

Uniwersytet Wrocławski
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyczny
specjalność: matematyka nauczycielska

Kinga Grobelna

Wielokątowe fraktale ściśle samopodobne
i ich podstawowe własności

Praca magisterska
napisana pod kierunkiem
prof. dr. hab. Jacka Świątkowskiego

Wrocław 2026

Spis treści

Wstęp	3
1 Figury ściśle samopodobne	4
1.1 Kwadrat	4
1.2 Krzywa Kocha	5
1.3 Zbiór Cantora	7
1.4 Wielokątowe figury ściśle samopodobne	8
1.4.1 Konstrukcja i definicja	9
1.4.2 Wnioski płynące z definicji	11
2 Własności	17
2.1 Uogólnienia wynikające z konstrukcji	17
2.2 Niepustość	19
2.3 Z nie jest zbiorem jednopunktowym	20
2.4 Nieprzeliczalność	23
2.5 Brak punktów izolowanych	26
3 Wymiar fraktalny	28
3.1 Pojęcie wymiaru fraktalnego	29
3.2 Wymiar fraktalny a spójność	31
4 Różne rodziny przykładów	34
4.1 Krzywa Kocha i zbiór Cantora jako wielokątowe fraktale	34
4.2 Fraktale o wymiarze fraktalnym dowolnie bliskim 1	38
Bibliografia	42

Wstęp

Pojęcie fraktala zostało wprowadzone do matematyki stosunkowo niedawno bowiem w latach 70. ubiegłego wieku. Nie oznacza to jednak, że pierwsze fraktale powstały dopiero wtedy. Wcześniej obiektami o strukturze fraktalnej zajmowali się na przykład Georg Cantor czy też Waclaw Sierpiński, ale nie nazywali ich wówczas fraktalami. Dopiero w roku 1975 Benoit Mandelbort - jak sam pisze w swoim dziele [2] - odpowiedział na wyzwanie ówczesnej matematyki poprzez stworzenie i rozwinięcie geometrii natury. Mandelbort w swojej pracy wspomina, że fraktale mogą być zarówno krzywymi jak i na tyle dziwnymi kształtami, że ciężko znaleźć terminy, aby je opisać. Ze względu na swoją złożoną strukturę budzą zainteresowanie nie tylko naukowców ale również i artystów. Szczególnym rodzajem fraktali są fraktale ściśle samopodobne. Charakteryzują się one tym, że ich każdy fragment jest dokładnym przeskalowaniem całości przekształconym poprzez pewne podobieństwo. Wśród nich ciekawą grupę stanowią wielokątowe fraktale ściśle samopodobne, których konstrukcja rozpoczyna się od ustalonej figury wielokątowej. Wielokrotne stosowanie przekształceń podobieństwa powoduje, że powstałe obiekty mają niecałkowity wymiar fraktalny.

Celem niniejszej pracy jest zapoznanie czytelnika z pojęciem wielokątowych fraktali ściśle samopodobnych oraz ich wymiarem fraktalnym, a także przedstawienie i udowodnienie związanych z nimi własności.

W pierwszym rozdziale niniejszej pracy przedstawiamy definicję figury ściśle samopodobnej oraz prezentujemy trzy przykłady jej praktycznego zastosowania. Główny nacisk jest jednak położony na konstrukcję oraz definicję wielokątowych fraktali ściśle samopodobnych. Zwieńczeniem rozdziału jest twierdzenie mówiące o tym, że zdefiniowane w przedstawiony sposób fraktale są istotnie figurami ściśle samopodobnymi w myśl definicji pojawiającej się na początku rozdziału.

Rozdział drugi został w całości poświęcony dowodzeniu różnych własności związanych z wielokątowymi fraktalami ściśle samopodobnymi. Znajdziemy w nim pewne uogólnienia płynące z konstrukcji fraktali, jak również własności dotyczące liczności punktów, z których one się składają oraz własność dotyczącą braku punktów izolowanych.

W trzecim rozdziale czytelnik zostaje zapoznany z pojęciem wymiaru fraktalnego. Zostały w nim zamieszczone przykłady tego, jak jest on interpretowany w dostępnej literaturze. Czytelnik ma również możliwość praktycznego ujrzenia, jak wspomniany wymiar można wyznaczyć w odniesieniu do zaprezentowanych wcześniej przykładów. Rozdział kończy się sformułowaniem oraz udowodnieniem kilku własności wiążących ze sobą wymiar fraktalny oraz własności spójności wielokątowych fraktali ściśle samopodobnych.

W rozdziale czwartym znajdziemy bardziej formalne opisy fraktali, które pojawiły się po raz pierwszy w Rozdziale 1. Natomiast w jego drugiej części umieszczone zostały przykłady rodzin fraktali, których wymiar fraktalny może być dowolnie bliski 1.

1 Figury ściśle samopodobne

Głównym przedmiotem niniejszej pracy jest analiza figur ściśle samopodobnych oraz ich podstawowych własności. W celu ujednolicenia dalszych rozważań wprowadzamy poniżej formalną definicję tych obiektów, na którą będziemy się powoływać w dalszej części pracy.

Definicja 1.0.1. *Figurę F nazywamy **ściśle samopodobną** wtedy, gdy można ją przedstawić w postaci skończonej sumy $F = F_1 \cup \dots \cup F_N, N \geq 2$ figur F_i spełniających następujące warunki:*

1. $\forall i \in \{1, \dots, N\}$ figury F_i są podobne do F w tej samej skali $s \in (0, 1)$,
2. $\forall i, j \in \{1, \dots, N\} (i \neq j \implies \text{int}_F(F_i) \cap \text{int}_F(F_j) = \emptyset)$, gdzie $\text{int}_F(A)$ oznacza wnętrze A w F .

Uwaga 1.0.1. *Dopuszczamy jednak możliwość, że $\exists i, j \in \{1, \dots, N\} (i \neq j \wedge \text{bd}_F(F_i) \cap \text{bd}_F(F_j) \neq \emptyset)$, gdzie $\text{bd}_F(A)$ oznacza brzeg A w przestrzeni F .*

Powyższa definicja stanowi podstawę do analizy konkretnych obiektów geometrycznych. W celu lepszego zrozumienia wprowadzonej definicji przedstawiamy wybrane przykłady figur ściśle samopodobnych: kwadratu, krzywej Kocha oraz zbioru Cantora.

1.1 Kwadrat

Kwadrat stanowi jeden z najprostszych przykładów figur ściśle samopodobnych. Możliwe jest bowiem przedstawienie go jako skończonej sumy figur podobnych do niego samego w ustalonej skali, co przedstawia poniższy przykład.

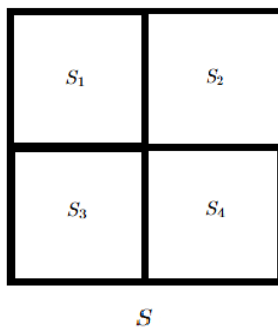
Przykład 1.1.1. *Niech S będzie kwadratem jednostkowym w kartezjańskim układzie współrzędnych, tzn.:*

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \in [0, 1]\}.$$

Podzielimy ten kwadrat na 4 mniejsze części poprzez połączenie środka każdego boku ze środkiem boku przeciwnego.

Pokażemy, że kwadrat S jest figurą ściśle samopodobną.

Kiedy każdy bok powyższego kwadratu podzielimy na dwie przystające części i połączymy środek każdego boku ze środkiem boku przeciwnego, to otrzymamy w ten sposób 4 pomniejszone kopie kwadratu S .



Kwadrat S możemy wówczas zapisać jako sumę czterech figur:

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4.$$

Każdy z kwadratów S_i ma bok długości $\frac{1}{2}$, zatem jest podobny do kwadratu S w skali $s = \frac{1}{2} \in (0, 1)$. Spełniony jest zatem warunek 1 z definicji figury ściśle samopodobnej.

Sprawdźmy teraz warunek rozłączności wnętrza. Dla $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ takich, że $i \neq j$ otrzymujemy:

$$\text{int}_S(S_i) \cap \text{int}_S(S_j) = \emptyset,$$

co jest spowodowane tym, że kwadraty S_i przecinają się jedynie na swoich brzegach, tj. we wspólnym wierzchołku lub wspólnej krawędzi, jednak punkty te nie należą do wnętrza kwadratów S_i . Spełniony jest zatem warunek 2 z definicji figury ściśle samopodobnej.

Na podstawie powyższych rozważań stwierdzamy więc, że kwadrat jest figurą ściśle samopodobną.

1.2 Krzywa Kocha

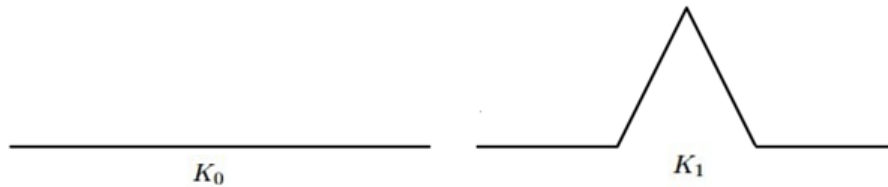
Jednym z klasycznych przykładów figur ściśle samopodobnych jest krzywa Kocha. Jest to fraktal trudniejszy do opisania niż kwadrat ze względu na jego iteracyjną procedurę powstawania polegającą na przekształcaniu odcinka i zastępowaniu go odpowiednimi łamanymi.

Przykład 1.2.1. Krzywa Kocha (na podstawie [4]).

Niech K_0 będzie jednostkowym odcinkiem w kartezjańskim układzie współrzędnych, tzn.:

$$K_0 = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2; x \in [0, 1]\}.$$

K_1 powstaje poprzez podział K_0 na 3 przystające odcinki oraz zastąpieniu środkowego z nich dwoma odcinkami o długości $\frac{1}{3}$ w taki sposób, że tworzą one z usuniętym odcinkiem trójkąt równoboczny (K_1 składa się zatem z 4 przystających odcinków o długości $\frac{1}{3}$).



Powyższą procedurę powtarzamy dla każdego nowo powstającego odcinka, przy czym nowotworzone odcinki są dobierane cały czas po tej samej stronie powstającej łamanej.



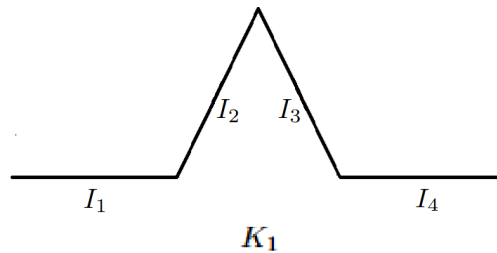
Przy użyciu rekurencji przyjmujemy:

- K_n składa się z 4^n odcinków, z których każdy ma długość $(\frac{1}{3})^n$,
- suma długości wszystkich odcinków w K_n wynosi $(\frac{4}{3})^n$.

Gdy n jest duże, łamana K_n oraz K_{n-1} różnią się jedynie w niewielkich szczegółach, a gdy n dąży do nieskończoności sekwencja łamanych K_n zbliża się do krzywej granicznej K nazywanej krzywą Kocha.

Pokażemy, że krzywa Kocha jest figurą ściśle samopodobną zgodnie z Definicją 1.0.1.

W pierwszym kroku konstrukcji odcinek początkowy K_0 zostaje zastąpiony łamaną K_1 , która składa się z czterech przystających odcinków - każdy o długości $\frac{1}{3}$.



Możemy zapisać ją zatem jako następującą sumę:

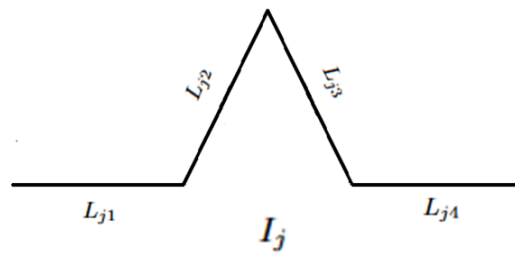
$$K_1 = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I_4,$$

gdzie $I_j, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ to pojedynczy odcinek składający się na łamaną K_1 .

Następnie na każdym z odcinków I_j wykonujemy tę samą procedurę konstrukcji krzywej Kocha. W wyniku tego każdy odcinek I_j dzieli się na cztery mniejsze odcinki:

$$I_j \rightarrow L_{j1}, L_{j2}, L_{j3}, L_{j4},$$

z których każdy ma długość równą $\frac{1}{3}$ długości odcinka I_j , a więc $\frac{1}{9}$ długości odcinka K_0 .



Kontynuując konstrukcję w nieskończoność, na każdym odcinku I_j otrzymujemy graniczną krzywą L_j , która jest krzywą Kocha powstałą z odcinka I_j . Z konstrukcji wynika, że każda z krzywych L_j

jest podobna do całej krzywej K w skali $s = \frac{1}{3}$.

W konsekwencji całą krzywą Kocha można zapisać jako

$$K = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4,$$

gdzie każdy składnik powyższej sumy jest podobny do K z tą samą skalą podobieństwa $s = \frac{1}{3}$. To pokazuje, że krzywa Kocha dzieli się na skończenie wiele części (jest ich dokładnie 4), z których każda jest podobna do całości w tej samej skali $s = \frac{1}{3} \in (0, 1)$. Spełniony jest zatem warunek 1 z Definicji 1.0.1.

Zbadamy teraz rozłączność wnętrz części L_j . Mamy do czynienia z następującymi sytuacjami:

- dla $j \in \{2, 3\}$: $\text{int}_K(L_j) = L_j \setminus \{2 \text{ punkty końcowe odcinka } I_j\}$,
- dla $j \in \{1, 4\}$: $\text{int}_K(L_j) = L_j \setminus \{1 \text{ z punktów końcowych odcinka } I_j\}$.

Zatem dla każdych $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ takich, że $i \neq j$ otrzymujemy:

$$\text{int}_K(L_i) \cap \text{int}_K(L_j) = \emptyset.$$

Spełniony jest zatem warunek 2 z Definicji 1.0.1.

Na podstawie powyższych rozważań stwierdzamy więc, że krzywa Kocha jest figurą ściśle samopodobną.

1.3 Zbiór Cantora

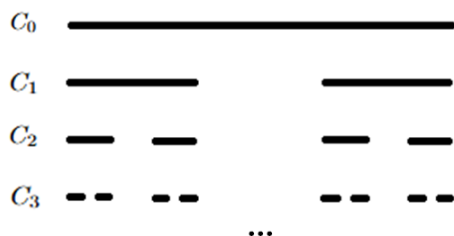
Kolejnym znanym przykładem figur ściśle samopodobnych jest zbiór Cantora. Podobnie jak krzywa Kocha - zbiór Cantora również powstaje w wyniku nieskończonego procesu iteracyjnego, który tym razem polega na usuwaniu wnętrz środkowych części odcinka podzielonego na 3 części.

Przykład 1.3.1. Niech C_0 będzie odcinkiem jednostkowym w kartezjańskim układzie współrzędnych, tzn.:

$$C_0 = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1]\}.$$

C_1 powstaje poprzez podział C_0 na 3 przystające odcinki, każdy o długości $\frac{1}{3}$ oraz usunięcie wnętrza środkowego z nich.

Powyższą procedurę powtarzamy dla każdego nowo powstałego odcinka. Przy użyciu rekurencji przyjmujemy, że C_n składa się z 2^n odcinków o długości $(\frac{1}{3})^n$.

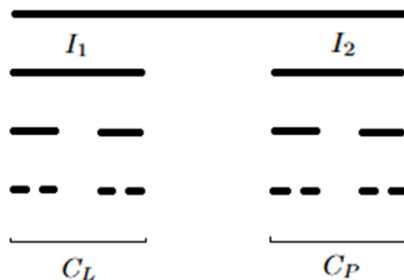


Figurę $C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$ nazywamy zbiorem Cantora.

Pokażemy, że zbiór Cantora jest figurą ściśle samopodobną w świetle Definicji 1.0.1.

Przy pierwszym podziale odcinka jednostkowego C_0 na 3 przystające części i usunięciu wnętrza środkowej z nich dostajemy 2 mniejsze odcinki o długości $\frac{1}{3}$ (figura C_1). Oznaczmy powstałe w ten sposób odcinki jako I_1 oraz I_2 . Zauważmy, że w każdej iteracji konstrukcji zbiór C_n składa się z odcinków zawartych w I_1 oraz I_2 , zatem $C \subset I_1 \cup I_2$. Zdefiniujmy:

$$C_L = C \cap I_1, \quad C_P = C \cap I_2.$$



Wtedy

$$C = C_L \cup C_P.$$

Zwróćmy teraz uwagę, że każdy etap konstrukcji figury C w odcinku I_1 przebiega dokładnie tak samo jak cała konstrukcja na odcinku C_0 , tylko w skali $\frac{1}{3}$. To samo dotyczy odcinka I_2 . Wynika stąd, że zbiory C_L oraz C_P są kopiami zbioru C zmniejszonymi w skali $s = \frac{1}{3}$.

Pokazuje to, że zbiór Cantora dzieli się na skończenie wiele części (w tym wypadku dwie), z których każda jest podobna do całości w tej samej skali $s = \frac{1}{3} \in (0, 1)$. Spełniony jest zatem warunek 1 z Definicji 1.0.1.

Zbadamy teraz rozłączność wnętrza zbiorów C_L oraz C_P . Z konstrukcji zbioru Cantora wiemy, że $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, ponieważ odcinki te są oddzielone wnętrzem usuniętego odcinka. Zbiory C_L oraz C_P również są rozłączne, gdyż są zawarte odpowiednio w rozłącznych przedziałach I_1 oraz I_2 . Mamy zatem

$$C_L \cap C_P = \emptyset,$$

więc tym bardziej

$$\text{int}_C(C_L) \cap \text{int}_C(C_P) = \emptyset.$$

Spełniony jest zatem warunek 2 z Definicji 1.0.1.

Na podstawie powyższych rozważań wnioskujemy, że zbiór Cantora jest figurą ściśle samopodobną.

1.4 Wielokątowe figury ściśle samopodobne

W dalszej części pracy poświęcimy uwagę szczególnym przypadkom figur ściśle samopodobnych, jakimi są wielokątowe figury ściśle samopodobne. W związku z tym wprowadzamy najpierw definicję figury wielokątowej.

Definicja 1.4.1. Niech $F \subset \mathbb{R}^2$ będzie figurą płaską. O figurze F mówimy, że jest **wielokątowa** wtedy, gdy

- $F = T_1 \cup \dots \cup T_N, N \geq 1, T_i$ - domknięty trójkąt,
- $\forall i, j \in \{1, \dots, N\} (i \neq j \implies \text{int}(T_i) \cap \text{int}(T_j) = \emptyset)$.

Uwaga 1.4.1. Zauważmy, że drugi warunek z powyższej Definicji możemy równoważnie zapisać jako:

$$\forall i, j \in \{1, \dots, N\} (i \neq j \implies (T_i \cap T_j) \subset \text{bd}(T_i) \cup \text{bd}(T_j)).$$

Figura wielokątowa to zatem taka figura, którą można podzielić na skończenie wiele domkniętych trójkątów takich, że dowolne 2 z nich mają rozłączne wnętrza, jednak mogą się one stykać brzegami.

1.4.1 Konstrukcja i definicja

Na podstawie wprowadzonej na początku tego rozdziału definicji figury ściśle samopodobnej oraz na podstawie wprowadzonej powyżej definicji figury wielokątowej możemy przejść do opisu konstrukcji wielokątowych figur ściśle samopodobnych.

Do skonstruowania wielokątowej figury ściśle samopodobnej potrzebujemy następujących informacji:

- W_0 - wyjściowy wielokąt (figura wielokątowa), od którego rozpoczynamy konstrukcję,
- N - liczba pomniejszonych kopii W_0 , które oznaczymy przez $W_1, \dots, W_N$ oraz które będziemy chcieli umieścić wewnątrz W_0 tak, aby nie zachodziły one na siebie (tzn. stykały się co najwyżej brzegami),
- s - liczba z przedziału $(0; 1)$ będąca wspólną skalą podobieństwa dla każdej pomniejszonej kopii W_0 ,
- φ_i - przekształcenie podobieństwa w skali s (będące jednokładnością, złożeniem jednokładności z obrotem lub złożeniem jednokładności z odbiciem względem pewnej prostej) $\varphi_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, gdzie $\varphi_i(W_0) = W_i$ (jest to przekształcenie odwzorowujące wielokąt W_0 w jego pomniejszoną kopię).

Konstrukcja

Krok 0:

Rozpoczynamy od wyjściowego wielokąta (figury wielokątowej):

$$K_0 = W_0.$$

Krok 1:

Tworzymy N pomniejszonych kopii wielokąta W_0 , podobnych do W_0 w tej samej skali s w taki sposób, że każda utworzona w ten sposób kopia zawiera się w W_0 oraz każde dwie utworzone kopie mają rozłączne wnętrza, a następnie bierzemy ich sumę:

$$K_1 = W_1 \cup \dots \cup W_N = \varphi_1(W_0) \cup \dots \cup \varphi_N(W_0) = \bigcup_{i=1}^N \varphi_i(W_0).$$

Krok 2:

W każdej z N pomniejszonych kopii z K_1 ponownie umieszczamy N pomniejszonych kopii, stosując

te same przekształcenia podobieństwa co wcześniej, jednak tym razem dla każdej części figury z K_1 . Otrzymujemy w ten sposób N^2 kawałków, z których każdy jest podobny do W_0 w skali s^2 i sumujemy je:

$$K_2 = \bigcup_{j=1}^N \bigcup_{i=1}^N \varphi_j(\varphi_i(W_0)) = \bigcup_{i,j=1}^N (\varphi_j \circ \varphi_i)(W_0).$$

Krok n :

Po kontynuacji powyższej procedury w n -tej iteracji otrzymujemy N^n kawałków, gdzie każdy z nich to obraz W_0 przekształcony n -krotnie z tą samą skalą podobieństwa s . Zatem każdy taki kawałek jest podobny do W_0 w skali s^n , a ich suma przedstawia się następująco:

$$K_n = \bigcup_{i_n=1}^N \bigcup_{i_{n-1}=1}^N \cdots \bigcup_{i_1=1}^N (\varphi_{i_n} \circ \varphi_{i_{n-1}} \circ \cdots \circ \varphi_{i_1})(W_0).$$

Definiujemy figurę Z jako $Z = \bigcap_{n=0}^{\infty} K_n$.

Definicja 1.4.2. Niech Z będzie figurą skonstruowaną zgodnie z powyższym opisem. Mówimy, że figura Z jest **wielokątowym fraktalem ściśle samopodobnym** wtedy, gdy można ją przedstawić w postaci $Z = \bigcap_{n=0}^{\infty} K_n$, jak wyżej, oraz gdy dodatkowo jest spełniony następujący warunek: $\exists$ ciąg $\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_n}$ taki, że $\varphi_{i_1} \cdots \varphi_{i_n}(W_0) \subset \text{int}(W_0)$.

Zanim przejdziemy do dowodzenia różnych własności związanych z wielokątowymi fraktalami ściśle samopodobnymi, wprowadźmy jeszcze jedną definicję.

Definicja 1.4.3. Każdy pojedynczy składnik sumy składającej się na figurę K_n będziemy nazywać **kopią n -tej iteracji**.

W oparciu o iteracyjną konstrukcję zbiorów K_n zauważamy naturalną własność inkluzji, wyrażającą się zależnością $K_{n+1} \subset K_n \subset K_0$. Poniżej przedstawiamy dowód tej obserwacji.

Obserwacja 1.4.1. Dla każdego n zachodzi następujące zawieranie: $K_{n+1} \subset K_n \subset K_0$.

Dowód. Pokażemy, że $K_1 \subset K_0$.

Z konstrukcji wielokątowej figury ściśle samopodobnej wiemy, że $K_0 = W_0$ oraz $K_1 = W_1 \cup \cdots \cup W_N = \varphi_1(W_0) \cup \cdots \cup \varphi_N(W_0)$. Ponadto z założeń konstrukcji mamy, że $W_i \subset W_0$, czyli $\forall i \in \{1, \dots, N\} W_i = \varphi_i(W_0) \subset W_0$, a więc także suma W_i w postaci figury K_1 zawiera się w K_0 .

Pokażemy, że $K_{n+1} \subset K_n$.

Pojedynczy kawałek K_{n+1} możemy zapisać jako

$$(\varphi_{i_{n+1}} \circ \varphi_{i_n} \circ \cdots \circ \varphi_{i_1})(W_0).$$

Wiemy, że $\varphi_{i_1}(W_0) = W_{i_1}$, zatem

$$(\varphi_{i_{n+1}} \circ \varphi_{i_n} \circ \cdots \circ \varphi_{i_1})(W_0) = (\varphi_{i_{n+1}} \circ \varphi_{i_n} \circ \cdots \circ \varphi_{i_2})(\varphi_{i_1}(W_0)) = (\varphi_{i_{n+1}} \circ \varphi_{i_n} \circ \cdots \circ \varphi_{i_2})(W_{i_1}).$$

Wiemy również, że $W_{i_1} \subset W_0$, czyli:

$$(\varphi_{i_{n+1}} \circ \varphi_{i_n} \circ \cdots \circ \varphi_{i_2})(W_{i_1}) \subset (\varphi_{i_n} \circ \cdots \circ \varphi_{i_1})(W_0).$$

Prawa strona powyższego zawierania to dokładnie jeden z kawałków K_n , czyli

$$(\varphi_{i_n} \circ \cdots \circ \varphi_{i_1})(W_0) \subset K_n.$$

Otrzymaliśmy zatem, że dowolny pojedynczy kawałek K_{n+1} zawiera się w pewnym kawałku K_n , więc $K_{n+1} \subset K_n$.

Mamy, że $K_1 \subset K_0$ oraz $K_{n+1} \subset K_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, co po połączeniu daje $K_{n+1} \subset K_n \subset K_0 = W_0$. $\square$

Powyższą obserwację wykorzystamy przy dowodzeniu samopodobieństwa figury Z .

1.4.2 Wnioski płynące z definicji

Głównym wnioskiem płynącym z definicji wielokątowego fraktala ściśle samopodobnego jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.4.1. *Każdy wielokątowy fraktal ściśle samopodobny jest figurą ściśle samopodobną (zgodnie z Definicją 1.0.1).*

Do jego udowodnienia potrzebne są jednak inne wnioski pomocnicze (Wnioski 1.4.1-1.4.4) sformułowane poniżej. Pierwszy z nich dotyczy istnienia punktu fraktala, który należy do wnętrza wyjściowego wielokąta W_0 .

Wniosek 1.4.1. *Z warunku pojawiającego się w definicji wielokątowego fraktala ściśle samopodobnego (Definicja 1.4.2) wynika, że istnieje punkt $z \in Z$ taki, że $z \in \text{int}(W_0)$.*

Dowód. Z warunku z definicji wielokątowego fraktala ściśle samopodobnego wiemy, że istnieje ciąg przekształceń podobieństwa $\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_m}$ taki, że $(\varphi_{i_m} \circ \cdots \circ \varphi_{i_1})(W_0) \subset \text{int}(W_0)$. Niech $A = (\varphi_{i_m} \circ \cdots \circ \varphi_{i_1})(W_0)$. Wówczas mamy

$$A \subset \text{int}(W_0).$$

Weźmy dowolny nieskończony ciąg indeksów $(j_1, j_2, \dots) \in \{1, \dots, N\}$ i rozważmy ciąg zbiorów postaci

$$A_n = (\varphi_{i_m} \circ \cdots \circ \varphi_{i_1} \circ \varphi_{j_1} \circ \cdots \circ \varphi_{j_n})(W_0).$$

Wówczas ciąg (A_n) jest zstępujący oraz dla każdego n mamy $A_n \subset A$. Dodatkowo mamy

$$\text{diam}(A_n) = s^{m+n} \text{diam}(W_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Każdy zbiór A_n jest również figurą wielokątową, a więc zbiorem niepustym i domkniętym, więc na mocy twierdzenia Cantora o zupełności, otrzymujemy, że

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n \neq \emptyset.$$

Oznaczmy punkt należący do powyższego przekroju jako z . Ponieważ dla każdego n mamy, że $A_n \subset A \subset \text{int}(W_0)$, dostajemy, że

$$z \in \text{int}(W_0).$$

Jednocześnie każdy $A_n \subset K_n$, więc $z \in \bigcap_{n=0}^{\infty} K_n = Z$. $\square$

W pełni sformułowane oraz udowodnione twierdzenie Cantora o zupełności, o którym mowa w powyższym dowodzie, możemy znaleźć w książce *Real Analysis* autorstwa Roydena oraz Fitzpatricka w podrozdziale 9.4 pod nazwą *The Cantor Intersection Theorem* [5].

Drugi wniosek idzie o krok dalej - mówi o tym, że dla każdego skończonego złożenia przekształceń podobieństwa znajdzie się punkt fraktala, który należy do wnętrza obrazu W_0 przez złożenie tych przekształceń.

Wniosek 1.4.2. *Z warunku pojawiającego się z w definicji wielokątowego fraktala ściśle samopodobnego (Definicja 1.4.2) wynika, że dla każdego ciągu przekształceń podobieństwa $\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_n}$ istnieje punkt $z \in Z$ taki, że $z \in \text{int}((\varphi_{i_1} \circ \dots \circ \varphi_{i_n})(W_0))$.*

Dowód. Z Wniosku 1.4.1 wiemy, że istnieje punkt $z_0 \in Z$ taki, że $z_0 \in \text{int}(W_0)$. Niech $\Phi = \varphi_{i_1} \circ \dots \circ \varphi_{i_n}$ oraz niech $z = \Phi(z_0)$. Zauważmy, że Φ jest złożeniem przekształceń podobieństwa, a więc również jest przekształceniem podobieństwa. Wiemy, że przekształcenie podobieństwa jest homeomorfizmem, więc przy wykorzystaniu tego faktu otrzymujemy:

$$\Phi(\text{int}(W_0)) = \text{int}(\Phi(W_0)).$$

Wiemy również, że $z_0 \in \text{int}(W_0)$, więc

$$z = \Phi(z_0) \in \text{int}(\Phi(W_0)).$$

Z faktu, że $z_0 \in Z$ wynika, że $z_0 \in K_m$ dla każdego m , co wynika z definicji fraktala Z . Przypomnijmy postać figury K_m :

$$K_m = \bigcup_{j_m, \dots, j_1=1}^N (\varphi_{j_m} \circ \dots \circ \varphi_{j_1})(W_0).$$

Istnieje zatem ciąg przekształceń podobieństwa $\varphi_{j_m}, \dots, \varphi_{j_1}$ taki, że

$$z_0 \in (\varphi_{j_m} \circ \dots \circ \varphi_{j_1})(W_0).$$

Po zastosowaniu przekształcenia Φ otrzymujemy:

$$z = \Phi(z_0) \in \Phi((\varphi_{j_m} \circ \dots \circ \varphi_{j_1})(W_0)).$$

Zauważmy, że $\Phi(\varphi_{j_m} \circ \dots \circ \varphi_{j_1})$ jest złożeniem $n + m$ przekształceń podobieństwa, co oznacza, że odpowiada jednemu ze składników sumy definiującej figurę K_{m+n} . Wówczas punkt z zawiera się w jednym ze składników sumy definiującej figurę K_{m+n} , czyli

$$z \in K_{m+n}.$$

A ponieważ m było dowolne to dostajemy

$$z \in \bigcap_{m=0}^{\infty} K_{m+n}.$$

Z Obserwacji 1.4.1 mamy, że $K_{m+n} \subset K_n$, stąd

$$\bigcap_{m=0}^{\infty} K_{m+n} = \bigcap_{m=0}^{\infty} K_m = Z,$$

a więc w konsekwencji otrzymujemy

$$z \in Z.$$

Ostatecznie:

$$z \in Z \quad \text{oraz} \quad z \in \text{int}(\Phi(W_0)).$$

□

W trzecim wniosku stwierdzamy, że w każdym miejscu fraktala Z jesteśmy w stanie dowolnie blisko znaleźć inny punkt tego fraktala, który leży ponadto we wnętrzu wyjściowej figury wielokątowej W_0 .

Wniosek 1.4.3. *Dla każdego $z \in Z$ dowolnie blisko z znajdzie się $z' \in \text{int}(W_0) \cap Z$.*

Dowód. Niech $z \in Z$. Pokażemy, że dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje punkt $z' \in \text{int}(W_0) \cap Z$ taki, że $d(z, z') < \epsilon$.

Niech $\epsilon > 0$. Ponieważ $s \in (0, 1)$ mamy, że $s^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Istnieje zatem n_0 takie, że

$$s^{n_0} \text{diam}(W_0) < \epsilon.$$

Z definicji $Z = \bigcap_{n=0}^{\infty} K_n$ wynika, że $z \in K_n$ dla każdego n . W szczególności

$$z \in K_{n_0}.$$

Z konstrukcji fraktala Z figura K_{n_0} przyjmuje następującą postać:

$$K_{n_0} = \bigcup_{i_{n_0}, \dots, i_1=1}^N (\varphi_{i_{n_0}} \circ \dots \circ \varphi_{i_1})(W_0).$$

Istnieje zatem złożenie $\Phi = \varphi_{i_{n_0}} \circ \dots \circ \varphi_{i_1}$ takie, że

$$z \in \Phi(W_0).$$

Z Wniosku 1.4.2 wiemy, że istnieje punkt $z' \in Z$ taki, że

$$z' \in \text{int}(\Phi(W_0)).$$

Skoro $z' \in \text{int}(\Phi(W_0))$, to tym bardziej $z' \in \Phi(W_0)$. Wtedy $z, z' \in \Phi(W_0)$ i wówczas

$$d(z, z') \leq \text{diam}(\Phi(W_0)).$$

Zauważmy, że figura $\Phi(W_0)$ jest podobna do W_0 w skali s^{n_0} , ponieważ Φ to n_0 - krotne złożenie przekształceń podobieństwa. Mamy więc $\text{diam}(\Phi(W_0)) = s^{n_0} \text{diam}(W_0)$. Stąd

$$d(z, z') \leq s^{n_0} \text{diam}(W_0) < \epsilon.$$

Ponadto mamy, że $\Phi(W_0) \subset W_0$, zatem

$$\text{int}(\Phi(W_0)) \subset \text{int}(W_0).$$

Otrzymujemy więc, że $z' \in \text{int}(W_0)$ oraz - z wcześniej - $z' \in Z$, co prowadzi do tego, że

$$z' \in \text{int}(W_0) \cap Z.$$

Dodatkowo dla $\epsilon > 0$ dostaliśmy, że

$$d(z, z') < \epsilon,$$

co oznacza, że dowolnie blisko punktu z znajduje się punkt należący do $\text{int}(W_0) \cap Z$. $\square$

Uwaga 1.4.2. Bezpośrednią konsekwencją powyższego wniosku jest to, że dla każdego $x \in \text{bd}(W_0) \cap Z$ dowolnie blisko istnieje punkt x' taki, że $x' \in \text{int}(W_0) \cap Z$.

Ostatni wniosek sformułowany w tym podrozdziale jest poświęcony stwierdzeniu, że nawet w sytuacji, gdy mamy do czynienia z punktem fraktala leżącym na brzegu dowolnej kopii z pierwszej iteracji konstrukcji, to dowolnie blisko niego znajduje się punkt fraktala należący do wnętrza wspomnianej kopii.

Wniosek 1.4.4. Jeśli $z \in \text{bd}(W_i) \cap Z$, to dowolnie blisko z znajdzie się punkt $z' \in \text{int}(W_i) \cap Z$.

Dowód. Każde przekształcenie φ_i jest podobieństwem, a więc również i homeomorfizmem. Istnieje zatem punkt

$$y = \varphi_i^{-1}(z).$$

Z przekroju $z \in \text{bd}(W_i) \cap Z$ wiemy, że $z \in Z$ oraz $z \in \text{bd}(W_i)$, a ponieważ W_i to figura wielokątowa, czyli zbiór domknięty, to również $z \in W_i$. Wtedy ponieważ $z \in Z \cap W_i = \varphi_i(Z) \subset Z$ wynika, że

$$y = \varphi_i^{-1}(z) \in Z.$$

Prawdą jest również, że

$$y \in \text{bd}(W_0), \quad y \in W_0,$$

ponieważ homeomorfizm zachowuje brzegi zbiorów. Otrzymujemy zatem, że

$$y \in \text{bd}(W_0) \cap Z.$$

Wówczas z Wniosku 1.4.3 wiemy, że dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje punkt y' taki, że $y' \in \text{int}(W_0) \cap Z$ oraz $d(y, y') < \epsilon$. Niech $z' = \varphi_i(y')$. Wtedy ponieważ φ_i jest homeomorfizmem, zachodzi

$$z' \in \varphi_i(\text{int}(W_0)) = \text{int}(W_i)$$

oraz z faktu, że $\varphi_i(Z) \subset Z$ (wynikającego z tego, że $\varphi_i(Z) = Z \cap W_i$) mamy

$$z' \in Z.$$

Ponadto dla odległości punktu z od punktu z' zachodzi:

$$d(z, z') = s \cdot d(y, y') < s \cdot \epsilon < \epsilon.$$

Otrzymujemy, więc że w każdym otoczeniu punktu $z \in \text{bd}(W_i) \cap Z$ istnieje punkt $z' \in \text{int}(W_i) \cap Z$. $\square$

Mając sformułowane i udowodnione wnioski pomocnicze możemy przejść do dowodu twierdzenia z początku tego podrozdziału (Twierdzenia 1.4.1).

Dowód Twierdzenia 1.4.1.

- 1) Opiszemy pewien rozkład figury Z na skończoną sumę postaci $Z = Z_1 \cup \dots \cup Z_N$.
Z pierwszej iteracji konstrukcji mamy

$$K_1 = W_1 \cup \dots \cup W_N.$$

Zdefiniujemy $Z_i = W_i \cap Z$. Z Obserwacji 1.4.1 wiemy, że ciąg (K_n) jest malejący, dlatego w szczególności $Z \subset K_1$ (innymi słowy: każdy punkt figury Z należy do co najmniej jednej z figur $W_1, \dots, W_N$).

Weźmy dowolny punkt $x \in Z$. Wtedy z zawierania $Z \subset K_1$ mamy, że

$$x \in K_1 = W_1 \cup \dots \cup W_N.$$

Istnieje zatem taki indeks $i \in \{1, \dots, N\}$, że $x \in W_i$. Wtedy $x \in Z \cap W_i = Z_i$ (z definicji Z_i). Otrzymujemy zatem

$$Z \subset Z_1 \cup \dots \cup Z_N,$$

co oznacza, że każdy punkt figury Z należy do pewnego Z_i , więc należy również do $\bigcup_{i=1}^N Z_i$.
Dla każdego i mamy również $Z_i = W_i \cap Z \subset Z$, wobec czego

$$Z_1 \cup \dots \cup Z_N \subset Z.$$

Pokazaliśmy zawierania w obie strony, zatem $Z = Z_1 \cup \dots \cup Z_N$, gdzie $Z_i = W_i \cap Z$.

- (2) Pokażemy, że $\forall i \in \{1, \dots, N\}$ figura Z_i jest podobna do Z w tej samej skali s .

Przypomnienie: $Z = \bigcap_{n=0}^{\infty} K_n$, $W_i = \varphi_i(W_0)$, $Z_i = W_i \cap Z$.

Z konstrukcji figury Z mamy, że

$$K_1 = W_1 \cup \dots \cup W_N = \varphi_1(W_0) \cup \dots \cup \varphi_N(W_0) = \bigcup_{i=1}^N \varphi_i(W_0).$$

W_i jest obrazem W_0 przez przekształcenie podobieństwa φ_i w skali s . Ponownie z konstrukcji figury Z mamy, że

$$K_2 = \bigcup_{i=1}^N \varphi_i(K_1),$$

ponieważ K_2 powstaje poprzez zastosowanie tych samych przekształceń podobieństwa φ_i do figury K_1 .

Weźmy tylko tę część K_2 , która leży w W_i dla ustalonego i . Wszystkie kawałki K_2 leżące w W_i powstają przez zastosowanie φ_i do K_1 . Wtedy $K_2 \cap W_i = \varphi_i(K_1)$ (ponieważ dla $j \neq i$ mamy, że $\varphi_j(K_1)$ leży w W_j a nie w W_i). Uogólniając powyższe rozumowanie możemy zapisać:

$$K_{n+1} \cap W_i = \varphi_i(K_n).$$

$\varphi_i(K_n)$ interpretujemy jako część figury K_{n+1} umieszczoną w W_i .

Zastosujemy teraz φ_i do figury Z :

$$\varphi_i(Z) = \varphi_i\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} K_n\right) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \varphi_i(K_n) = \bigcap_{n=0}^{\infty} (K_{n+1} \cap W_i) = \left(\bigcap_{n=0}^{\infty} K_{n+1}\right) \cap W_i = Z \cap W_i = Z_i.$$

Pokazaliśmy, że $\varphi_i(Z) = Z_i = Z \cap W_i$, co oznacza, że cała konstrukcja figury Z powtarza się w każdej kopii W_i w ten sam sposób - jako pomniejszona i przekształcona przez φ_i kopia. Innymi słowy pokazaliśmy, że każda z części Z_i jest podobna do Z w tej samej skali s . Zatem rodzina figur $Z_1, \dots, Z_N$, na które rozkładamy Z spełnia warunek 1 z definicji figury ściśle samopodobnej.

(3) Pokażemy, że $\text{int}_Z(Z_i) \cap \text{int}_Z(Z_j) = \emptyset$ dla $i \neq j$.

Załóżmy nie wprost, że istnieją indeksy $i \neq j$ takie, że $\text{int}_Z(Z_i) \cap \text{int}_Z(Z_j) \neq \emptyset$. Wówczas istnieje punkt $z \in \text{int}_Z(Z_i) \cap \text{int}_Z(Z_j)$. Niech U będzie otwartym otoczeniem punktu z w Z zawartym w $\text{int}_Z(Z_i) \cap \text{int}_Z(Z_j)$ takim, że $z \in U \subset \text{int}_Z(Z_i) \cap \text{int}_Z(Z_j)$. Wtedy ponieważ $Z_i = W_i \cap Z$, $Z_j = W_j \cap Z$ otrzymujemy, że

$$U \subset (W_i \cap Z) \cap (W_j \cap Z) = W_i \cap W_j \cap Z.$$

Oznacza to, że każdy punkt zbioru U należy jednocześnie do zbioru W_i oraz W_j . W szczególności punkt z należy do obu wspomnianych zbiorów.

Gdyby $z \in \text{int}(W_i)$, to ponieważ $U \subset W_j$ i U jest otoczeniem z w Z , otrzymalibyśmy, że w każdym otoczeniu z znajdują się punkty należące do W_j . Wraz z $\text{int}(W_i)$ daje to istnienie otoczenia punktu z zawartego jednocześnie w W_i oraz W_j , czyli

$$z \in \text{int}(W_i) \cap \text{int}(W_j),$$

co stoi w sprzeczności z rozłącznością wewnątrz kopii powstających w pierwszej iteracji konstrukcji fraktala Z . Analogicznie nie może zachodzić $z \in \text{int}(W_j)$.

Zatem prawdą jest, że

$$z \in \text{bd}(W_i) \cap \text{bd}(W_j) \cap Z.$$

Ponieważ $z \in \text{bd}(W_i) \cap Z$, to na podstawie Wniosku 1.4.4 wiemy, że dowolnie blisko z istnieje punkt z' taki, że

$$z' \in \text{int}(W_i) \cap Z.$$

Ponieważ U jest otwartym otoczeniem punktu z w Z , możemy wybrać punkt z' tak, aby

$$z' \in U.$$

Zatem $z' \in \text{int}(W_i) \cap Z \cap U$. Ale ponieważ $U \subset W_j$, to również $z' \in \text{int}(W_i) \cap W_j$. Jeśli $z' \in \text{int}(W_j)$, to wtedy

$$z' \in \text{int}(W_i) \cap \text{int}(W_j),$$

a więc dochodzimy do sprzeczności. Zatem

$$z' \in \text{bd}(W_j).$$

Mamy również $z' \in Z$, co wynika z przekroju $z' \in \text{int}(W_i) \cap Z$. Otrzymujemy więc, że

$$z' \in \text{bd}(W_j) \cap Z.$$

Wówczas ponownie z Wniosku 1.4.4 wiemy, że dowolnie blisko z' istnieje punkt z'' taki, że

$$z'' \in \text{int}(W_j) \cap Z.$$

Ponieważ $\text{int}(W_i)$ jest zbiorem otwartym i $z' \in \text{int}(W_i)$, to możemy dobrać z'' tak blisko z' , że

$$z'' \in \text{int}(W_i),$$

stąd

$$z'' \in \text{int}(W_i) \cap \text{int}(W_j),$$

co przeczy rozłączności wewnątrz kopii powstających w pierwszej iteracji konstrukcji fraktala Z . Otrzymujemy sprzeczność z założeniem, że istnieje punkt z , który należałby do $\text{int}_Z(Z_i) \cap \text{int}_Z(Z_j)$.

□

2 Własności

Niniejszy rozdział składa się z dowodów własności wielokątowych fraktali ściśle samopodobnych, które wynikają z ich ogólnej konstrukcji.

2.1 Uogólnienia wynikające z konstrukcji

Pierwsza własność uogólnia zawieranie się kopii w W_0 występujące w konstrukcji na dowolne skończone złożenie przekształceń podobieństwa.

Własność 2.1.1. *Dla każdego n zachodzi*

$$(\varphi_{i_n} \circ \dots \circ \varphi_{i_1})(W_0) \subset W_0.$$

Dowód. Zauważmy, że figura $(\varphi_{i_n} \circ \dots \circ \varphi_{i_1})(W_0)$ to jeden ze składników składających się na figurę K_n :

$$K_n = \bigcup_{i_n, \dots, i_1=1}^N (\varphi_{i_n} \circ \dots \circ \varphi_{i_1})(W_0),$$

zatem z definicji K_n mamy, że

$$(\varphi_{i_n} \circ \dots \circ \varphi_{i_1})(W_0) \subset K_n.$$

Z Obserwacji 1.4.1 mamy natomiast, że

$$K_n \subset K_0 = W_0,$$

więc prawdą jest, że dla każdego n zachodzi

$$(\varphi_{i_n} \circ \cdots \circ \varphi_{i_1})(W_0) \subset W_0.$$

□

Druga własność również stanowi uogólnienie z opisu konstrukcji wielokątowego fraktala, jednak tym razem dotyczy ona rozłączności wewnątrz dowolnych dwóch różnych kopii w ustalonej iteracji powstawania figury Z .

Własność 2.1.2. Dla ustalonego $n \in \mathbb{N}$ kopie n - tej iteracji konstrukcji figury Z postaci

$$(\varphi_{i_n} \circ \cdots \circ \varphi_{i_1})(W_0)$$

mają parami rozłączne wnętrza, tzn. dla dwóch różnych ciągów indeksów:

$$(i_1, \dots, i_n) \neq (j_1, \dots, j_n)$$

zachodzi

$$\text{int}(A) \cap \text{int}(B) = \emptyset,$$

gdzie $A = (\varphi_{i_n} \circ \cdots \circ \varphi_{i_1})(W_0)$, $B = (\varphi_{j_n} \circ \cdots \circ \varphi_{j_1})(W_0)$.

Dowód. Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

Dla $n = 1$ (czyli w pierwszym kroku) z konstrukcji figury Z mamy

$$\varphi_i(W_0) = W_i \quad \text{oraz} \quad \text{int}(W_i) \cap \text{int}(W_j) = \emptyset,$$

wobec czego teza zachodzi.

Założmy teraz, że dla pewnego $n \geq 1$ teza zachodzi. Pokażemy, że jest ona również prawdziwa dla $n + 1$.

Rozważmy 2 ciągi indeksów takie, że

$$(i_1, \dots, i_n, i_{n+1}) \neq (j_1, \dots, j_n, j_{n+1})$$

oraz zdefiniujmy odpowiadające im zbiory

$$A = (\varphi_{i_{n+1}} \circ \varphi_{i_n} \circ \cdots \circ \varphi_{i_1})(W_0), \quad B = (\varphi_{j_{n+1}} \circ \varphi_{j_n} \circ \cdots \circ \varphi_{j_1})(W_0).$$

Mamy 2 możliwości:

- (1) $i_{n+1} \neq j_{n+1}$
Wtedy

$$A = \varphi_{i_{n+1}}(X) \subset W_{i_{n+1}}, \quad B = \varphi_{j_{n+1}}(Y) \subset W_{j_{n+1}},$$

gdzie

$$X = (\varphi_{i_n} \circ \cdots \circ \varphi_{i_1})(W_0), \quad Y = (\varphi_{j_n} \circ \cdots \circ \varphi_{j_1})(W_0).$$

Powyższe zawierania wynikają z Własności 2.1.1.

Z konstrukcji figury Z mamy

$$\text{int}(\varphi_{i_{n+1}}(W_0)) \cap \text{int}(\varphi_{j_{n+1}}(W_0)) = \text{int}(W_{i_{n+1}}) \cap \text{int}(W_{j_{n+1}}) = \emptyset.$$

Ponieważ $A \subset W_{i_{n+1}}$, to $\text{int}(A) \subset \text{int}(W_{i_{n+1}})$ oraz ponieważ $B \subset W_{j_{n+1}}$, to $\text{int}(B) \subset \text{int}(W_{j_{n+1}})$. Wtedy z rozłączności wnętrz zbiorów $W_{i_{n+1}}$ oraz $W_{j_{n+1}}$ otrzymujemy, że

$$\text{int}(A) \cap \text{int}(B) = \emptyset.$$

Teza zachodzi.

- (2) $i_{n+1} = j_{n+1}$
Wtedy dla $X = (\varphi_{i_n} \circ \dots \circ \varphi_{i_1})(W_0)$, $Y = (\varphi_{j_n} \circ \dots \circ \varphi_{j_1})(W_0)$ mamy:

$$A = \varphi_{i_{n+1}}(X), \quad B = \varphi_{i_{n+1}}(Y).$$

Korzystając z tego, że przekształcenie podobieństwa jest homeomorfizmem, otrzymujemy:

$$\text{int}(A) = \text{int}(\varphi_{i_{n+1}}(X)) = \varphi_{i_{n+1}}(\text{int}(X)),$$

$$\text{int}(B) = \text{int}(\varphi_{i_{n+1}}(Y)) = \varphi_{i_{n+1}}(\text{int}(Y)).$$

Wykorzystamy teraz fakt, że przekształcenie podobieństwa jest bijekcją, uzyskując w ten sposób:

$$\begin{aligned} \text{int}(A) \cap \text{int}(B) &= \varphi_{i_{n+1}}(\text{int}(X)) \cap \varphi_{i_{n+1}}(\text{int}(Y)) = \varphi_{i_{n+1}}(\text{int}(X) \cap \text{int}(Y)) = \\ &= \varphi_{i_{n+1}}(\emptyset) = \emptyset. \end{aligned}$$

Przedostatnia równość wynika z tego, że z założenia indukcyjnego mamy, że $\text{int}(X) \cap \text{int}(Y) = \emptyset$. Otrzymujemy zatem, że teza jest spełniona.

W obu przypadkach dostaliśmy, że wnętrza figur A i B są rozłączne, zatem na mocy indukcji każde dwie różne kopie n -tej iteracji konstrukcji figury Z mają parami rozłączne wnętrza. $\square$

2.2 Niepustość

Własność niepustości wydaje się być dość intuicyjna, ponieważ konstrukcja figury Z rozpoczyna się od niepustej figury wielokątowej W_0 , a każde nałożone na nią przekształcenie podobieństwa zachowuje niepustość zbioru. Poniżej przedstawiamy formalny dowód tej własności.

Własność 2.2.1. *Figura $Z = \bigcap_{n=0}^{\infty} K_n$ jest niepusta.*

Dowód. Weźmy dowolny punkt $x_0 \in W_0$ oraz dowolny ciąg indeksów $(i_1, i_2, \dots)$, gdzie $i_k \in \{1, \dots, N\}$, $k \in \mathbb{N}^+$. Zdefiniujmy ciąg punktów w następujący sposób:

$$x_n = (\varphi_{i_1} \circ \dots \circ \varphi_{i_n})(x_0),$$

a ponieważ $x_0 \in W_0$, to otrzymujemy, że $x_n \in (\varphi_{i_1} \circ \dots \circ \varphi_{i_n})(W_0)$. Przyjrzyjmy się teraz następnemu punktowi występującemu w powyższym ciągu. Przyjmuje on postać:

$$x_{n+1} = (\varphi_{i_1} \circ \dots \circ \varphi_{i_n})(\varphi_{i_{n+1}}(x_0)),$$

a ponieważ $\varphi_{i_{n+1}}(x_0) \in W_0$, to $x_{n+1} \in (\varphi_{i_1} \circ \dots \circ \varphi_{i_n})(W_0)$. Otrzymujemy zatem, że

$$x_n, x_{n+1} \in (\varphi_{i_1} \circ \dots \circ \varphi_{i_n})(W_0).$$

Przypomnijmy definicję figury K_n :

$$K_n = \bigcup_{i_1, \dots, i_n=1}^N (\varphi_{i_1} \circ \dots \circ \varphi_{i_n})(W_0).$$

Z powyższej definicji wynika, że każdy punkt powstający w n -tym kroku konstrukcji należy do K_n . W szczególności dla ustalonego ciągu $(i_1, \dots, i_n)$ punkt x_n należy do K_n . Ponadto mamy, że $x_{n+1} \in K_{n+1}$, a ponieważ z Obserwacji 1.4.1 mamy, że $K_{n+1} \subset K_n$, to $x_{n+1} \in K_n$.

Rozważmy teraz średnicę zbioru $(\varphi_{i_1} \circ \dots \circ \varphi_{i_n})(W_0)$. Jest ona równa $s^n \text{diam}(W_0)$, ponieważ każde przekształcenie φ_i jest podobieństwem w skali $s \in (0, 1)$. Przyjrzyjmy się odległości dwóch kolejnych punktów z ciągu (x_n) . Otrzymujemy wówczas, że $|x_{n+1} - x_n| \leq s^n \text{diam}(W_0)$. Weźmy $m > n$, wtedy z nierówności trójkąta dostajemy

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &= |(x_m - x_{m-1}) + (x_{m-1} - x_{m-2}) + \dots + (x_{n+1} - x_n)| \leq \\ &\leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \dots + |x_{n+1} - x_n| = \sum_{k=n}^{m-1} |x_{k+1} - x_k| \leq \\ &\leq \text{diam}(W_0) \sum_{k=n}^{m-1} s^k \leq \text{diam}(W_0) \sum_{k=n}^{\infty} s^k = \text{diam}(W_0) \cdot \frac{s^n}{1-s} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Zatem (x_n) jest ciągiem Cauchy'ego w $\mathbb{R}^2$. Z zupełności przestrzeni $\mathbb{R}^2$ wynika istnienie punktu $x \in \mathbb{R}^2$ takiego, że $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Wiemy, że $x_m \in K_m$ dla każdego m , a ponieważ $K_m \subset K_{m-1} \subset \dots \subset K_n$ dla $m > n$ otrzymujemy, że $x_m \in K_n$ dla wszystkich $m > n$. Zbiór K_n jest domknięty i niepusty jako skończona suma zbiorów domkniętych (figur wielokątowych), więc granica x ciągu (x_m) należy do K_n dla każdego n , zatem

$$\forall n \ x \in K_n \implies x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} K_n = Z,$$

wobec czego figura Z jest niepusta. □

2.3 Z nie jest zbiorem jednopunktowym

Intuicyjnie własność, że Z nie jest zbiorem jednopunktowym, wynika z faktu, że w konstrukcji tego fraktala pojawiają się co najmniej dwa różne przekształcenia podobieństwa o różnych punktach stałych. Poniżej formalizujemy ten argument.

Własność 2.3.1. *Figura $Z = \bigcap_{n=0}^{\infty} K_n$ składa się z co najmniej dwóch różnych punktów.*

Dowód. Weźmy dowolny punkt $x_0 \in W_0$ oraz wybierzmy 2 różne przekształcenia $\varphi_{i_1} \neq \varphi_{i_2}$. Zdefiniujmy 2 ciągi punktów: $x_n = \varphi_{i_1}^n(x_0)$ oraz $y_n = \varphi_{i_2}^n(x_0)$, gdzie $\varphi_{i_k}^n$ oznacza n -krotne złożenie przekształcenia φ_{i_k} dla $k \in \{1, 2\}$.

Aby pokazać, że oba ciągi punktów są Cauchy'ego, możemy postępować tak, jak w dowodzie Własności 2.2.1. Istnieją zatem granice $x, y \in \mathbb{R}^2$ takie, że $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ oraz $y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$. Ponieważ $x_n, y_n \in K_n$ dla każdego n , a zbiory K_n są domknięte i spełniają zawieranie $K_n \subset K_{n-1} \subset \dots \subset K_0$, otrzymujemy, że

$$x, y \in \bigcap_{n=0}^{\infty} K_n = Z.$$

Pokażemy teraz, że granice te są różne. Wiemy, że $x_{n+1} = \varphi_{i_1}(x_n)$. Ponieważ funkcja φ_{i_1} jest ciągła, możemy przejść do granicy $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{i_1}(x_n)$. Wiemy również, że $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x$. Korzystając z ciągłości funkcji φ_{i_1} dostajemy $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{i_1}(x_n) = \varphi_{i_1}(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = \varphi_{i_1}(x)$. Otrzymaliśmy zatem, że $x = \varphi_{i_1}(x)$, co oznacza, że x jest punktem stałym przekształcenia φ_{i_1} . Analogiczne rozumowanie możemy przeprowadzić dla przekształcenia φ_{i_2} , otrzymując w ten sposób, że y jest jego punktem stałym. Pokażemy teraz, że $x \neq y$.

Założmy nie wprost, że $x = y = p$, co oznacza, że punkt p jest punktem stałym zarówno dla przekształcenia φ_{i_1} jak i dla φ_{i_2} . Wiemy jednak, że $\varphi_{i_1} \neq \varphi_{i_2}$. Z klasyfikacji przekształceń podobieństwa na płaszczyźnie wiemy, że każde z nich jest jednokładnością o skali $s \in (0, 1)$ i środku (w tym przypadku) p , ewentualnie złożoną z obrotem wokół p lub z odbiciem względem pewnej prostej przechodzącej przez p .

Rozważmy pierwszą iterację konstrukcji figury Z . Ponieważ p jest punktem stałym dla dwóch różnych przekształceń podobieństwa φ_{i_1} oraz φ_{i_2} , mamy

$$p = \varphi_{i_1}(p) \in \varphi_{i_1}(W_0) = W_{i_1},$$

$$p = \varphi_{i_2}(p) \in \varphi_{i_2}(W_0) = W_{i_2}.$$

Oznacza to, że kopie W_{i_1} oraz W_{i_2} zawierają punkt p . Jednak z założeń konstrukcji figury Z wiemy, że powstające w pierwszej iteracji kopie figury W_0 są rozłączne wewnątrz. Mamy zatem, że $p \in W_{i_1}$ oraz $p \in W_{i_2}$, ale

$$p \notin \text{int}(W_{i_1}) \cap \text{int}(W_{i_2}).$$

Wynika stąd, że punkt p musi znajdować się na brzegu figur W_{i_1} oraz W_{i_2} , ponieważ tylko wtedy możliwa jest sytuacja, że dwie rozłączne wewnątrz kopie figury wielokątowej zawierają punkt należący do obu z nich. Skoro punkt ten leży na brzegach rozważanych kopii po pierwszej iteracji konstrukcji figury Z , to w początkowej figurze wielokątowej również leżał on na jej brzegu, ponieważ podobieństwo zachowuje położenie punktów. W kolejnych iteracjach powstawania fraktala będzie on leżał również na brzegu wszystkich rozważanych kopii figury W_0 .

Rozważmy teraz 2 możliwe położenia punktu p na brzegu figury W_0 :

- p jest wierzchołkiem figury wielokątowej W_0
Wtedy punkt p jest wierzchołkiem pewnego kąta wewnętrznego o mierze $\alpha > 0$. Ponieważ przekształcenia φ_{i_1} oraz φ_{i_2} są podobieństwami, to zachowują one miary kątów. Zatem każda kopia W_0 zawierająca punkt p ma w tym punkcie kąt o tej samej mierze $\alpha > 0$.
- p leży na brzegu figury wielokątowej W_0 , ale nie jest jej wierzchołkiem
Wówczas punkt p należy do wnętrza pewnego boku figury wielokątowej, zatem kąt przy p zajmuje 180° . W szczególności jest to kąt o mierze dodatniej. Ponownie - podobieństwo zachowuje miary kątów, więc każda kopia figury W_0 zawierająca punkt p , zajmuje przy tym punkcie kąt o mierze 180° .

W obu przypadkach istnieje zatem $\alpha > 0$ takie, że każda z kopii W_{i_1}, W_{i_2} zajmuje przy punkcie p kąt o mierze równej α . W związku z powyższym każda z powstałych kopii W_{i_1} oraz W_{i_2} zajmuje pewien dodatni zakres kątów. Ponieważ wnętrza tych kopii są rozłączne, zakresy kątów zajmowane przez różne kopie nie mogą na siebie nachodzić wewnątrz. Suma tych kątów nie może również przekroczyć 360° .

Wiemy już, że ponieważ przekształcenia φ_{i_1} oraz φ_{i_2} są podobieństwami o wspólnym punkcie stałym p , punkt ten odpowiada temu samemu punktowi figury W_0 w każdej z rozważanych kopii oraz że przy punkcie p każda rozważana kopia zajmuje pewien dodatni zakres kątowy α . A ponieważ podobieństwo zachowuje miary kątów, każda taka kolejno powstająca kopia ma przy punkcie p kąt o tej samej mierze α . Istnieje zatem $\alpha > 0$ takie, że każda nowo powstająca kopia (taka jak rozważane powyżej) w każdej iteracji zajmuje zakres kątowy równy α .

W drugiej iteracji konstrukcji figury Z rozważmy kopie figury wielokątowej W_0 , które powstają przez kolejne składanie przekształceń φ_{i_1} oraz φ_{i_2} . Otrzymujemy wówczas kopie postaci:

$$\varphi_{j_2} \circ \varphi_{j_1}(W_0),$$

gdzie $j_1, j_2 \in \{i_1, i_2\}$. Dostajemy zatem łącznie 2^2 kopii zawierających punkt p , z których każda zajmuje pewien dodatni zakres kątów. Analogicznie zakresy te muszą być rozłączne wewnątrz, a ich suma także nie może przekroczyć 360° .

W n -tej iteracji konstrukcji figury Z ponownie rozważmy kopie figury W_0 , które powstają przez dowolne kombinacje złożań przekształceń φ_{i_1} oraz φ_{i_2} . Są one postaci:

$$\varphi_{j_n} \circ \dots \circ \varphi_{j_1}(W_0),$$

gdzie $j_1, \dots, j_n \in \{i_1, i_2\}$. Otrzymujemy wtedy 2^n kopii W_0 , z których każda zawiera punkt p . Jesteśmy w stanie zatem wyznaczyć wartość n , dla której zakres kątów przy punkcie p przekroczy 360° :

$$2^n \cdot \alpha > 360^\circ,$$

$$2^n > \frac{360^\circ}{\alpha},$$

$$n > \log_2 \frac{360^\circ}{\alpha}.$$

Minimalna liczba iteracji n , dla której suma kątów przy punkcie p przekroczy 360° , wynosi więc:

$$n = \left\lceil \log_2 \frac{360}{\alpha} \right\rceil.$$

Każda iteracja o numerze większym niż powyższy będzie powodować, że powstanie taka liczba kopii zawierających punkt p , że będą one na siebie nachodzić wewnątrz, co przeczy założeniu o rozłączności wewnątrz powstających kopii figury W_0 (Własność 2.1.2). Otrzymujemy zatem, że punkt p nie może być wspólnym punktem stałym przekształceń φ_{i_1} oraz φ_{i_2} , co implikuje $x \neq y$. Zatem figura Z składa się z co najmniej dwóch różnych punktów. $\square$

2.4 Nieprzeliczalność

Przechodzimy teraz do najmocniejszej własności dotyczącej liczności punktów fraktala Z , mianowicie do ich nieprzeliczalności.

Własność 2.4.1. *Figura $Z = \bigcap_{n=0}^{\infty} K_n$ składa się z nieprzeliczalnie wielu punktów.*

Dowód. Z dowodu Własności 2.3.1 wiemy, że figura Z składa się z co najmniej dwóch różnych punktów. Nazwijmy je $x, y \in Z, x \neq y$. Niech $d(x, y)$ oznacza odległość między punktami x i y . Wówczas $d(x, y) > 0$.

Z dowodu Własności 2.2.1 wiemy, że średnica każdego zbioru postaci $(\varphi_{i_n} \circ \dots \circ \varphi_{i_1})(W_0)$ jest równa

$$\text{diam}((\varphi_{i_n} \circ \dots \circ \varphi_{i_1})(W_0)) = s^n \text{diam}(W_0)$$

oraz że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s^n \text{diam}(W_0) = 0.$$

Wtedy z definicji granicy mamy, że dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje N takie, że: $s^N \text{diam}(W_0) < \epsilon$. Weźmy $\epsilon = \frac{1}{2}d(x, y)$. Ponieważ $d(x, y) > 0$, to $\epsilon > 0$, zatem otrzymujemy N takie, że:

$$s^N \text{diam}(W_0) < \frac{1}{2}d(x, y).$$

Rozważmy teraz kopie W_0 poziomu N , które zawierają punkty x i y : $A = (\varphi_{i_N} \circ \dots \circ \varphi_{i_1})(W_0)$, $B = (\varphi_{j_N} \circ \dots \circ \varphi_{j_1})(W_0)$. Pokażemy, że $A \neq B$.

Założmy nie wprost, że $A = B$. Wtedy oba punkty należą do zbioru A , więc

$$d(x, y) \leq \text{diam}(A) = s^N \text{diam}(W_0) < \frac{1}{2}d(x, y),$$

co jest sprzecznością. Zatem $A \neq B$, czyli $(i_1, \dots, i_N) \neq (j_1, \dots, j_N)$.

Z Własności 2.1.2 wiemy, że dla ustalonej iteracji konstrukcji figury Z powstające w niej kopie figury wielokątowej W_0 mają rozłączne wnętrza. Dla rozważanych przed chwilą zbiorów A i B zachodzi zatem $\text{int}(A) \cap \text{int}(B) = \emptyset$. Pokażemy teraz, że ze wcześniejszych rozważań wynika $A \cap B = \emptyset$.

Założmy nie wprost, że $A \cap B \neq \emptyset$. Oznacza to, że istnieje punkt a taki, że $a \in A \cap B$. Wtedy

$$d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, y) \leq \text{diam}(A) + \text{diam}(B) < \frac{1}{2}d(x, y) + \frac{1}{2}d(x, y) = d(x, y),$$

co jest sprzecznością, zatem $A \cap B = \emptyset$.

Mamy więc ustalone dwie rozłączne kopie poziomu N . W celu większej przejrzystości dalszej części dowodu wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$\Psi_0 = \varphi_{i_N} \circ \cdots \circ \varphi_{i_1},$$

$$\Psi_1 = \varphi_{j_N} \circ \cdots \circ \varphi_{j_1}.$$

Każdą z funkcji Ψ_0, Ψ_1 można intuicyjnie rozumieć jako jeden duży krok prowadzący do N -tej iteracji powstawania figury Z . Wtedy $A = \Psi_0(W_0)$ oraz $B = \Psi_1(W_0)$.

Dla każdego nieskończonego ciągu $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots)$, gdzie $\alpha_k \in \{0, 1\}, k \in \mathbb{N}^+$ definiujemy:

$$W_{\alpha, n} = (\Psi_{\alpha_1} \circ \cdots \circ \Psi_{\alpha_n})(W_0).$$

Figura $W_{\alpha, n}$ powstaje zatem w wyniku $n \cdot N$ -krotnego złożenia przekształceń podobieństwa nałożonego na figurę początkową W_0 . Zauważmy, że w ten sposób dla każdego α mamy

$$W_{\alpha, n} \subset K_{nN}.$$

Przyjrzyjmy się również zbiorowi $W_{\alpha, n+1}$, który jest postaci:

$$W_{\alpha, n+1} = (\Psi_{\alpha_1} \circ \cdots \circ \Psi_{\alpha_n} \circ \Psi_{\alpha_{n+1}})(W_0).$$

Zachodzi wówczas zawieranie

$$W_{\alpha, n+1} \subset W_{\alpha, n},$$

co wynika z faktu, że $\Psi_{\alpha_{n+1}}(W_0) \subset W_0$. Otrzymujemy zatem zstępujący ciąg zbiorów $(W_{\alpha, n})$. Ponadto ponieważ Ψ_0 oraz Ψ_1 są przekształceniami podobieństwa o skali s^N , otrzymujemy:

$$\text{diam}(W_{\alpha, n}) = (s^N)^n \text{diam}(W_0),$$

co przy n dążącym do nieskończoności zbiega do 0.

Wiemy, że dla każdych α, n zbiór $W_{\alpha, n}$ jest zbiorem domkniętym i ograniczonym. Dodatkowo zbiory te tworzą ciąg zbiorów zstępujących, których średnice dążą do 0, zatem na mocy twierdzenia Cantora o zupełności, otrzymujemy, że $\bigcap_{n=1}^{\infty} W_{\alpha, n}$ jest zbiorem niepustym. Oznaczmy punkt należący do powyższego przekroju jako z_α :

$$z_\alpha \in \bigcap_{n=1}^{\infty} W_{\alpha, n}.$$

Zauważmy, że ponieważ każdy zbiór $W_{\alpha, n}$ zawiera się w K_{nN} , otrzymujemy, że dla każdego n $z_\alpha \in K_{nN}$, co implikuje, że

$$z_\alpha \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_{nN}.$$

Pokażemy, że wtedy $z_\alpha \in Z$.

Weźmy dowolne $m \in \mathbb{N}$. Wówczas istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $nN \geq m$. Wtedy z udowodnionej wcześniej obserwacji (Obserwacja 1.4.1) otrzymujemy, że $K_{nN} \subset K_m$, co oznacza, że każdy element zbioru K_{nN} należy również do zbioru K_m , a to z kolei oznacza, że $z_\alpha \in K_m$, a z dowolności m otrzymujemy, że

$$z_\alpha \in \bigcap_{m=1}^{\infty} K_m = Z.$$

Pokażemy teraz, że takich punktów jak z_α jest nieprzeliczalnie wiele.

Niech $\alpha = (\alpha_i)$ oraz $\beta = (\beta_i)$ będą dwoma nieskończonymi ciągami o wyrazach ze zbioru $\{0, 1\}$ takimi, że $\alpha \neq \beta$. Wówczas ciągi te różnią się po raz pierwszy na jakiejś pozycji $g \geq 1$, tzn. $\alpha_g \neq \beta_g$, $\alpha_i = \beta_i$ dla $i < g$. Rozważmy zbiory:

$$W_{\alpha,g} = (\Psi_{\alpha_1} \circ \dots \circ \Psi_{\alpha_g})(W_0),$$

$$W_{\beta,g} = (\Psi_{\beta_1} \circ \dots \circ \Psi_{\beta_g})(W_0).$$

Ponieważ $\alpha_i = \beta_i$ dla $i < g$, mamy:

$$\Psi_{\alpha_1} \circ \dots \circ \Psi_{\alpha_{g-1}} = \Psi_{\beta_1} \circ \dots \circ \Psi_{\beta_{g-1}}.$$

Przyjrzyjmy się zbiorom $W_{\alpha,g}$ oraz $W_{\beta,g}$. Z definicji mamy

$$W_{\alpha,g} = (\Psi_{\alpha_1} \circ \dots \circ \Psi_{\alpha_{g-1}} \circ \Psi_{\alpha_g})(W_0) = (\Psi_{\alpha_1} \circ \dots \circ \Psi_{\alpha_{g-1}})(\Psi_{\alpha_g}(W_0)),$$

$$W_{\beta,g} = (\Psi_{\beta_1} \circ \dots \circ \Psi_{\beta_{g-1}} \circ \Psi_{\beta_g})(W_0) = (\Psi_{\beta_1} \circ \dots \circ \Psi_{\beta_{g-1}})(\Psi_{\beta_g}(W_0)).$$

Bez straty ogólności założmy, że $\alpha_g = 0, \beta_g = 1$ oraz przypomnijmy, że $A = \Psi_0(W_0), B = \Psi_1(W_0)$. Wtedy

$$W_{\alpha,g} = \Psi_{\alpha_1} \circ \dots \circ \Psi_{\alpha_{g-1}}(A),$$

$$W_{\beta,g} = \Psi_{\beta_1} \circ \dots \circ \Psi_{\beta_{g-1}}(B) = \Psi_{\alpha_1} \circ \dots \circ \Psi_{\alpha_{g-1}}(B).$$

Ponieważ wcześniej wykazaliśmy, że $A \cap B = \emptyset$ oraz wiemy, że złożenie podobieństw jest podobieństwem, a więc jest różnowartościowe, otrzymujemy

$$W_{\alpha,g} \cap W_{\beta,g} = \emptyset.$$

Ponieważ $z_\alpha \in W_{\alpha,g}, z_\beta \in W_{\beta,g}$ to wynika stąd, że

$$z_\alpha \neq z_\beta.$$

Otrzymaliśmy zatem, że odwzorowanie $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow Z$ zadane przyporządkowaniem $\alpha \mapsto Z_\alpha$ jest różnowartościowe. Ponieważ zbiór $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ jest nieprzeliczalny, wynika stąd, że Z jest nieprzeliczalny. $\square$

2.5 Brak punktów izolowanych

Zanim przejdziemy do sformułowania własności związanej z punktami izolowanymi, przypomnijmy, czym one są.

Definicja 2.5.1. Punkt $x \in A$ nazywamy **punktem izolowanym** zbioru A , jeśli $\exists r > 0 : K(x, r) \cap A = \{x\}$, gdzie $K(x, r)$ oznacza kulę otwartą o środku x i promieniu r .

Punkt izolowany można intuicyjnie interpretować jako taki punkt, w którego otoczeniu nie ma innych punktów danego zbioru.

Samopodobieństwo fraktala Z powoduje, że jest on złożony w każdej skali. W szczególności nie występują w nim punkty izolowane - niezależnie od tego, jak blisko przyjrzymy się danemu punktowi, zawsze znajdziemy w jego otoczeniu inne punkty fraktala.

Własność 2.5.1. W figurze Z nie ma punktów izolowanych.

Dowód. Aby udowodnić, że w figurze Z nie ma punktów izolowanych pokażemy, że dla każdego punktu $x \in Z$ oraz każdego $r > 0$ istnieje punkt $y \in Z$, $y \neq x$ taki, że $y \in K(x, r)$.

Weźmy dowolny punkt $x \in Z$ oraz $r > 0$. Z dowodu Własności 2.2.1 wiemy, że $\lim_{n \rightarrow \infty} s^n \text{diam}(W_0) = 0$. Ponieważ średnice powstających kopii figury W_0 na kolejnych poziomach dążą do 0, to istnieje $k \in \mathbb{N}$ takie, że

$$s^k \text{diam}(W_0) < r.$$

Z faktu, że $x \in Z = \bigcap_{n=0}^{\infty} K_n$ wynika, że $x \in K_k$. Istnieje zatem figura wielokątowa postaci $W^{(k)} = \varphi_{i_k} \circ \dots \circ \varphi_{i_1}(W_0) = \Phi(W_0)$ taka, że

$$x \in W^{(k)} \subset K_k.$$

Funkcję $\Phi = \varphi_{i_k} \circ \dots \circ \varphi_{i_1}$ można intuicyjnie rozumieć jako krok prowadzący od razu do k -tej iteracji powstawania figury Z . Ponieważ $\text{diam}(W^{(k)}) = s^k \text{diam} W_0 < r$ otrzymujemy, że

$$W^{(k)} \subset K(x, r).$$

Pokażemy, że figura $Z \cap W^{(k)}$ zawiera co najmniej dwa różne punkty.

Z dowodu Własności 2.4.1 wiemy, że istnieją przekształcenia podobieństwa Ψ_0 oraz Ψ_1 takie, że:

$$\Psi_0(W_0) \cap \Psi_1(W_0) = \emptyset, \quad \Psi_0(W_0), \Psi_1(W_0) \subset W_0.$$

Rozważmy 2 nieskończone ciągi indeksów postaci:

$$\alpha = (0, 0, 0, \dots), \quad \beta = (1, 1, 1, \dots)$$

oraz zdefiniujmy odpowiadające im ciągi zbiorów

$$W_{\alpha,n} = \Phi(\Psi_0^n(W_0)), \quad W_{\beta,n} = \Phi(\Psi_1^n(W_0)).$$

Zauważmy, że zachodzi następujące zawieranie:

$$W_{\alpha,n} = \Phi(\Psi_0^{n-1}(\Psi_0(W_0))) \subset \Phi(W_0) = W^{(k)},$$

które wynika z faktu, że $\Psi_0(W_0) \subset W_0$. Przeprowadzając analogicznie rozumowanie dla figury $W_{\beta,n}$, otrzymamy:

$$W_{\beta,n} \subset W^{(k)}.$$

Przyjrzyjmy się teraz zbiorowi postaci:

$$W_{\alpha,n+1} = \Phi(\Psi_0^{n+1}(W_0)) = \Phi(\Psi_0^n(\Psi_0(W_0))) \subset \Phi(\Psi_0^n(W_0)) = W_{\alpha,n},$$

co również wynika z faktu, że $\Psi_0(W_0) \subset W_0$. Analogiczne rozumowanie można przeprowadzić dla figur $W_{\beta,n}$ oraz $W_{\beta,n+1}$, otrzymując w ten sposób

$$W_{\beta,n+1} \subset W_{\beta,n}.$$

Otrzymujemy zatem 2 zstępujące ciągi zbiorów: $(W_{\alpha,n})$ oraz $(W_{\beta,n})$.

Przyjrzyjmy się teraz średnicy zbioru $W_{\alpha,n}$. Z dowodu Własności 2.4.1 wiemy, że przekształcenia Ψ_0 oraz Ψ_1 są podobieństwami o skali s^N . Natomiast przekształcenie Φ jest podobieństwem o skali s^k . Dostajemy zatem:

$$\text{diam}(W_{\alpha,n}) = s^k \cdot s^{Nn} = s^{k+Nn} \text{diam}(W_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Analogiczne rozważania można poczynić dla średnicy zbioru $W_{\beta,n}$.

Wiemy już zatem, że dla każdych α i β zbiory $W_{\alpha,n}$ oraz $W_{\beta,n}$ tworzą ciągi zbiorów zstępujących, których średnice dążą do 0. Zbiory te są również - jako figury wielokątowe - domknięte i ograniczone, zatem na mocy twierdzenia Cantora o zupełności, otrzymujemy, że $\bigcap_{n=1}^{\infty} W_{\alpha,n}$ oraz $\bigcap_{n=1}^{\infty} W_{\beta,n}$ są zbiorami niepustymi. Oznaczmy punkty należące do powyższych przekrojów odpowiednio jako y_0 i y_1 :

$$y_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} W_{\alpha,n}, \quad y_1 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} W_{\beta,n}.$$

Zauważmy, że ponieważ każdy zbiór $W_{\alpha,n}$ zawiera się w K_{Nn+k} , otrzymujemy, że dla każdego n $y_0 \in K_{Nn+k}$, co implikuje, że

$$y_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_{Nn+k}.$$

Pokażemy, że wtedy $y_0 \in Z$.

Weźmy dowolne $m \in \mathbb{N}$. Wówczas istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $Nn + k \geq m$. Wtedy z udowodnionej wcześniej obserwacji (Obserwacja 1.4.1) otrzymujemy, że $K_{Nn+k} \subset K_m$, co oznacza, że jeśli $y_0 \in K_{Nn+k}$, to również $y_0 \in K_m$, a z dowolności m mamy, że

$$y_0 \in \bigcap_{m=1}^{\infty} K_m = Z.$$

Analogicznie dla punktu y_1 . Dostajemy zatem:

$$y_0 \in W_{\alpha,n} \subset W^{(k)}, \quad y_1 \in W_{\beta,n} \subset W^{(k)},$$

co prowadzi do tego, że

$$y_0, y_1 \in W^{(k)} \quad \text{oraz} \quad y_0, y_1 \in Z.$$

Ponadto mamy

$$y_0 \in W_{\alpha,n} \subset \Phi(\Psi_0(W_0)), \quad y_1 \in W_{\beta,n} \subset \Phi(\Psi_1(W_0)),$$

a ponieważ

$$\Psi_0(W_0) \cap \Psi_1(W_0) = \emptyset \implies \Phi(\Psi_0(W_0)) \cap \Phi(\Psi_1(W_0)) = \emptyset,$$

to

$$y_0 \neq y_1.$$

Wiemy więc, że $x \in W^{(k)}$ oraz $y_0, y_1 \in W^{(k)}$ takie, że $y_0 \neq y_1$, co oznacza, że co najmniej jeden z punktów y_0, y_1 jest różny od x . Oznaczmy ten punkt przez y . Wtedy

$$y \in Z \cap W^{(k)} \subset K(x, r), y \neq x.$$

Otrzymujemy ostatecznie, że

$$K(x, r) \cap Z \neq \{x\},$$

co oznacza, że x nie jest punktem izolowanym figury Z . A ponieważ x był dowolny, figura Z nie ma punktów izolowanych. $\square$

3 Wymiar fraktalny

W klasycznej geometrii pojęcie wymiaru jest powszechnie używane i znane. Można go utożsamić z minimalną liczbą współrzędnych potrzebną do jednoznacznego opisu położenia punktu w danej przestrzeni. Przyjrzyjmy się zatem obiektom reprezentującym najbardziej znane wymiary oraz zmianom ich miary związaną z przeskalowaniem tych obiektów:

- $\dim = 1$
Odcinek zmniejszony w skali s ma długość mniejszą w stosunku s^1 ,
- $\dim = 2$
Kwadrat zmniejszony w skali s ma pole mniejsze w stosunku s^2 ,
- $\dim = 3$
Sześcian zmniejszony w skali s ma objętość mniejszą w stosunku s^3 .

Wymiar można więc również rozumieć jako wykładnik potęgi opisujący, jak dana miara geometryczna zmienia się przy skalowaniu długości. Niezależnie od rodzaju interpretacji naturalne jest przyjęcie, że wymiar jest liczbą całkowitą. Istnieją jednak obiekty, które niekoniecznie posiadają całkowity wymiar, co jest związane z ich złożoną strukturą. Przykładami takich obiektów są właśnie fraktale. W odniesieniu do nich wprowadza się pojęcie wymiaru fraktalnego, który opisuje, w jakim stopniu dany fraktal wypełnia przestrzeń.

3.1 Pojęcie wymiaru fraktalnego

W książce *Fractals Everywhere* autorstwa Michaela Barnsley'a [3] możemy znaleźć następującą definicję wymiaru fraktalnego.

Definicja 3.1.1. *Niech F będzie niepustym zwartym podzbiorem zupełnej przestrzeni metrycznej. Dla każdego $\epsilon > 0$ niech $N(F, \epsilon)$ oznacza najmniejszą liczbę całkowitą domkniętych kul o promieniu ϵ potrzebną do pokrycia zbioru F . Jeśli istnieje liczba D postaci*

$$D = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(N(F, \epsilon))}{\ln(1/\epsilon)},$$

*to wtedy liczba D jest nazywana **wymiarem fraktalnym**.*

Jednym z najczęściej używanych przykładów wymiaru fraktalnego jest wymiar pudełkowy (ang. *box-counting dimension*). Jego definicję możemy znaleźć w drugim wydaniu książki *Fractal Geometry* autorstwa Kennetha Falconera [4].

Definicja 3.1.2. *Niech F będzie niepustym i ograniczonym zbiorem przestrzeni $\mathbb{R}^n$ oraz niech $N_\delta(F)$ będzie najmniejszą liczbą zbiorów o średnicy równej co najwyżej δ , które mogą pokryć F . Dolny i górny wymiar pudełkowy zbioru F jest zdefiniowany odpowiednio jako:*

$$\underline{\dim}(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log(N_\delta(F))}{\log(1/\delta)},$$

$$\overline{\dim}(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log(N_\delta(F))}{\log(1/\delta)}.$$

*Jeśli powyższe wyrażenia są sobie równe, to wówczas **wymiarem pudełkowym** zbioru F nazywamy liczbę:*

$$\dim(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log(N_\delta(F))}{\log(1/\delta)}.$$

Falconer w swojej książce zaznacza jednak, że ostatnia granica z zaprezentowanej definicji nie musi istnieć. Jednocześnie podaje warunki na to, jakie inne wielkości $N_\delta(F)$ prowadzą do równoważnych definicji, np. najmniejsza liczba domkniętych kul o promieniu $\delta > 0$ pokrywających F , czy też najmniejsza liczba n - wymiarowych kostek o krawędzi długości δ pokrywających F .

Widzimy zatem, że wymiar fraktalny w sensie Barnsley'a jest równoważny wymiarowi pudełkowemu Falconera, o ile granica występująca w definicji istnieje. Ponieważ definicja Falconera jest niezależna od wyboru konkretnego typu pokrycia (kulami, kostkami lub zbiorami o średnicy nie większej niż δ), w dalszej części pracy przyjmujemy jego ujęcie wymiaru pudełkowego.

Dla figur ściśle samopodobnych wymiar pudełkowy jest tym samym co wymiar samopodobieństwa, czego dowód możemy znaleźć w drugiej edycji książki *Fractal Geometry* ([4], Twierdzenie 9.3 z rozdziału 9). Na podstawie powyższej literatury wprowadzamy poniższą definicję dostosowaną do wprowadzonych w niniejszej pracy oznaczeń.

Definicja 3.1.3. ***Wymiarem fraktalnym wielokątowego fraktala ściśle samopodobnego** $Z = Z_1 \cup \dots \cup Z_N$ nazwiemy liczbę d taką, że*

$$s^d = \frac{1}{N},$$

gdzie zgodnie z Definicją 1.0.1: N oznacza liczbę kopii Z_i , a s jest skalą podobieństwa pojedynczego Z_i do całego fraktala Z . Wymiar fraktalny figury Z będziemy również oznaczać symbolem $\dim_F(Z)$.

Uwaga 3.1.1. Po wyznaczeniu liczby d z powyższej równości otrzymamy

$$d = \frac{\log(N)}{\log\left(\frac{1}{s}\right)},$$

gdzie $\log$ oznacza logarytm naturalny.

Wróćmy do przykładów z początku tego rozdziału i zastosujmy do nich wprowadzony wzór na wymiar fraktalny zgodnie z uwagą do Definicji 3.1.3:

- Odcinek

Weźmy odcinek o dowolnej długości i podzielmy go na 2 przystające części. Odcinek jest figurą ściśle samopodobną, ponieważ wyjściowy odcinek X można zapisać jako sumę odcinków X_1 oraz X_2 , taką, że każdy z X_i jest podobny do wyjściowego X w skali $s = \frac{1}{2}$ oraz X_i mają rozłączne wnętrza, zatem wymiar fraktalny jest równy:

$$d = \frac{\log(2)}{\log(1/0.5)} = \frac{\log(2)}{\log(2)} = 1.$$

- Kwadrat

Podzielmy jednostkowy kwadrat na 4 mniejsze przystające kwadraty w taki sposób, aby wyjściowy kwadrat można było zapisać jako następującą sumę $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4$. Powstałe w ten sposób kwadraty mają bok długości $\frac{1}{2}$, a więc są podobne do wyjściowego kwadratu w skali $s = \frac{1}{2}$. Kwadraty X_i mają również parami rozłączne wnętrza, zatem otrzymujemy, że wyjściowy kwadrat X jest figurą ściśle samopodobną. Wymiar fraktalny kwadratu jest równy:

$$d = \frac{\log(4)}{\log(1/0.5)} = \frac{\log(4)}{\log(2)} = 2.$$

- Sześcian

Podzielmy sześcian o krawędzi długości 1 na 8 mniejszych sześciątów w taki sposób, aby wyjściowy sześcian X można było przedstawić jako następującą sumę $X = X_1 \cup \dots \cup X_8$. Powstała figura jest ściśle samopodobna, ponieważ każdy z sześciątów X_i jest podobny do wyjściowego sześcianu w skali $s = \frac{1}{2}$ oraz powstałe sześciany X_i mają parami rozłączne wnętrza. Zatem wymiar fraktalny sześcianu wynosi:

$$d = \frac{\log(8)}{\log(1/0.5)} = \frac{\log(8)}{\log(2)} = 3.$$

W każdym z rozważanych przykładów otrzymujemy odpowiednio liczby 1, 2 oraz 3, co odpowiada wymiarowi odcinka, kwadratu i sześcianu. Możemy zatem postawić wniosek mówiący o tym, że w przypadku klasycznych obiektów geometrycznych przedstawiony wzór na wymiar fraktalny prowadzi do wartości zgodnych z powszechnie znanym wymiarem, co potwierdza zgodność wprowadzonej definicji z klasycznym pojęciem wymiaru.

Jak wspomnieliśmy na początku tego rozdziału - istnieją jednak obiekty, które niekoniecznie mają wymiar fraktalny reprezentowany poprzez liczbę całkowitą, co możemy zobaczyć na poniższych przykładach:

- Krzywa Kocha

Wróćmy do Przykładu 1.2.1 z Rozdziału 1. Konstrukcja krzywej Kocha, która się w nim pojawiła, została przeprowadzona w taki sposób, że końcową krzywą Kocha zapisaliśmy w postaci sumy 4 składników, gdzie każde 2 parami różne składniki wspomnianej sumy miały rozłączne wnętrza, a każdy z nich był podobny do końcowej krzywej w skali równej $\frac{1}{3}$. Mamy zatem $N = 4$ oraz $s = \frac{1}{3}$, wobec czego wymiar fraktalny krzywej Kocha wynosi:

$$d = \frac{\log(4)}{\log(3)} \approx 1.26.$$

- Zbiór Cantora

W Przykładzie 1.3.1 z Rozdziału 1 opisaliśmy konstrukcję zbioru Cantora, który później został przez nas zapisany w postaci sumy 2 składników o rozłącznych wnętrzach. Każdy z tych dwóch składników był podobny do końcowego zbioru Cantora w skali $\frac{1}{3}$. Mamy więc $N = 2$ oraz $s = \frac{1}{3}$, zatem wymiar fraktalny zbioru Cantora jest równy:

$$d = \frac{\log(2)}{\log(3)} \approx 0.63.$$

3.2 Wymiar fraktalny a spójność

Wróćmy teraz z powrotem do wielokątowych fraktali ściśle samopodobnych. Poniżej przedstawiamy pewną własność związaną z wymiarem fraktalnym.

Własność 3.2.1. *Jeśli $\dim_F(Z) < 1$, to Z nie jest spójny.*

Zanim przejdziemy do dowodzenia powyższej własności, sformułujemy i udowodnimy pewien lemat.

Lemat 3.2.1. *Jeśli Z jest spójny, to dla dowolnych punktów $a, b \in Z$ oraz dla każdego $n \geq 1$ istnieje ciąg kopii poziomu n :*

$$W_{\sigma_1}, W_{\sigma_2}, \dots, W_{\sigma_m}$$

taki, że:

- $a \in W_{\sigma_1}, b \in W_{\sigma_m}$,
- $W_{\sigma_k} \cap W_{\sigma_{k+1}} \neq \emptyset$ dla $k = 1, \dots, m-1$,
- $m \leq N^n$.

Dowód. Załóżmy nie wprost, że dla pewnych $a, b \in Z$ i pewnego $n \geq 1$ taki ciąg kopii nie istnieje. Wybierzmy kopię W_{σ_1} zawierającą a .

Wówczas powiemy, że W_τ jest połączone z W_{σ_1} , jeśli istnieje skończony ciąg kopii poziomu n postaci:

$$W_{\sigma_1}, \dots, W_\tau,$$

w którym każde dwie kolejne kopie mają niepusty przekrój. Niech

$$A = \bigcup \{W_\tau : W_\tau \text{ jest połączona}\},$$

$$B = \bigcup \{W_\tau : W_\tau \text{ nie jest połączona}\}.$$

Wtedy $K_n = A \cup B$ oraz $A \cap B = \emptyset$.

Ponieważ kopie W_σ są domknięte oraz jest ich skończona ilość, to również zbiory A i B są domknięte. Stąd

$$Z \cap A, \quad Z \cap B$$

są domknięte. Mamy również, że $Z \subset K_n = A \cup B$, więc

$$Z = (Z \cap A) \cup (Z \cap B).$$

Z punktu $a \in W_{\sigma_1} \subset A$ mamy, że

$$a \in Z \cap A.$$

Ponieważ z założenia nie wprost kopia zawierająca b nie jest połączona z W_{σ_1} , zatem zachodzi

$$b \in Z \cap B.$$

Otrzymujemy wówczas rozkład Z na 2 niepuste domknięte podzbiory, co przeczy jego spójności.

Zatem kopia zawierająca b musi być połączona z W_{σ_1} .

Z definicji połączenia wynika, że istnieje ciąg kopii

$$W_{\sigma_1}, \dots, W_{\sigma_m}$$

taki, że $a \in W_{\sigma_1}, b \in W_{\sigma_m}$ oraz każde dwie kolejne kopie się przecinają. A ponieważ każdy krok przejścia w ciągu oznacza przejście do innej kopii poziomu n , których maksymalnie jest N^n , to dostajemy, że $m \leq N^n$. $\square$

Mając udowodniony powyższy lemat, możemy przejść do dowodzenia Własności 3.2.1.

Dowód Własności 3.2.1. Z definicji wymiaru fraktalnego otrzymujemy, że

$$\frac{\log(N)}{\log(1/s)} < 1.$$

Ponieważ dla $s \in (0, 1)$ wyrażenie $\log(1/s)$ jest dodatnie, nierówność zachowuje znak po obustronnym przemnożeniu przez liczbę $\log(1/s)$:

$$\log(N) < \log(1/s).$$

Nakładając obustronnie funkcję wykładniczą o podstawie e uzyskujemy:

$$N < \frac{1}{s}$$

i w konsekwencji

$$Ns < 1.$$

Założmy nie wprost, że Z jest zbiorem spójnym.

Zdefiniujmy kopie W_0 na poziomie n - tym:

$$W_\sigma = \varphi_\sigma(W_0),$$

gdzie φ_σ jest złożeniem n przekształceń podobieństwa spośród przekształceń $\varphi_1, \dots, \varphi_N$. Wówczas figura K_n składa się z N^n takich kopii oraz

$$\text{diam}(W_\sigma) = s^n \text{diam}(W_0).$$

W dalszej części dowodu skorzystamy z udowodnionego wcześniej lematu.

Weźmy $a, b \in Z$ takie, że $a \neq b$. Wówczas $d(a, b) > 0$. Z Lematu 3.2.1 wiemy, że istnieje ciąg kopii poziomu n postaci: $W_{\sigma_1}, W_{\sigma_2}, \dots, W_{\sigma_m}$ taki, że $a \in W_{\sigma_1}, b \in W_{\sigma_m}$ oraz $W_{\sigma_k} \cap W_{\sigma_{k+1}} \neq \emptyset$. Dla każdego takiego przekroju weźmy należący do niego punkt:

$$p_k \in W_{\sigma_k} \cap W_{\sigma_{k+1}}.$$

Wówczas z nierówności trójkąta otrzymujemy

$$\begin{aligned} d(a, b) &= |(a - p_1) + (p_1 - p_2) + \dots + (p_{m-2} - p_{m-1}) + (p_{m-1} - b)| \leq \\ &\leq |a - p_1| + |p_1 - p_2| + \dots + |p_{m-2} - p_{m-1}| + |p_{m-1} - b| = \\ &= |a - p_1| + \sum_{k=1}^{m-2} |p_k - p_{k+1}| + |p_{m-1} - b|. \end{aligned}$$

Każdy składnik powyższej sumy jest nie większy niż średnica odpowiedniego zbioru, zatem

$$d(a, b) \leq \sum_{k=1}^m \text{diam}(W_{\sigma_k}) = m s^n \text{diam}(W_0).$$

Wiemy jednak, że $m \leq N^n$, wobec czego uzyskujemy

$$d(a, b) \leq N^n s^n \text{diam}(W_0) = (Ns)^n \text{diam}(W_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Ostatnie przejście wynika z poczynionych na początku dowodu rozważań dotyczących wymiaru fraktalnego mniejszego od 1. Mamy zatem $d(a, b) \leq 0$ oraz $d(a, b) > 0$. Uzyskujemy więc sprzeczność, co świadczy o tym, że jeśli $\dim_F(Z) < 1$, to Z jest figurą niespójną. $\square$

Pokażemy teraz, że z powyższej własności wynika coś silniejszego - fraktal Z jest całkowicie niespójny, co oznacza, że żadne 2 różne punkty nie należą do tej samej komponenty jego spójności.

Własność 3.2.2. *Jeśli $\dim_F(Z) < 1$, to Z jest całkowicie niespójny.*

Dowód. Niech C będzie komponentą fraktala Z . Załóżmy nie wprost, że istnieją punkty $a, b \in C$ takie, że $a \neq b$. Ponieważ C jest komponentą zbioru zwartego, to jest również zbiorem domkniętym i spójnym. Możemy zatem przeprowadzić bardzo podobny argument, jak przed chwilą dla fraktala Z .

Rozważmy kawałki poziomu n postaci $W_\sigma = \varphi_\sigma(W_0)$. Zdefiniujmy następujący zbiór $C_\sigma = C \cap W_\sigma$. Wtedy zbiory C_σ są domknięte i sumują się do zbioru C . Korzystając z argumentów z dowodu Lematu 3.2.1 wiemy, że istnieje ciąg zbiorów poziomu n postaci $C_{\sigma_1}, C_{\sigma_2}, \dots, C_{\sigma_m}$ taki, że $a \in C_{\sigma_1}, b \in C_{\sigma_m}$ oraz $C_{\sigma_k} \cap C_{\sigma_{k+1}} \neq \emptyset$. Przeprowadzając w dalszej części analogiczne rozumowanie, jak dla fraktala Z , otrzymujemy ponownie, że $d(a, b) \leq 0$ oraz $d(a, b) > 0$, co jest sprzecznością. Zatem założenie $a, b \in C$ dla $a \neq b$ okazuje się być fałszywe. $\square$

Własność 3.2.3. *Jeśli $\dim_F(Z) < 1$, to Z jest homeomorficzny ze zbiorem Cantora.*

Dowód. W ramach dowodu przytoczymy pewne twierdzenie znajdujące się w książce *General Topology* autorstwa Stephena Willarda ([1], twierdzenie 3.30):

Twierdzenie 3.2.1. *Każde dwie całkowicie niespójne, doskonałe oraz zwarte przestrzenie metryczne są homeomorficzne.*

W tej samej książce pod dowodem powyższego twierdzenia możemy znaleźć wniosek mówiący o tym, że zbiór Cantora jest przestrzenią metryczną spełniającą warunki twierdzenia. Pokażemy, że fraktal Z o wymiarze fraktalnym mniejszym od 1 również je spełnia.

- Całkowitą niespójność zbioru Z w sytuacji, gdy $\dim_F(Z) < 1$, pokazaliśmy we Własności 3.2.2.
- Doskonałość zbioru Willard w swojej książce definiuje jako jego domkniętość i brak punktów izolowanych. Fraktal Z jest figurą domkniętą jako przekrój domkniętych figur wielokątowych K_n . Natomiast to, że fraktal Z nie posiada punktów izolowanych wynika z udowodnionej Własności 2.5.1.
- Fraktal Z jest przekrojem zbiorów zwartych, więc również jest zwarty.

Na mocy przytoczonego twierdzenia jeśli $\dim_F(Z) < 1$, to fraktal Z jest homeomorficzny ze zbiorem Cantora. $\square$

Uwaga 3.2.1. *Fraktale homeomorficzne ze zbiorem Cantora mogą mieć rozmaite kształty geometryczne, a także rozmaite wymiary fraktalne.*

Uwaga 3.2.2. *Na płaszczyźnie również istnieją fraktale homeomorficzne ze zbiorem Cantora o wymiarach fraktalnych większych niż 1. Ich przykładem są między innymi produkty kartezjańskie zbiorów Cantora opisanych w Przykładzie 1.3.1.*

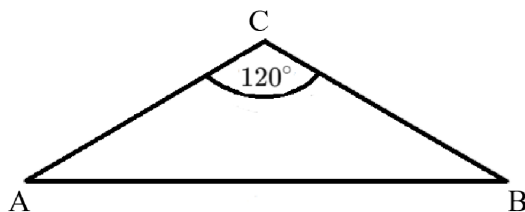
4 Różne rodziny przykładów

W niniejszym rozdziale początkowo wrócimy raz jeszcze do fraktali opisanych w Rozdziale 1, jednak tym razem pokażemy, że są one również wielokątowymi fraktalami ściśle samopodobnymi. W drugiej części tego rozdziału znajdują się przykłady rodzin fraktali, których wymiar fraktalny jest dowolnie bliski 1.

4.1 Krzywa Kocha i zbiór Cantora jako wielokątowe fraktale

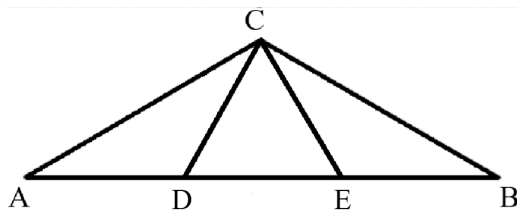
Przyjrzyjmy się raz jeszcze krzywej Kocha, jednak tym razem przedstawimy alternatywny sposób jej konstrukcji.

Niech W_0 będzie trójkątem równoramiennym o kącie między ramionami równym 120° (patrz Rysunek 1).



Rysunek 1: Początkowa figura W_0

Na boku AB wspomnianego trójkąta obierzmy punkty D oraz E w taki sposób, aby $|AD| = |DE| = |EB| = \frac{1}{3}|AB|$ (patrz Rysunek 2). Niech φ_1 będzie złożeniem jednokładności o środku w punkcie A i skali $s = \frac{\sqrt{3}}{3}$ z odbiciem względem dwusiecznej kąta CAB oraz niech φ_2 będzie złożeniem jednokładności o środku w punkcie B i skali $s = \frac{\sqrt{3}}{3}$ z odbiciem względem dwusiecznej kąta ABC . Wówczas $\varphi_1(W_0) = \triangle ADC$, $\varphi_2(W_0) = \triangle BEC$. Figura K_1 to zatem suma trójkątów ADC (W_1) oraz BEC (W_2).



Rysunek 2: Pierwsza iteracja konstrukcji

Powyższą procedurę powtarzamy dla każdego nowo powstałego trójkąta równoramiennego o kątach $120^\circ - 30^\circ - 30^\circ$. Figura $Z = \bigcap_{n=0}^{\infty} K_n$ to krzywa Kocha opisana w Przykładzie 1.2.1. Nie uzasadniamy tego formalnie, ponieważ nasz opis krzywej Kocha w Przykładzie 1.2.1 miał nieco nieformalny charakter. Dopiero ten opis jest formalnym sposobem opisanie krzywej Kocha.

Powstałą w ten sposób krzywą Kocha możemy zapisać jako sumę dwóch składników: $Z_1 = W_1 \cap Z$ oraz $Z_2 = W_2 \cap Z$, czyli

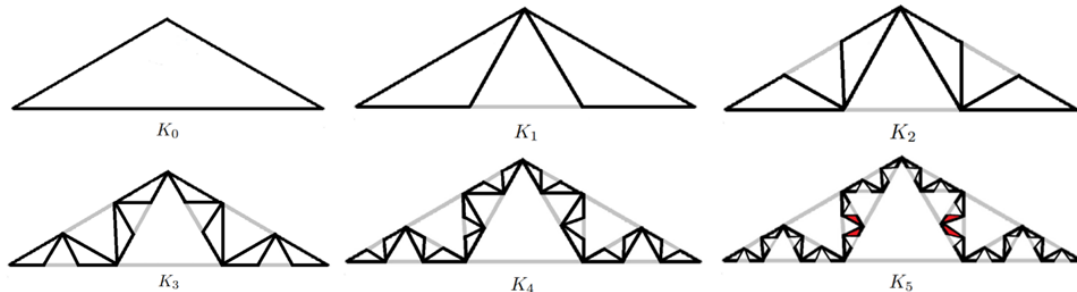
$$Z = Z_1 \cup Z_2.$$

Każdy Z_i jest podobny do końcowego fraktala Z w skali $s = \frac{\sqrt{3}}{3}$, co wynika z tego, że Z_i jest częścią fraktala Z powstającą wewnątrz W_i , a W_i jest podobne do wyjściowego W_0 właśnie w skali $s = \frac{\sqrt{3}}{3} \in (0, 1)$. Ponadto

$$\text{int}_Z(Z_1) \cap \text{int}_Z(Z_2) = \emptyset.$$

Spełnione są zatem własności mówiące o tym, że wielokątowy fraktal ściśle samopodobny jest figurą dającą się zapisać w postaci skończonej sumy, której każdy składnik jest podobny do końcowego fraktala w tej samej skali $s \in (0, 1)$ oraz że każde 2 składniki wspomnianej sumy mają rozłączne wnętrza. Pozostaje zatem sprawdzić warunek mówiący o istnieniu skończonego ciągu przekształceń takiego, że złożenie przekształceń w nim występujących nałożone na figurę W_0 zawiera się

we wnętrzu W_0 . Ten warunek również jest spełniony dla przedstawionego powyżej opisu powstawania krzywej Kocha, jednak jest on spełniony dopiero w 5-tej iteracji powstawania krzywej, co przedstawia Rysunek 3:

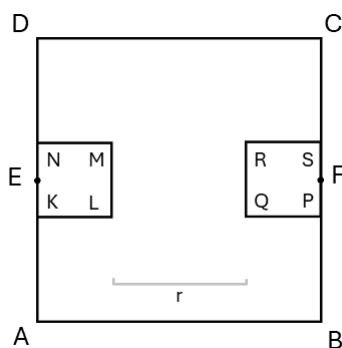


Rysunek 3: Pierwsze 5 iteracji konstrukcji

Kolorem czarnym na powyższym rysunku została oznaczona figura odpowiadająca podpisowi znajdującemu się pod nią. Kolorem szarym natomiast oznaczone są odcinki "znikające" podczas powstawania krzywej Kocha. Kolorem czerwonym na ostatnim rysunku są zaznaczone kopie, które po raz pierwszy w 5-tej iteracji w całości zawierają się we wnętrzu wyjściowego trójkąta równoramiennego.

W powyższym przykładzie pokazaliśmy, jak krzywa Kocha może powstać z figury wielokątowej i w efekcie być interpretowana jako wielokątowny fraktal ściśle samopodobny. Przeprowadzimy teraz podobne rozumowanie dla zbioru Cantora.

Rozważmy jednostkowy kwadrat $ABCD$. Niech punkt E będzie środkiem boku AD , a punkt F będzie środkiem boku BC . Zdefiniujmy przekształcenia podobieństwa - niech φ_1 będzie jednokładnością o środku w punkcie E oraz skali $s = \frac{1-r}{2} \in (0, 1)$, a φ_2 będzie jednokładnością o środku w punkcie F i tej samej skali s , gdzie r oznacza długość usuwanego pasa pomiędzy dwoma nowo powstałymi kwadratami (patrz Rysunek 4).



Rysunek 4: Kwadrat W_0 wraz z pierwszą iteracją

Wówczas $\varphi_1(W_0) = \square KLMN = W_1$ oraz $\varphi_2(W_0) = \square PQRS = W_2$. Figura K_1 to zatem suma dwóch wspomnianych powyżej kwadratów. Powyższą procedurę powtarzamy dla każdego nowo powstałego kwadratu. Figura $Z = \bigcap_{n=0}^{\infty} K_n$ tworzy zbiór Cantora, który został już wcześniej opisany w Przykładzie 1.3.1.

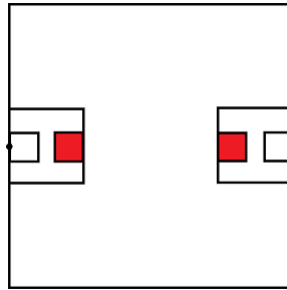
Aby pokazać, że powstały w ten sposób fraktal jest wielokątowym fraktalem ściśle samopodobnym, możemy postępować podobnie jak w przypadku Przykładu 1.3.1. Utworzony tutaj zbiór Cantora możemy zapisać jako sumę dwóch składników: $Z_1 = W_1 \cap Z$ oraz $Z_2 = W_2 \cap Z$, co daje

$$Z = Z_1 \cup Z_2.$$

Każdy Z_i jest podobny do całego fraktala Z w skali $s = \frac{1-r}{2} \in (0, 1)$ - możemy tutaj zastosować podobny argument jak w przypadku krzywej Kocha. Ponadto

$$\text{int}_Z(Z_1) \cap \text{int}_Z(Z_2) = \emptyset.$$

Pozostaje zatem pokazać, że dla tak skonstruowanego zbioru Cantora istnieje ciąg przekształceń podobieństwa taki, że złożenie przekształceń w nim występujących nałożone na początkowy kwadrat W_0 będzie się zawierać we wnętrzu W_0 . Ten warunek również jest spełniony, co przedstawia Rysunek 5.



Rysunek 5: Druga iteracja konstrukcji

Zastanówmy się teraz, jak należałoby zmodyfikować zbiór Cantora, aby jego wymiar fraktalny był dowolnie bliski 1. Z definicji wymiaru fraktalnego mamy:

$$d = \frac{\ln(2)}{\ln\left(\frac{2}{1-r}\right)} \rightarrow 1, \quad r \in \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

Wówczas dla $r \rightarrow 0^+$ mamy

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} d = 1.$$

Zatem im krótszy jest pas usuwany podczas konstrukcji zbioru Cantora, tym wymiar fraktalny jest bliższy 1, osiągając wartości dowolnie bliskie 1.

4.2 Fraktale o wymiarze fraktalnym dowolnie bliskim 1

Znanym powszechnie fraktalem jest dywan Sierpińskiego. Powstaje on z kwadratu, który jest następnie dzielony na 9 mniejszych przystających kwadratów w taki sposób, aby wypełniły one całkowicie wnętrze początkowego kwadratu. Następnie usuwany jest pomniejszony kwadrat znajdujący się na środku, a procedura iteracyjna jest przeprowadzana dla każdego nowo powstałego i nieusuniętego kwadratu. Poniżej przedstawiamy fraktal, o którym można powiedzieć, że jest uogólnieniem dywanu Sierpińskiego.

Niech W_0 będzie prostokątem o wymiarach n oraz $2x+1$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, przy czym n oznacza długość dłuższego boku tego prostokąta. W jego wnętrzu umieszczamy $2n+2$ pomniejszonych przystających prostokątów w sposób przedstawiony na Rysunku 6, a pozostałą część wyjściowego prostokąta usuwamy. Nieusunięte pomniejszone prostokąty to kopie pierwszej iteracji konstrukcji, czyli figury $W_1, \dots, W_{2n+2}$. Proces ten powtarzamy dla każdego nowo powstałego i nieusuniętego prostokąta. Aby mówić o wielokątowym fraktale ściśle samopodobnym każdy z pomniejszonych prostokątów $W_1, \dots, W_{2n+2}$ musi być podobny do wyjściowego prostokąta W_0 w tej samej skali s . Przyjmijmy, że długość dłuższego boku pomniejszonego prostokąta jest równa 1, a długość krótszego boku tego prostokąta wynosi x . Wówczas z podobieństwa prostokątów wynika, następująca zależność:

$$\frac{1}{n} = \frac{x}{2x+1},$$

co po przekształceniach daje:

$$2x+1 = nx,$$

$$x(n-2) = 1,$$

$$x = \frac{1}{n-2}.$$

Skala podobieństwa s pojedynczego pomniejszonego prostokąta do wyjściowego prostokąta W_0 jest równa $\frac{1}{n}$.



Rysunek 6: Prostokąt W_0 wraz z pierwszą iteracją

Sprawdzenie, że powstała w ten sposób figura jest istotnie wielokątowym fraktalem ściśle samopodobnym w myśl Definicji 1.4.2 pozostawiamy czytelnikowi.

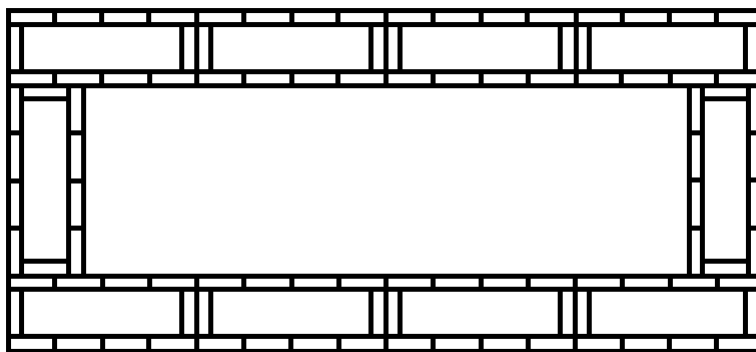
Sprawdźmy, jak zmienia się wymiar fraktalny powstałego dywanu wraz ze wzrostem n . Mamy $2n+2$ części fraktala (zatem $N = 2n+2$), z których każda jest podobna do końcowego fraktala w skali $s = \frac{1}{n}$, wobec czego wymiar fraktalny jest równy:

$$d = \frac{\ln(2n+2)}{\ln(n)}.$$

Przechodząc z n do nieskończoności otrzymujemy:

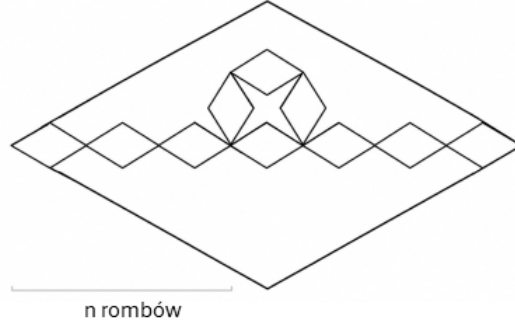
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(2n+2)}{\ln(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(2) + \ln(n+1)}{\ln(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln(2)}{\ln(n)} + \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \right) = 0 + 1 = 1.$$

Otrzymujemy zatem rodzinę wielokątowych fraktali ściśle samopodobnych, których wymiar fraktalny dąży do 1 wraz ze wzrostem n , zaś każdy z tych fraktali przypomina w pewien sposób dywan Sierpińskiego, co przedstawia poniższy rysunek.



Rysunek 7: Druga iteracja konstrukcji

Kolejnym przykładem fraktala, jaki chcemy omówić, jest fraktal utworzony z rombów niebędących kwadratami. Niech W_0 będzie rombem, który nie jest kwadratem. Wzdłuż jego dłuższej przekątnej umieszczamy $2n+1$, $n \in \mathbb{N}$ pomniejszych rombów w taki sposób, że stykają się one wierzchołkami. Każdy z nich jest podobny do dużego rombu w skali $s = \frac{1}{2n+1}$. Na środkowym z $2n+1$ rombów tworzymy ich cykl w taki sposób, że ich dłuższe przekątne tworzą kwadrat. Opisaną konstrukcję przedstawia Rysunek 8.



Rysunek 8: Romb W_0 wraz z pierwszą iteracją

Każdy pomniejszony romb z powyższego rysunku znajdujący się wewnątrz W_0 jest kopią pierwszej iteracji konstrukcji. Oznaczmy je zatem $W_1, \dots, W_{2n+4}$. Powyższą procedurę tworzenia fraktala powtarzamy wewnątrz każdego W_i oraz - w dalszych krokach konstrukcji - wewnątrz każdego nowo powstałego rombu.

Łatwo sprawdzić, że utworzony w ten sposób fraktal jest wielokątowym fraktalem ściśle samopodobnym w myśl Definicji 1.4.2.

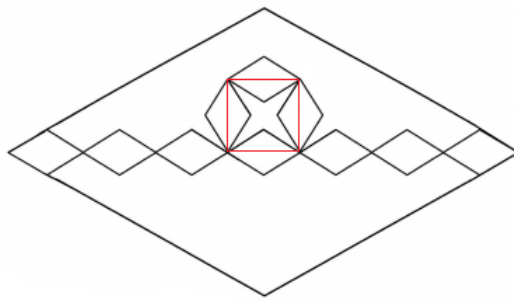
Sprawdźmy, jak zmienia się wymiar fraktalny powyższej figury wraz ze wzrostem liczby rombów umieszczonych wzdłuż dłuższej przekątnej wyjściowego rombu W_0 . Mamy $2n + 4$ części fraktala (zatem $N = 2n + 4$), z których każda jest podobna do końcowej figury w skali $s = \frac{1}{2n+1}$, wobec czego wymiar fraktalny wynosi

$$d = \frac{\ln(2n + 4)}{\ln(2n + 1)}.$$

Przejdźmy do granicy. Otrzymujemy wówczas:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(2n + 4)}{\ln(2n + 1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{2n+4}}{\frac{2}{2n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 1}{2n + 4} = 1.$$

Dostajemy zatem rodzinę wielokątowych fraktali ściśle samopodobnych, których wymiar fraktalny dąży do 1. Rodzina ta jest o tyle interesująca, że zawiera cykl w postaci kwadratowej łamanej zamkniętej jak na Rysunku 9 (jest on zaznaczony czerwonym kolorem). Tworzą go dłuższe przekątne rombów z cyklu opisanego już w pierwszej iteracji konstrukcji fraktala. W każdej dalszej iteracji cykl ten jest zachowany, a więc jest zawarty w tym fraktalu.



Rysunek 9: Cykl znajdujący się we fraktalu

Podsumowanie:

Wielokątowe fraktale ściśle samopodobne są interesującą grupą obiektów geometrycznych nie tylko ze względu na swoją złożoną strukturę, ale także ze względu na mnogość własności wynikających z ich iteracyjnej konstrukcji. Związany z nimi wymiar fraktalny niekoniecznie zawsze przyjmuje całkowite wartości, a jego analiza pomaga w odzwierciedleniu stopnia, w jakim dany fraktal zajmuje przestrzeń. Mamy nadzieję, że przedstawione w tej pracy zagadnienia przyczynią się do jeszcze dogłębszego zbadania tematyki wielokątowych fraktali ściśle samopodobnych w przyszłości.

Bibliografia

- [1] Stephen Willard. *General Topology*. Addison-Wesley, 1970.
- [2] Benoit B. Mandelbort. *The Fractal Geometry of Nature*. W. H. Freeman i Company, 1982.
- [3] Michael Barnsley. *Fractals Everywhere*. Academic Press, 1988.
- [4] Kenneth Falconer. *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications. Second Edition*. John Wiley and Sons, 2003.
- [5] P.M. Fitzpatrick H.L. Royden. *Real Analysis. Fourth Edition*. Prentice Hall (Pearson Education), 2010.