

EGZAMIN Z ANALIZY MATEMATYCZNEJ (CZĘŚĆ 1)

ZA KAŻDE ZADANIE MOŻNA DOSTAĆ OD 0 DO 5 PUNKTÓW. PIERWSZA CZĘŚĆ SKŁADA SIĘ Z 5 ZADAŃ TESTOWYCH I TRWA 80 MINUT OD 10:00 DO 11:20, PO NIEJ NASTĄPI 20-MINUTOWA PRZERWA, A NA KOŃCU BĘDZIE DRUGĄ CZĘŚĆ SKŁADAJĄCĄ SIĘ Z 5 ZADAŃ OTWARTYCH (OD 11:40 DO 13:00). NALEŻY SIĘ PODPISAC NA KAŻDEJ KARTCE. ZA LICZBY NATURALNE PRZYJMUJEMY $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

POWODZENIA!

IMIĘ I NAZWISKO:

ZADANIE 1: O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że:

- $\forall n \in \mathbb{N} \quad T(n) \implies T(n+3)$
- $T(100)$ jest prawdziwe,
- $T(60)$ jest fałszywe.

Określ, czy poniższe zdania są:

- **P** - prawdziwe,
- **F** - fałszywe,
- **N** - nie wiadomo (tzn. nie da się określić prawdziwości z powyższych założeń).

Punkty za zadanie otrzymasz punkty w przeliczeniu według poniższej tabeli

liczba pop. odp.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
punkty	0	0	0	1	1	2	2	3	4	4	5

1. $T(999) \dots$
2. $T(1000) \dots$
3. $T(1001) \dots$
4. $T(9) \dots$
5. $T(10) \dots$
6. $T(11) \dots$
7. $T(45) \implies T(253) \dots$
8. $T(253) \implies T(45) \dots$
9. $T(99) \implies T(197) \dots$
10. $T(99) \implies T(198) \dots$

IMIĘ I NAZWISKO:

ZADANIE 2: Oszacuj podane poniżej liczby wpisując w każdym przypadku dwie **kolejne** liczby z ciągu:

$$10, 10^2, 10^5, 10^{10}, 10^{20}, 10^{50}, 10^{100}, 10^{200}, 10^{500}, 10^{1000}, 10^{2000}, 10^{5000}, 10^{10000}, 10^{20000}, \\ 10^{50000}, 10^{100000}, 10^{200000}, 10^{500000}, 10^{1000000}, 10^{2000000}, 10^{5000000}, 10^{10000000}$$

Za każdy poprawnie rozwiązany podpunkt otrzymasz po jednym punkcie.

$$\dots < (10\pi)^{111111} < \dots$$

$$\dots < \pi^{678} < \dots$$

$$\dots < 98765! < \dots$$

$$\dots < 1234^{1234} < \dots$$

$$\dots < \binom{1234}{12} < \dots$$

IMIĘ I NAZWISKO:

ZADANIE 3: Podaj wartość granic (tylko odpowiedzi, bez uzasadnienia). Liczbę punktów otrzymasz w zależności od liczby poprawnych odpowiedzi według poniższej tabeli.

liczba pop. odp.	0	1	2	3	4	5	6	7	8
punkty	0	0	1	2	2	3	4	4	5

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{12n^6 + 3n^2 + 1}}{(2n+1)(n-1)(\frac{1}{3}n+7)} = \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^4 + 4n^2} - n^2) = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow 27} \frac{\sqrt[3]{x} - 3}{x - 27} = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + x^{-x})^{(x+3)^x} = \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n+7} \right)^{\sqrt{n^2+n}} = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\pi - e)^{\frac{1}{x}} = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{\sin(x)}}{x} = \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\log_3(n^3 + 1) - \log_3(n)) = \dots$$

IMIĘ I NAZWISKO:

ZADANIE 4: Podaj kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru (napisz TAK lub NIE). Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $\infty = +\infty$. Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz 1 punkt. Za zadania, w których podasz niepełną lub nie w pełni poprawną odpowiedź otrzymasz częściowe punkty, które na końcu zostaną zaokrąglone w dół do części całkowitej. Przypomnienie: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

$$A = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N}, 3^n \leq 9^m \leq 12^n \right\}$$

$\sup(A) = \dots\dots\dots$, \sup należy - $\dots\dots\dots$, $\inf(A) = \dots\dots\dots$, \inf należy - $\dots\dots\dots$,

$$B = \left\{ \frac{4n+2}{4n+3} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$\sup(B) = \dots\dots\dots$, \sup należy - $\dots\dots\dots$, $\inf(B) = \dots\dots\dots$, \inf należy - $\dots\dots\dots$,

$$C = \left\{ \frac{m^2 + n^4}{mn^2} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$\sup(C) = \dots\dots\dots$, \sup należy - $\dots\dots\dots$, $\inf(C) = \dots\dots\dots$, \inf należy - $\dots\dots\dots$,

$$D = \{|z+1| : |z|=1, z \in \mathbb{C}\}$$

$\sup(D) = \dots\dots\dots$, \sup należy - $\dots\dots\dots$, $\inf(D) = \dots\dots\dots$, \inf należy - $\dots\dots\dots$,

$$E = \{x : \log_2(x) < 3, x \in \mathbb{R}\}$$

$\sup(E) = \dots\dots\dots$, \sup należy - $\dots\dots\dots$, $\inf(E) = \dots\dots\dots$, \inf należy - $\dots\dots\dots$,

IMIĘ I NAZWISKO:

ZADANIE 5: Zbadaj zbieżność i bezwzględną zbieżność poniższych szeregów. Wpisz

- **ZB** - jeśli szereg jest bezwzględnie zbieżny,
- **ZW** - jeśli szereg jest warunkowo zbieżny,
- **R** - jeśli szereg jest rozbieżny.

Za poprawne rozwiązanie k zadań otrzymasz $\max(0, k - 1)$ punktów.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (3^{-n} + 5^{-n} + 1) \quad \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n^2} \frac{n^2}{n^3 + 1} \quad \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^n}{(n!)^2} \quad \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5}} \quad \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n^2 + 2} - \sqrt{n^2 + 1} \right) \quad \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + (-1)^n \sqrt{n}}{n\sqrt{n}} \quad \dots$$