WROCŁAW, 12 GRUDNIA 2014

EGZAMIN Z ANALIZY MATEMATYCZNEJ (CZĘŚĆ 1)

ZA KAŻDE ZADANIE MOŻNA DOSTAĆ OD 0 DO 5 PUNKTÓW. PIERWSZA CZĘŚĆ SKŁADA SIĘ Z 5 ZADAŃ TESTOWYCH I TRWA 80 MINUT OD 10:00 DO 11:20, PO NIEJ NASTĄPI 20-MINUTOWA PRZERWA, A NA KOŃCU BĘDZIE DRUGĄ CZĘŚĆ SKŁADAJĄCA SIĘ Z 5 ZADAŃ OTWARTYCH (OD 11:40 DO 13:00). NALEŻY SIĘ PODPISAĆ NA KAŻDEJ KARTCE. ZA LICZBY NATURALNE PRZYJMUJEMY $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

POWODZENIA!

IMIĘ I NAZWISKO:

ZADANIE 1: O zdaniu $T(n)$ wiadomo, że:

- $\forall n \in \mathbb{N} \quad T(n) \implies T(n+3)$
- $T(100)$ jest prawdziwe,
- $T(60)$ jest fałszywe.

Określ, czy poniższe zdania są:

- **P** - prawdziwe,
- **F** - fałszywe,
- **N** - nie wiadomo (tzn. nie da się określić prawdziwości z powyższych założeń).

Punkty za zadanie otrzymasz punkty w przeliczeniu według poniższej tabeli

liczba pop. odp.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
punkty	0	0	0	1	1	2	2	3	4	4	5

Prawdziwe są wszystkie zdania $100, 103, 106, \ldots$, fałszywe o numerach $3, 6, \ldots, 60$. Prawdziwości pozostałych zdań nie da się rozstrzygnąć. Ponadto, każda implikacja $T(n) \implies T(n+3k)$ jest prawdziwa, nawet jeśli nie wiemy czy zdania $T(n), T(n+3k)$ są prawdziwe.

1. $T(999)$ N
2. $T(1000)$ P
3. $T(1001)$ N
4. $T(9)$ F
5. $T(10)$ N
6. $T(11)$ N
7. $T(45) \implies T(253)$ P
8. $T(253) \implies T(45)$ F
9. $T(99) \implies T(197)$ N
10. $T(99) \implies T(198)$ P

IMIĘ I NAZWISKO:

ZADANIE 2: Oszacuj podane poniżej liczby wpisując w każdym przypadku dwie **kolejne** liczby z ciągu:

$$10, 10^2, 10^5, 10^{10}, 10^{20}, 10^{50}, 10^{100}, 10^{200}, 10^{500}, 10^{1000}, 10^{2000}, 10^{5000}, 10^{10000}, 10^{20000},$$
$$10^{50000}, 10^{100000}, 10^{200000}, 10^{500000}, 10^{1000000}, 10^{2000000}, 10^{5000000}, 10^{10000000}$$

Za każdy poprawnie rozwiązany podpunkt otrzymasz po jednym punkcie.

Poniżej przedstawiamy przykładowe szacowania prowadzące do rozwiązania.

$$10^{10\,000} < (10\pi)^{111111} < (4\cdot 10)^{111\,111} < \left(2^3\right)^{222\,222/3} 10^{111\,111} < 10^{200\,000}$$

$$10^{200} < \left(3^3\right)^{678/3} < \pi^{678} < \left(2^3\right)^{2\cdot 678/3} < 10^{500}$$

$$10^{200\,000} < \left(10^4\right)^{80\,000} < 98765! < \left(10^5\right)^{100\,000} = 10^{500\,000}$$

$$10^{2000} < \left(10^3\right)^{1234} < 1234^{1234} < \left(10^4\right)^{1234} < 10^{5000}$$

$$10^{20} < (12!)^{-1}\left(10^3\right)^{12} < \binom{1234}{12} = (12!)^{-1}\cdot 1234\cdot 1233\cdot\ldots\cdot 1223 < \left(10^4\right)^{12}$$

IMIĘ I NAZWISKO:

ZADANIE 3:

Podaj wartość granic (tylko odpowiedzi, bez uzasadnienia). Liczbę punktów otrzymasz w zależności od liczby poprawnych odpowiedzi według poniższej tabeli.

liczba pop. odp.	0	1	2	3	4	5	6	7	8
punkty	0	0	1	2	2	3	4	4	5

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{12n^6+3n^2+1}}{(2n+1)(n-1)(\frac{1}{3}n+7)} = 3\sqrt{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^4+4n^2}-n^2) = 2$$

$$\lim_{x\to 27} \frac{\sqrt[3]{x}-3}{x-27} = \frac{1}{27}$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+x^{-x}\right)^{(x+3)^x} = e^{e^{1/3}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n+7}\right)^{\sqrt{n^2+n}} = e^{-5}$$

$$\lim_{x\to\infty} (\pi-e)^{\frac{1}{x}} = 1$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2^{\sin(x)}}{x} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} (\log_3(n^3+1)-\log_3(n)) = +\infty$$

IMIĘ I NAZWISKO:

ZADANIE 4:

Podaj kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru (napisz TAK lub NIE). Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $\infty = +\infty$. Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz 1 punkt. Za zadania, w których podasz niepełną lub nie w pełni poprawną odpowiedź otrzymasz cząstkowe punkty, które na końcu zostaną zaokrąglone w dół do części całkowitej. Przypomnienie: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$.

$$A = \left\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N},\ 3^n \le 9^m \le 12^n\right\}$$

$\sup(A) = \frac{1}{2} + \log_3 2$, sup należy - NIE, $\inf(A) = \frac{1}{2}$, inf należy - TAK,

$$B = \left\{\frac{4n+2}{4n+3} :\ n \in \mathbb{N}\right\}$$

$\sup(B) = 1$, sup należy - NIE, $\inf(B) = \frac{6}{7}$, inf należy - TAK,

$$C = \left\{\frac{m^2 + n^4}{mn^2} : m, n \in \mathbb{N}\right\}$$

$\sup(C) = +\infty$, sup należy - NIE, $\inf(C) = 2$, inf należy - TAK,

$$D = \{|z+1| : |z| = 1, z \in \mathbb{C}\}$$

$\sup(D) = 2$, sup należy - TAK, $\inf(D) = 0$, inf należy - TAK,

$$E = \left\{x : \log_2(x) < 3, x \in \mathbb{R}\right\}$$

$\sup(E) = 8$, sup należy - NIE, $\inf(E) = 0$, inf należy - NIE,

IMIĘ I NAZWISKO:

ZADANIE 5: Zbadaj zbieżność i bezwzględną zbieżność poniższych szeregów. Wpisz

- **ZB** - jeśli szereg jest bezwzględnie zbieżny,
- **ZW** - jeśli szereg jest warunkowo zbieżny,
- **R** - jeśli szereg jest rozbieżny.

Za poprawne rozwiązanie k zadań otrzymasz $\max(0, k-1)$ punktów.

Oprócz odpowiedzi w nawiasie podajemy kryterium (niekoniecznie jedyne możliwe), które pozwala zbadać szereg.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(3^{-n}+5^{-n}+1\right) \qquad R \;\text{(warunek konieczny zbieżności)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n^2}\frac{n^2}{n^3+1} \qquad ZW \;\text{(kryt. porównawcze + kryt. Leibniza)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^n}{(n!)^2} \qquad ZB \;\text{(kryt. d'Alemberta)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5}} \qquad ZB \;\text{(kryt. porównawcze)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+1}\right) \qquad ZW \;\text{(kryt. porównawcze + kryt. Leibniza)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+(-1)^n\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} \qquad R \;\text{(kryt. porównawcze)}$$

IMIĘ I NAZWISKO:

ZADANIE 6: Wyznacz granicę ciągu zadanego wzorem

$$\frac{n\sqrt{n^4+3}}{\sqrt[3]{2n^{15}+1}}+\frac{n\sqrt{n^4+6}}{\sqrt[3]{2n^{15}+4}}+\frac{n\sqrt{n^4+9}}{\sqrt[3]{2n^{15}+9}}+\frac{n\sqrt{n^4+12}}{\sqrt[3]{2n^{15}+16}}+\ldots+\frac{n\sqrt{n^4+6n^2-3}}{\sqrt[3]{2n^{15}+(2n^2-1)^2}}+\frac{n\sqrt{n^4+6n^2}}{\sqrt[3]{2n^{15}+4n^4}}$$

Zauważmy, że dla ustalonego n ułamków jest $2n^2$. Oznaczmy ciąg przez a_n. Szacując przez najmniejszy/największy licznik/mianownik dochodzimy do:

$$a_n \geq 2n^2\frac{n\sqrt{n^4+3}}{\sqrt[3]{2n^{15}+4n^4}} =: b_n$$
$$a_n \leq 2n^2\frac{n\sqrt{n^4+6n^2}}{\sqrt[3]{2n^{15}+1}} =: c_n$$

Wyciągając odpowiednią potęge n w liczniku i mianowniku łatwo stwierdzić, że

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = 2/\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{4},$$

więc z twierdzenia o trzech ciągach szukaną granicą jest $\sqrt[3]{4}$.

IMIĘ I NAZWISKO:

ZADANIE 7:

1. Zbadaj dla jakich parametrów $a, b \in \mathbb{R}$ ciągła jest funkcja

$$f(x) = \begin{cases} b + \arctan\left(\frac{1}{x}\right), & \text{dla x<0} \\ (a^2+b)/3 & \text{dla x=0} \\ \frac{\sin(a^2 x)}{x} & \text{dla x>0} \end{cases}$$

2. Zbadaj dla jakich parametrów c ciągła jest funkcja

$$g(x) = c^2 3^{\{x\}} + c5^{\{-x\}}$$

1. Dana funkcja dla $x \neq 0$ jest ciągła jako suma/iloraz/złożenie funkcji ciągłych. Niech

$$A = f(0), B = \lim_{x \to 0^-} f(x), C = \lim_{x \to 0^+} f(x).$$

Aby była ciągła w zerze potrzeba i wystarcza aby $A = B = C$. Łatwo zauważyć, że $A = b - \frac{\pi}{2}$, $B = (a^2+b)/3$. Ponadto

$$C = \lim_{x \to 0^+} a^2 \frac{a^2 x}{a^2 x} = a^2$$

(co jest prawdą nawet dla $a = 0$). Z układu równań

$$b - \frac{\pi}{2} = (a^2+b)/3$$
$$(a^2+b)/3 = a^2$$

dostajemy dwa rozwiązania $a = \pm\sqrt{\frac{\pi}{2}}, b = \pi$.

2. Oczywiście wystarczy sprawdzić, czy funkcja jest ciagła dla argumentów całkowitych. Niech $x = k \in \mathbb{Z}$. Wtedy

$$f(k) = c^2 + c,$$
$$\lim_{x \to k^-} f(x) = 3c^2 + c,$$
$$\lim_{x \to k^+} f(x) = c^2 + 5c.$$

Aby te trzy wartości były sobie równe potrzeba i wystarcza, aby $c = 0$ i tylko dla tej wartości funkcja jest ciągła.

IMIĘ I NAZWISKO:

ZADANIE 8: Znajdź wszystkie liczby naturalne n, które spełnają

$$3 \cdot \binom{2n}{n} \leq 2^{2n}.$$

Udowodnij swoją tezę.

Dla $n = 1,2$ teza nie zchodzi, dla $n = 3$ mamy $60 < 64$ i teza zachodzi. Dla $k \geq 3$ pokażemy krok indukcyjny $T(k) \implies T(k+1)$ (co będzie oznaczało, że dla wszystkich $n \geq 3$ nierówność zachodzi). Załóżmy, że dla pewnego $k \geq 3$ zachodzi

$$3 \cdot \binom{2k}{k} \leq 4^k.$$

Wtedy

$$3 \cdot \binom{2k+2}{k+1} = 3 \cdot \frac{(2k)!(2k+1)(2k+2)}{(k!)^2(k+1)^2} \leq 4^k \frac{4k^2+6k+2}{k^2+2k+1} \leq 4^{k+1},$$

gdzie w przedostatniej nierówności użyliśmy założenia indukcyjnego. Ostatnia nierówność jest łatwa do sprawdzenia, bo $4k^2+6k+2 \leq 4(k^2+2k+1)$.

IMIĘ I NAZWISKO:

ZADANIE 9:

1. Znajdź promień zbieżności szeregu ($x \in \mathbb{R}$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n^{n+2}} x^{3n}$$

2. Dla jakich liczb zespolonych $z \in \mathbb{C}$ poniższy szereg jest zbieżny

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(iz-1)^n}{n^2}$$

1. Niech $a_n(x)$ oznacza $n-$ty wyraz. Badamy szereg używając kryterium d'Alemberta:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(2n+1)!!|x|^{3n+3}}{(n+1)^{n+3}} \cdot \frac{n^{n+2}}{(2n-1)!!|x|^{3n}} = |x|^3 \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+2} \frac{2n+1}{n+1} \to \frac{2|x|^3}{e}.$$

Zatem szereg jest zbieżny dla $|x| < \sqrt[3]{e/2}$ i rozbieżny dla $|x| > \sqrt[3]{e/2}$, więc $R = \sqrt[3]{e/2}$.

2. Skorzystamy z kryterium Cauchy'ego:

$$\sqrt[n]{\left|\frac{(iz-1)^n}{n^2}\right|} = \frac{|iz-1|}{\sqrt[n]{n^2}} \to |iz-1|$$

Zauważmy, że $|iz-1| = |i(z+i)| = |i||z+i| = |z+i|$. Zatem szereg jest zbieżny w kole (bez brzegu) o środku $-i$ i promieniu 1 na zewnątrz koła (również bez brzegu). Na okręgu, czyli dla punktów z takich, że $|z+i| = 1$ korzystamy z kryterium porównawczego:

$$\left|\frac{(iz-1)^n}{n^2}\right| = \frac{|z+i|^n}{n^2} = \frac{1}{n^2}$$

i stwierdzamy, że na całym okręgu szereg również jest zbieżny.

IMIĘ I NAZWISKO:

ZADANIE 10:

Niech f będzie funkcją zadaną wzorem

$$f(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Pokaż, że dla wszystkich $x, y \geq 3$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{2}{27}|x - y|.$$

Niech $x, y \geq 3$. Wtedy:

$$\left|\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}\right| = \frac{|x-y|(x+y)}{x^2y^2}.$$

Wystarczy zatem pokazać, że

$$\frac{x+y}{x^2y^2} \leq \frac{2}{27}.$$

Rozpatrzymy tylko przypadek $x \geq y$ (drugi jest symetryczny). Wtedy

$$\frac{x+y}{x^2y^2} \leq \frac{x+x}{27x} \leq \frac{2}{27}.$$