f vérifiant $C_j < C\varepsilon^{-j}$ pour $j = 1, 2, 3$. Alors ([8] ou [5])

$$\Delta_n \leqslant \sup_f \{\delta_n(f)\} + C_0\varepsilon.$$

Ainsi

$$\Delta_n \leqslant CC'\left[\varepsilon^{-1} A\left((q/p)^{1/2} + \varphi_q^{1/2}(p/n)^{1/2}\right) + \varepsilon^{-2} A^2 p/n + \varepsilon^{-3} B^3\left(q/p + (p/n)^{1/2}\right) + \right.$$
$$\left. + \varphi_q n/p\right] + C_0 \varepsilon.$$

Cette expression est optimisée par $\varepsilon = (B^{3/4}+1)\, n^{(a-1)/8}$, $p = [n^a]$, $q = [n^b]$, où $a = (2n+1)/3$.

THÉORÈME 2. *Soit* $(X_n)_{n \geqslant 0}$ *une suite stationnaire vérifiant les hypothèses* (i) *et* (ii) *du théorème* 1 *avec* $\beta = \frac{3}{4}[1/b - 1]$. *Alors*

$$\Delta_n \leqslant K_b(\|X_0\|_{4+\delta}^{3/4} + 1)\, n^{(b-1)/12},$$

où K_b *est une constante ne dépendant que de* b *et du mélange.*

Remarquons, en suivant Paulauskas [9] que Δ_n peut être remplacé par

$$\Delta_n(a) = \operatorname*{Sup}_{t > 0} \left| P(\|S_n - a\| < t) - P(\|Y - a\| < t) \right|.$$

La même majoration vaut encore dans ce cas, sans toutefois être uniforme par rapport à $x \in H$. De même des ensembles de bord régulier peuvent être traités de manière analogue.

Remarquons enfin que l'apport de ce travail le cas de la distance de Lévy réside dans des conditions de mélange plus faibles que celles de [5].

Des applications de ces résultats sont données dans [7].

4. Distance de Prohorov. Nous considérons, ici, un espace $H = \mathbb{R}^k$ de dimension k. Rappelons que Yurinskii [10] évalue la distance de Prohorov $\varrho_k(P, Q)$ des lois P et Q sur $\mathbb{R}^k$ en considérant, pour tous $0 < \varepsilon < 1$ et A fermé de $\mathbb{R}^k$, une fonction f de classe C^3, à valeurs dans $[0, 1]$, supérieure à $1-\varepsilon$ sur A et inférieure à ε sur le complémentaire du ε_1-voisinage A^{ε_1} de A, où

$$\varepsilon_1 = 4\varepsilon\sqrt{k}\left(1 + \sqrt{\log(1/\varepsilon)}\right).$$

La fonction f considérée vérifie, de plus, que $C_j < 2k^{-1/2}\varepsilon^{-j}$ pour $j = 1, 2, 3$. La distance de Prohorov de P à Q vérifie alors que

$$\varrho_k(P, Q) \leqslant \varepsilon_1 + 2\delta, \qquad \text{où } \delta = \operatorname{Sup}\left\{\left|\int f\, d(P-Q)\right|;\ A \subset \mathbb{R}^k,\ A = \bar{A}\right\}.$$

Soit $(x_n(t);\, t \in T)_{n \geqslant 0}$ une suite de processus stationnaire et φ-mélangeante à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ telle que $\mathrm{E}\,\|x_n(t)\|^4 < \infty$ et $\mathrm{E}\, x_n(t) = 0$ pour tout t dans T. Nous évaluons ici la vitesse de convergence des répartitions, K-dimensionnelles, S_n, de $s_n = (x_1 + \ldots + x_n)/\sqrt{n}$; ainsi $k = Kd$. Le pendant de cette évaluation est une estimation des oscillations du processus x_n que nous considérons dans [4] et [6].

De ce qui précède, nous déduisons que

$$\varrho_k(\nu_n, \nu) \leqslant C\,\{\varepsilon k^{1/2}\log^{1/2}(1/\varepsilon)+\varepsilon^{-1} m\big((q/p)^{1/2}+\varphi_q^{1/2}(p/n)^{1/2}\big)+ \\ +\varepsilon^{-2} m^2 k^{1/2} p/n+\varphi_q n/p+\varepsilon^{-3} k\big(m^2 q/p+M^3(p/n)^{1/2}\big)\},$$

où $m = \operatorname{Sup}\{\|x_0(t)\|_2;\, t\in T\}$, $M = \operatorname{Sup}\{\|x_0(t)\|_4;\, t\in T\}$, en vertu des résultats de [3] et du fait que $\|X_0\|_2^2 \leqslant Km^2$ et $\|X_0\|_4^4 \leqslant K^2 M^4$.

La constante C invoquée par cette inégalité ne dépend que du mélange qui doit, de plus, vérifier $\sum_{n\geqslant 0} n^n \varphi_n^{1/2} < \infty$.

La distance de Prohorov de ν_n à ν est évaluée en optimisant cette expression avec

$$\varepsilon = (M^{3/4}+1)\,k^{1/8}\,n^{(a-1)/8},$$

$$p=[n^a], \quad q=[n^b], \quad 0\leqslant b\leqslant 1, \quad a=\frac{2b+1}{3}.$$

THÉORÈME 3. *Soit $(x_n(t);\, t\in T)_{n\geqslant 0}$ une suite de processus indexée par un ensemble T, stationnaire et φ-mélangeante à valeurs d-dimensionnelles vérifiant:*

(i) $M = \operatorname{Sup}\{\|x_n(t)\|_4;\, t\in T\} < \infty$, $\operatorname{E} x_n(t) = 0$, $\forall t\in T$.

(ii) $\sum_{n\geqslant 0} n^2 \varphi_n^{1/4} < \infty$ *et il existe* $0<b<\frac{1}{4}$ *tel que* $\varphi_n = O(n^{3(1-1/b)/4})$ *quand* $n\to\infty$.

Alors, pour tout K-uplet $(t_1,\ldots,t_K)\in T^K$, *si* $X_n = \big(x_n(t_1),\ldots,x_n(t_K)\big)$,

$$\varrho_k(\nu_n, \nu) \leqslant C(M^{3/4}+1)K^{5/8} n^{(b-1)/12}(\log^{1/2} M+\log^{1/2} K+\log^{1/2} n)$$

pour une constante C ne dépendant que du mélange et de d et

$$M = \sup_{t\in T}\{\|x_0(t)\|_4\}.$$

Remarque. Ce résultat améliore celui de [4] qui donne une vitesse de convergence de l'ordre de $M^{3/4}K^{13/16}n^{-1/24}$.

COROLLAIRE 1. *Si le mélange est de type géométrique, c'est-à-dire qu'il existe des constantes* $u>0$, $0<v<1$ *telles que* $\varphi_n \leqslant uv^n$, *alors, sous les hypothèses* (i) *du théorème* 4,

$$\varrho_k(\nu_n, \nu) \leqslant C(M^{3/4}+1)K^{5/8} n^{-1/12}\log^{1/12} n(\log^{1/2} M+\log^{1/2} k+\log^{1/2} n).$$

Remarque. Dans le cas de mélange géométrique, des énoncés analogues apparaissent pour le cas des distances de Dudley et de Lévy, les vitesses correspondantes sont, respectivement, $C\log^{1/4} n\; n^{-1/4}(1+\|X_0\|_{4+\delta}^3)$ et $C\log^{1/12} n\; n^{-1/12}(1+\|X_0\|_{4+\delta}^{3/4})$.

La constante C invoquée par ces trois résultats ne dépend que des constantes u et v définies dans le corollaire 1.

Etudions à présent le cas d'un mélange fort. Dans ce cas le lemme 1 ne vaut plus directement. C'est pourquoi nous devons reprendre des calculs analogues à ceux de [4] en utilisant la méthode de regroupement en blocs donnée au § 1.

Désignons encore par f la fonction définie au début de ce paragraphe:

$$|Ef(S_n)-f(Y)| \leqslant a+b+c+d$$

avec $a = |\mathrm{E}f(u+v+w)-f(u+w)|$, $b = |\mathrm{E}f(u+w)-f(u)|$, $c = |\mathrm{E}f(u)-f(y)|$ et $d = |\mathrm{E}f(y)-f(Y)|$.

Nous voyons alors que $a \leqslant C_1 \|v\|_2 \leqslant C\varepsilon^{-1} M(q/p)^{1/2}$, $b \leqslant 1$. La formule de Taylor donne

$$b \leqslant 4\alpha C_1 \|w\|_{2+\delta} + C_2 \|w\|_{2+\delta}^2 \leqslant C\big(\varepsilon^{-1}\alpha(p/n)^{1/2} M + \varepsilon^{-2} k^{1/2} M^2 p/n\big),$$

α désigne $\alpha_q^{\delta/(4+\delta)}$ pour un $0<\delta<1$, vérifiant $\sum n^2 \alpha_n^{\delta/(2+\delta)} < \infty$ [3].

Un calcul analogue à celui de [4] permet l'évaluation suivante, en utilisant [2] dans $H = \mathbb{R}^k \otimes \mathbb{R}^k$:

$$c \leqslant 4C_1\, l\alpha \|u_1\|_{2+\delta} + 4C_2\, k\alpha l \|u_1\|_{4+\delta}^2 + C_3\, l \|u_1\|_{4}^3;$$

$$c \leqslant C\,[\alpha\varepsilon^{-1} l (p/n)^{1/2} + \alpha\varepsilon^{-2}(p/n)\, lM^2 + \varepsilon^{-3} k (p/n)^{1/2} M^3].$$

Le dernier terme s'évalue de manière analogue à [5]: $d \leqslant kM^2 q/p\varepsilon^2$.

Nous obtenons ainsi l'évaluation suivante de $\varrho_k(v_n, v)$, pour une constante C donnée:

$$\varrho_k(v_n, v) \leqslant C\big[\varepsilon k^{1/2} \log^{1/2}(1/\varepsilon) + \varepsilon^{-1} M[(q/p)^{1/2} + \alpha(n/p)^{1/2}] + \\ + \varepsilon^{-2}[k^{3/2}\alpha M^2 + k^{1/2} p/nM^2] + \varepsilon^{-3} M^3 k\big(q/p + (p/n)^{1/2}\big).$$

Cette expression est optimisée par rapport à ε lorsque

$$\varepsilon = (M^{3/4}+1) k^{1/8} n^{(a-1)/8}, \qquad p = [n^a],\ q = [n^b] \text{ et } a = \frac{2b+1}{3},$$

alors

$$\varrho_k(v_n, v) \leqslant (M^{3/4}+1) k^{5/8} n^{(b-1)/12} [\log^{1/2} M + \log^{1/2} k + \log^{1/2} n]$$

sous les conditions de mélange:

$$\sum n^2 \alpha_n^{\delta/(4+\delta)} < \infty, \qquad \sup_n \alpha_n^{\delta/(4+\delta)} n^{2(1/b-1)/3} k < \infty.$$

THÉORÈME 4. *Soit* $\{x_n(t);\, t \in T\}$ *une suite stationnaire et fortement mélangeante de processus centrés tels que*

$$M = \operatorname{Sup}_t \|x_n(t)\|_{4+\delta} < \infty.$$

S'il existe $0 < \delta < 1$ *et* $0 < b < \frac{1}{4}$ *tels que*

$$\sum n^2 \alpha_n^{\delta/(4+\delta)} < \infty \quad et \quad \operatorname*{Sup}_n (\alpha_n^{\delta/(4+\delta)} n^v k) < \infty \qquad pour \ v = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{b} - 1\right),$$

alors

$$\varrho_k(v_n, v) \leqslant C(M^{3/4} + 1) k^{5/8} n^{(b-1)/12}$$

pour une constante C ne dépendant que du mélange.

Remarquons que la méthode de calcul permet un gain appréciable de vitesse par rapport à [4] et que la condition portant sur le mélange comporte une contrainte par rapport à la dimension k de l'espace des projections du processus $x(t)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. Dehling, *Limit theorems for sums of weakly dependent Banach space valued random variables*, Z. W. 63 (1983), p. 393.

[2] H. Dehling et W. Philipp, *Almost sure invariance principles for weakly dependent vector valued random variables*, Ann. Prob. 10.3 (1982), p. 689.

[3] P. Doukhan et F. Portal, *Moments de variables aléatoires mélangeantes*, CRAS, Série I, 297 (1983), p. 129.

[4] — *Principe d'invariance faible pour la fonction de répartition empirique*, ibidem 197 (1983), p. 505.

[5] P. Doukhan, J. Leon et F. Portal, *Vitesse de convergence dans T. L. C. pour des v.a. mélangeantes à valeurs dans un espace de Hilbert*, ibidem 298 (1984), p. 305.

[6] — *Principes d'invariance faible dans un cadre mélangeant* (à paraître).

[7] — *T. L. C. dans les espaces de Hilbert et applications aux statistiques dans un cadre mélangeant* (à paraître aux annales de l'I. H. P.).

[8] J. Kuelbs et T. Kurtz, *Berry–Essen estimates in Hilbert space and an application to the law of interated logarithm*, Ann. Prob. 2.3 (1974), p. 387.

[9] V. Paulauskas, *On the approximation of indicator functions by smooth functions in Banach spaces*, Proceedings of Oberwolfach Conference, 1980.

[10] V. V. Yurinskii, *On the error of the Gaussian approximation for convolutions*, Theor. Prob. Appl. 22.2 (1977), p. 237.

Université Paris XI
91405 Orsay, Cedex
France

* Dpto. de Matemáticas
Fac. de Ciencias
U. C. V. Caracas
Venezuela

Received on 17. 4. 1984