

Uniwersytet Wrocławski
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyczny
specjalność: Matematyka nauczycielska

Magdalena Morawiec, Aurelia Dratwiak

Równoważność definicji funkcji
trygonometrycznych na zbiorze $\mathbb{R}$ oraz ich
konsekwencje analityczne

Praca projektowa w ramach zajęć
"Zespołowy Projekt Specjalnościowy"

napisana pod kierunkiem
prof. dr hab. Jacka Świątkowskiego

Wrocław 2026

Spis treści

1	Wstęp	4
2	Definicja geometryczna funkcji trygonometrycznych – od intuicji do okręgu jednostkowego	5
2.1	Podejście elementarne (trójkąt prostokątny)	5
2.2	Rozszerzenie na okrąg jednostkowy	6
2.3	Problem „błędnego koła”	6
3	Definicja funkcji trygonometrycznych przez szeregi potęgowe – podejście analityczne	8
3.1	Geneza i intuicja	9
3.2	Rozwiązanie problemów geometrycznych	9
4	Definicja funkcji trygonometrycznych przez równania różniczkowe	10
4.1	Istnienie, jednoznaczność i dziedzina rozwiązań	10
5	Dowód równoważności definicji funkcji trygonometrycznych	12
5.1	Od szeregów potęgowych do równań różniczkowych	12
5.1.1	Podstawy analityczne szeregów trygonometrycznych . . .	12
5.1.2	Dowód równoważności	13
5.2	Od równań różniczkowych do geometrii (Twierdzenie o Jedynce Trygonometrycznej)	14
5.2.1	Dowód krok po kroku	15
5.2.2	Weryfikacja parametryzacji ruchu	16
5.3	Od geometrii do szeregów potęgowych	16
5.3.1	Klasyczna ścieżka analityczna: Wzór Taylora	16
5.3.2	Ewoluta krzywej – definicje i właściwości	17
5.3.3	Dowód równoważności - wiatraczek Chaikovsky’ego	18
6	Podsumowanie	22
6.1	Interpretacja i znaczenie podejścia geometrycznego	22
6.2	Interpretacja i znaczenie podejścia analitycznego	22
6.3	Interpretacja i znaczenie podejścia przez równania różniczkowe .	23

Rozdział 1

Wstęp

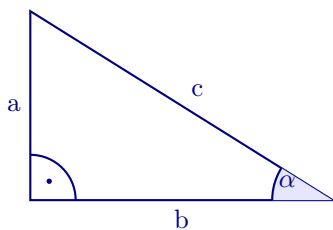
W niniejszej pracy opisane zostały definicje funkcji trygonometrycznych na zbiorze liczb rzeczywistych poprzez trzy różne podejścia matematyczne, a następnie przedstawiona została równoważność powyższych definicji. Poznane w szkole średniej funkcje $\sin(x)$ i $\cos(x)$ intuicyjnie kojarzone są z kątami w trójkącie prostokątnym, natomiast mogą one również być definiowane geometrycznie (patrz Rozdział 2), poprzez szeregi potęgowe oraz przy pomocy równań różniczkowych. Funkcje trygonometryczne w starożytności używane były jako proste narzędzia geometryczne, natomiast obecnie mają również zastosowanie we współczesnej analizie, co umożliwiło stosowanie trygonometrii w teorii liczb rzeczywistych oraz zespolonych. Warto również zaznaczyć, że funkcje te mają kluczowe znaczenie nie tylko w matematyce, ale również w pewnych dziedzinach fizyki, czy inżynierii. Głównym celem poniższej pracy jest wykazanie pełnej równoważności trzech klasycznych definicji funkcji $\sin(x)$ i $\cos(x)$ na zbiorze $\mathbb{R}$ oraz analiza konsekwencji tego faktu. Praca zawiera trzy zasadnicze aspekty: po pierwsze dokonana została precyzyjna konstrukcja funkcji trygonometrycznych poprzez przedstawienie trzech niezależnych definicji, po drugie, przeprowadzony został dowód ich równoważności, po trzecie została przeprowadzona analiza pragmatycznego znaczenia wielości definicji.

Rozdział 2

Definicja geometryczna funkcji trygonometrycznych – od intuicji do okręgu jednostkowego

2.1 Podejście elementarne (trójkąt prostokątny)

Pierwszą w historii definicją funkcji trygonometrycznych było ujęcie oparte na stosunkach boków trójkąta prostokątnego.



Rysunek 1.

Dla kąta α definiuje się:

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c}, \quad \cos(\alpha) = \frac{b}{c},$$

gdzie a to przyprostokątna naprzeciwko kąta α , b to przyprostokątna przy kącie α , a c to przeciwprostokątna (patrz Rysunek 1).

Powyższa definicja była użyteczna w geodezji, czy architekturze, natomiast z punktu widzenia analizy matematycznej jest ona niewystarczająca. Definicja ta ogranicza dziedzinę do kątów należących do przedziału $(0, \frac{\pi}{2})$ i nie pozwala traktować argumentu jako dowolnej liczby rzeczywistej.

2.2 Rozszerzenie na okrąg jednostkowy

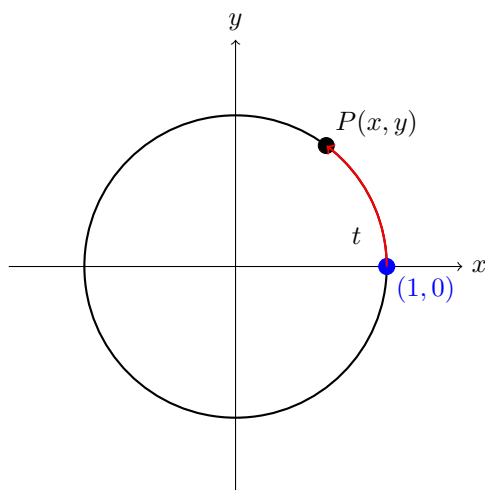
W celu rozszerzenia definicji funkcji trygonometrycznych poza kontekst trójkąta prostokątnego, rozważa się okrąg jednostkowy w $\mathbb{R}^2$ o równaniu:

$$x^2 + y^2 = 1$$

Dla punktu $P(x, y)$ na okręgu i argumentu t mierzonego jako **długość łuku** od punktu $(1, 0)$ do punktu P w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara (patrz Rysunek 2), określa się wartość funkcji trygonometrycznych jako:

$$\cos(t) = x, \quad \sin(t) = y$$

Dzięki tak zdefiniowanemu parametrowi t , interpretowanemu jako długość skierowanego łuku na okręgu jednostkowym (gdzie $t = 0$ odpowiada punktowi $(1, 0)$), funkcje sinus i cosinus można określić dla każdej liczby rzeczywistej. Dla $t > 2\pi$ punkt wykonuje kolejne obroty po okręgu i funkcje przyjmują te same wartości równe poszczególnym współrzędnym, natomiast dla $t < 0$ porusza się po okręgu w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara. W konsekwencji wartości funkcji sinus i cosinus powtarzają się co 2π , czyli funkcje te są okresowe z okresem 2π , a ich dziedziną jest cały zbiór $\mathbb{R}$.



Rysunek 2.

2.3 Problem „błędnego koła”

Choć definicja geometryczna odwołująca się do długości łuku jest intuicyjnie wyczerpująca, nie spełnia kryteriów pełnej ścisłości matematycznej. Ścisła długość łuku wymaga całki oznaczonej, co w przypadku okręgu wymaga znajomości pochodnych funkcji kwadratowych, a ostatecznie – pochodnych samych funkcji trygonometrycznych.

Rozważmy równanie okręgu jednostkowego $x^2 + y^2 = 1$. Wyznaczając z niego funkcję górnego półokręgu, otrzymujemy $y = \sqrt{1 - x^2}$. Długość łuku s (czyli kąt w mierze łukowej) jest zdefiniowana jako całka:

$$s(x) = \int_0^x \sqrt{1 + (y')^2} dt$$

Obliczając pochodną $y' = \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}$, otrzymujemy:

$$s(x) = \int_0^x \sqrt{1 + \frac{t^2}{1-t^2}} dt = \int_0^x \sqrt{\frac{1-t^2+t^2}{1-t^2}} dt = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

Z analizy matematycznej wiemy, że pierwotną tej funkcji jest $\arcsin(x)$, czyli:

$$s(x) = \arcsin(x) \quad \Rightarrow \quad x = \sin(s)$$

Tutaj właśnie ujawnia się *circulus vitiosus* (błędne koło): aby obliczyć tę całkę, musimy korzystać z definicji funkcji odwrotnej do sinusa ($\arcsin$). Jednakże, aby zdefiniować funkcję sinus jako relację między długością łuku s , a współrzędną x , musimy najpierw wiedzieć, czym ona jest. Definiując funkcję przez geometrię, zakładamy istnienie obiektu, którego właściwości (jak pochodna czy wartość całki) dopiero próbujemy wyprowadzić.

W związku z tym to logiczne ograniczenie stało się motywacją dla konstrukcji arytmetycznych niezależnych od geometrii, stosowanych m.in. przez Eulera i Weierstrassa.

Rozdział 3

Definicja funkcji trygonometrycznych przez szeregi potęgowe – podejście analityczne

Podejście analityczne: Szeregi potęgowe i promień zbieżności

Podejście analityczne do definiowania funkcji trygonometrycznych różni się zasadniczo od ujęcia geometrycznego. W tym nurcie funkcje sinus i cosinus definiujemy bezpośrednio jako szeregi potęgowe dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}. \quad (3.1)$$

Aby wykazać, że powyższe definicje mają sens dla każdego x na prostej rzeczywistej, należy wyznaczyć promień zbieżności R dla obydwu powyższych szeregów. Korzystając z kryterium d'Alemberta dla wyrazów szeregu funkcji sinus $c_n(x) = \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, otrzymujemy:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}(x)}{c_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} \cdot \frac{(2n+1)!}{x^{2n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(2n+3)(2n+2)} = 0.$$

Ponieważ granica $L = 0$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$, promień zbieżności szeregu wynosi $R = \infty$. Analogiczny wynik otrzymujemy dla funkcji cosinus. Oznacza to, że oba szeregi są zbieżne na całej prostej rzeczywistej, co implikuje, że definiowane przez nie funkcje są określone wszędzie i należą do klasy gładkości C^∞ .

3.1 Geneza i intuicja

Szeregi te wynikają z rozwinięcia funkcji $\sin$ i $\cos$ w szereg Maclaurina wokół punktu $x = 0$. Aby stworzyć funkcję zachowującą właściwości sinusa, szukamy wielomianu nieskończonego stopnia:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots,$$

spełniającego warunki:

1. $f(0) = \sin(0) = 0$,
2. $f'(0) = \sin'(0) = \cos(0) = 1$,
3. $f''(0) = \sin''(0) = -\sin(0) = 0$,
4. pochodne cyklicznie powtarzają się według wzoru $0, 1, 0, -1, \dots$.

Podstawiając kolejne pochodne w ogólny wzór Taylora, otrzymujemy klasyczne szeregi dla $\sin(x)$ i $\cos(x)$.

W tym ujęciu funkcje trygonometryczne można postrzegać jako ściśle powiązane z funkcją wykładniczą:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

co jest źródłem wzoru Eulera i umożliwia obliczenia z liczbami zespolonymi, np. $\sin(i)$.

3.2 Rozwiązanie problemów geometrycznych

Analityczna definicja funkcji trygonometrycznych jest najczęściej stosowana w matematyce ze względu na następujące zalety:

- **Brak błędnego koła:** Nie potrzebujemy znać π ani długości łuku, aby zdefiniować szereg. Można np. zdefiniować π jako dwukrotność pierwszego dodatniego miejsca zerowego $\cos(x)$.
- **Natychmiastowa zbieżność:** Szeregi są zbieżne dla każdego $x \in \mathbb{R}$, co umożliwia ścisłe dowody ciągłości i różniczkowalności.
- **Aproksymacja:** W praktyce inżynierskiej używa się pierwszych kilku wyrazów. Dla małych kątów:

$$\sin(x) \approx x, \quad \cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2}.$$

To tłumaczy np. znane przybliżenie małych drgań wahadła w fizyce.

Rozdział 4

Definicja funkcji trygonometrycznych przez równania różniczkowe

Funkcje trygonometryczne można zdefiniować jako jedyne rozwiązania równania różniczkowego:

$$y''(x) + y(x) = 0, \quad (4.1)$$

przy warunkach początkowych:

- dla funkcji sinus: $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$,
- dla funkcji cosinus: $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

4.1 Istnienie, jednoznaczność i dziedzina rozwiązań

Aby wykazać, że rozwiązania powyższego zagadnienia początkowego istnieją, są jednoznaczne oraz określone na całej prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$, sprowadzamy równanie drugiego rzędu do układu równań różniczkowych pierwszego rzędu. Wprowadzając nową zmienną $z(x) = y'(x)$, otrzymujemy układ:

$$\begin{cases} y'(x) = z(x) \\ z'(x) = -y(x) \end{cases}$$

Możemy go zapisać w postaci macierzowej jako:

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie takiego układu z warunkami początkowymi $y(0) = y_0$ oraz $z(0) = z_0$ jest zadane przez macierzową funkcję wykładniczą (eksponentę macierzy):

$$\begin{pmatrix} y(x) \\ z(x) \end{pmatrix} = e^{x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

gdzie e^{xA} to macierzowa funkcja wykładnicza (o wykładnikach macierzowych), zdefiniowana za pomocą wszędzie zbieżnego szeregu potęgowego patrz [5].

Na mocy ogólnego twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności dla liniowych układów równań różniczkowych (twierdzenie Picarda-Lindelöfa), rozwiązanie to jest jedyne i jest określone dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Stąd pierwsze współrzędne $y(x)$ tego rozwiązania (odpowiadające odpowiednio funkcjom sinus i cosinus przy zadanych warunkach początkowych) są jednoznacznie określone na całym zbiorze $\mathbb{R}$.

Wniosek: Funkcje $\sin(x)$ i $\cos(x)$ są jedynymi, globalnie określonymi rozwiązaniami tych równań różniczkowych z określonymi warunkami początkowymi, co czyni tę definicję w pełni poprawną i jednoznaczną.

Rozdział 5

Dowód równoważności definicji funkcji trygonometrycznych

W poprzednich rozdziałach zostało pokazane, że funkcje trygonometryczne można zdefiniować na trzy różne sposoby: geometrycznie (patrz Rozdział 2), analitycznie (patrz Rozdział 3) oraz poprzez równania różniczkowe (patrz Rozdział 4).

Celem poniższego rozdziału jest wykazanie, że wszystkie te definicje dają ten sam obiekt matematyczny.

5.1 Od szeregów potęgowych do równań różniczkowych

Niech funkcja sinus zdefiniowana będzie poprzez szereg potęgowy:

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \quad (5.1)$$

Rozpiszmy kilka początkowych wyrazów:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

5.1.1 Podstawy analityczne szeregów trygonometrycznych

Aby operacje na szeregach potęgowych były rygorystyczne, musimy uzasadnić możliwość ich różniczkowania wyraz po wyrazie.

Kryterium Weierstrassa i jednostajna zbieżność

Zgodnie z twierdzeniem o różniczkowaniu szeregów funkcyjnych, operacja różniczkowania wyraz po wyrazie jest w pełni dopuszczalna na danym przedziale, jeśli sam szereg wyjściowy jest zbieżny w co najmniej jednym punkcie, a szereg jego pochodnych wykazuje **zbieżność jednostajną**. Aby to wykazać, zastosujemy **kryterium Weierstrassa** (bezpośrednio do szeregu pochodnych) mówiące o tym, że szereg funkcyjny $\sum g_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie na zbiorze A , jeśli istnieje ciąg liczbowy M_n o wyrazach dodatnich taki, że $|g_n(x)| \leq M_n$ dla wszystkich $x \in A$ oraz szereg liczbowy $\sum M_n$ jest zbieżny.

Oznaczmy wyraz ogólny szeregu wyjściowego jako $f_n(x) = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Formalna pochodna tego wyrazu względem zmiennej x ma postać:

$$f'_n(x) = (-1)^n \frac{(2n+1)x^{2n}}{(2n+1)!} = (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Badając zbieżność jednostajną szeregu pochodnych $\sum f'_n(x)$ na dowolnym przedziale domkniętym $[-M, M]$, moduł jego wyrazu ogólnego szacujemy przez:

$$|f'_n(x)| = \left| \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \right| \leq \frac{M^{2n}}{(2n)!} = M_n.$$

Zbieżność powstałego szeregu liczbowego $\sum M_n = \sum \frac{M^{2n}}{(2n)!}$ sprawdzamy za pomocą kryterium d'Alemberta:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_{n+1}}{M_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{M^{2n+2}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{M^{2n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M^2}{(2n+1)(2n+2)} = 0 < 1.$$

Ponieważ szereg $\sum M_n$ jest zbieżny, na mocy kryterium Weierstrassa szereg pochodnych $\sum f'_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie na każdym przedziale ograniczonym. Z uwagi na to, że wyjściowy szereg $\sin(x)$ jest zbieżny (np. dla $x = 0$), spełnione są wszystkie kryteria formalne, co w pełni legitymizuje różniczkowanie wyraz po wyrazie (analogiczne sprawdzenie zachodzi dla drugiej pochodnej).

Dysponując dowodem jednostajnej zbieżności szeregów pochodnych, możemy formalnie wykazać równoważność definicji analitycznej oraz definicji przez równania różniczkowe.

5.1.2 Dowód równoważności

Różniczkujemy każdy wyraz szeregu:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \dots + (-1)^n \frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)!} + \dots \right) &= 1 - \frac{3x^2}{6} + \frac{5x^4}{120} - \frac{7x^6}{5040} + \dots \\ &\quad + (-1)^n \frac{(2n+1)x^{2n}}{(2n+1)!} + \dots \end{aligned}$$

Upraszczając współczynniki:

$$\sin'(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

Rozpoznajemy w tym dokładnie rozwinięcie szeregu potęgowego cosinusa:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

Różniczkujemy ponownie:

$$\begin{aligned} \sin''(x) &= \frac{d}{dx} \sin'(x) = 0 - x + \frac{4x^3}{24} - \frac{6x^5}{720} + \dots + (-1)^n \frac{2nx^{(2n-1)}}{(2n)!} + \dots \\ &= -x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} + \dots + (-1)^n \frac{x^{(2n-1)}}{(2n-1)!} + \dots \end{aligned}$$

Zauważamy, że:

$$\sin''(x) = - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{(2n-1)}}{(2n-1)!} + \dots \right) = -\sin(x)$$

Otrzymaliśmy równanie różniczkowe:

$$\sin''(x) + \sin(x) = 0$$

oraz wartości początkowe:

$$\sin(0) = 0, \quad \sin'(0) = 1$$

co dokładnie zgadza się z definicją $\sin(x)$ z Rozdziału 4.

Analogicznie dla $\cos(x)$:

$$\cos''(x) + \cos(x) = 0, \quad \cos(0) = 1, \quad \cos'(0) = 0.$$

Dowód pokazuje, że szereg potęgowy sinusa i cosinusa jest tym samym obiektem, który spełnia równanie różniczkowe z Rozdziału 4.

5.2 Od równań różniczkowych do geometrii (Twierdzenie o Jedynce Trygonometrycznej)

Cel: Pokazać, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ punkt $(\sin(x), \cos(x))$ jest punktem na okręgu jednostkowym powstałym przez odłożenie na okręgu, zaczynając od punktu $(1, 0)$, długości łukowej x .

Założmy, że funkcje $\sin(x)$ i $\cos(x)$ są zdefiniowane jako jedyne rozwiązania równania

$$y'' + y = 0$$

z warunkami początkowymi:

$$\sin(0) = 0, \quad \sin'(0) = 1, \quad \cos(0) = 1, \quad \cos'(0) = 0.$$

Etap pierwszy: Pokazać, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi zależność $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, co oznacza, że punkt $(\cos(x), \sin(x))$ zawsze leży na okręgu jednostkowym.

5.2.1 Dowód krok po kroku

1. Zdefiniujmy funkcję pomocniczą

$$f(x) = \sin^2(x) + \cos^2(x).$$

2. Obliczamy pochodną $f'(x)$, stosując regułę łańcuchową:

$$f'(x) = 2\sin(x)\sin'(x) + 2\cos(x)\cos'(x) = 2(\sin(x)\sin'(x) + \cos(x)\cos'(x)).$$

3. Z równań różniczkowych wiemy:

Lemat 1. Jeśli $\sin(x)$ i $\cos(x)$ są rozwiązaniami równań różniczkowych z Rozdziału 4, to

$$\sin'(x) = \cos(x), \quad \cos'(x) = -\sin(x).$$

Dowód. Z równań różniczkowych z Rozdziału 4 mamy:

$$\sin''(x) = -\sin(x), \quad \cos''(x) = -\cos(x).$$

Obie funkcje spełniają warunki początkowe:

$$\sin(0) = 0, \quad \sin'(0) = 1, \quad \cos(0) = 1, \quad \cos'(0) = 0.$$

Z jednoznaczności rozwiązania problemu Cauchy'ego wynika:

$$\sin'(x) = \cos(x), \quad \cos'(x) = -\sin(x).$$

□

4. Podstawiamy do wzoru na $f'(x)$:

$$f'(x) = 2(\sin(x)\cos(x) + \cos(x)(-\sin(x))) = 2(\sin(x)\cos(x) - \sin(x)\cos(x)) = 0.$$

5. Skoro $f'(x) = 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, funkcja $f(x)$ jest stała:

$$f(x) = \text{const.}$$

6. Wyznaczamy tę stałą, podstawiając $x = 0$:

$$f(0) = \sin^2(0) + \cos^2(0) = 0^2 + 1^2 = 1.$$

Zatem dla każdego $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1}.$$

5.2.2 Weryfikacja parametryzacji ruchu

W definicji geometrycznej kluczowe jest założenie, że argument t odpowiada długości łuku. Aby dowód był pełny, musimy wykazać, że punkt $P(t) = (\cos t, \sin t)$ porusza się po okręgu ze stałą jednostkową prędkością liniową. Pozwoli to wykluczyć niepożądane wahania tempa ruchu wzdłuż krzywej.

Fakt 1 (O ruchu jednostajnym). *Niech $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie krzywą zadaną parametrycznie wzorem $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$. Wówczas dla każdego $t \in \mathbb{R}$ długość wektora prędkości (norma prędkości) jest stała i równa 1.*

Dowód. Obliczmy wektor prędkości $\gamma'(t)$ poprzez różniczkowanie składowych względem parametru t :

$$\gamma'(t) = \frac{d}{dt}(\cos t, \sin t) = (-\sin t, \cos t).$$

Długość tego wektora, zgodnie z definicją normy euklidesowej w $\mathbb{R}^2$, wynosi:

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}.$$

Korzystając z poprzedniego podrozdziału $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, otrzymujemy:

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{1} = 1.$$

□

Stała wartość $|\gamma'(t)| = 1$ (prędkość jednostajna) oznacza, że w dowolnym przedziale czasu o długości Δt , punkt P przebywa drogę o długości dokładnie Δt . Parametryzacja ta jest zatem tzw. **parametryzacją naturalną** (łukową). Gwarantuje ona, że ruch odbywa się ze stałym tempem „do przodu” wzdłuż okręgu, co jest warunkiem koniecznym.

Podsumowanie równoważności:

Powyższe obliczenia ostatecznie domykają dowód równoważności obu podejść. Wykazaliśmy, że punkt startuje z położenia $(1, 0)$, porusza się po okręgu jednostkowym ($\sin^2 t + \cos^2 t = 1$), a długość przebytej przez niego drogi odpowiada dokładnie parametrowi t . Ponieważ w definicji geometrycznej współrzędne punktu na okręgu są wyznaczane właśnie przez długość łuku mierzoną od punktu $(1, 0)$, obie te konstrukcje są matematycznie tożsame. To dowodzi, że definicja różniczkowa i geometryczna dają dokładnie ten sam obiekt matematyczny.

5.3 Od geometrii do szeregów potęgowych

5.3.1 Klasyczna ścieżka analityczna: Wzór Taylora

W klasycznym ujęciu, aby wykazać spójność geometrii z przyjętą w Rozdziale 3 definicją analityczną, wykorzystuje się wzór Taylora. Zakładając poprawność definicji geometrycznej (patrz [1]), otrzymujemy pochodne $(\sin x)' = \cos x$ oraz

$(\cos x)' = -\sin x$ (wraz z wartościami w 0). Rozwijając te funkcje w szereg Maclaurina zgodnie ze wzorem:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n,$$

bezpośrednio odtwarzamy szeregi potęgowe wprowadzone w Rozdziale 3. Dowodzi to równoważności obu podejść, co usuwa problem *błędnego koła* i pozwala przejść od intuicji geometrycznej do rygoru analitycznego.

5.3.2 Ewoluta krzywej – definicje i właściwości

W tym podrozdziale przedstawimy inny, mniej klasyczny dowód równoważności definicji za pomocą szeregów oraz definicji geometrycznej. Zanim przejdziemy do głównej konstrukcji geometrycznej, konieczne jest zdefiniowanie pojęcia ewoluty oraz przytoczenie faktów, które pozwalają na iteracyjne obliczanie długości kolejnych ewolut.

Formalizm matematyczny

Rozważmy gładką krzywą płaską $\gamma : [0, \theta] \rightarrow \mathbb{R}^2$. Wprowadźmy następujące funkcje opisujące jej geometrię:

- **Funkcja prędkości** $v_\gamma(t) = |\gamma'(t)|$, określająca tempo poruszania się wzdłuż krzywej.
- **Funkcja kąta** $\theta_\gamma(t) : [0, \theta] \rightarrow \mathbb{R}$, określająca kierunek wektora stycznego do krzywej w chwili t , jako zorientowany kąt względem wektora osi OX.
- **Funkcja przebytej drogi** $d_\gamma(t)$, zdefiniowana jako całka z prędkości:

$$d_\gamma(t) = \int_0^t v_\gamma(s) ds.$$

Ewolutą $e(t)$ krzywej $\gamma(t)$ nazywamy krzywą zdefiniowaną wzorem:

$$e(t) = \gamma(t) - d_\gamma(t) \cdot (\cos \theta_\gamma(t), \sin \theta_\gamma(t)).$$

Geometrycznie ewoluta odpowiada torowi końca napiętej nici rozwijanej z danej krzywej (patrz Rysunek 5.1 strona 19).

Kluczowe fakty dotyczące ewolut

Na podstawie analizy różniczkowej (różniczkując wzór na $e(t)$ względem czasu) można wyprowadzić dwa kluczowe fakty, które stanowią fundament naszej metody rekurencyjnej:

Fakt 2. Prędkość ewoluty $v_e(t)$ zależy od przebytej drogi krzywej bazowej w przedziale czasowym $[0, t]$ oraz tempa zmiany pochodnej jej kąta nachylenia:

$$v_e(t) = d_\gamma(t) \cdot |\theta'_\gamma(t)|.$$

Fakt 3. Funkcja kąta ewoluty $\theta_e(t)$ różni się od funkcji kąta krzywej bazowej o kąt prosty:

$$\theta_e(t) = \begin{cases} \theta_\gamma(t) + \frac{\pi}{2}, & \text{gdy } \theta'_\gamma(t) < 0 \\ \theta_\gamma(t) - \frac{\pi}{2}, & \text{gdy } \theta'_\gamma(t) > 0 \end{cases}$$

Oprócz tego, jeśli $\theta'_\gamma(t) = 0$, to wektor styczny do ewoluty ($e'(t)$) jest zerowy, więc nie ma kierunku.

Rekurencja ewolutowa w konstrukcji szeregów

Zastosowanie powyższych faktów do ciągu krzywych (γ_n) , gdzie każda kolejna krzywa γ_{n+1} jest ewolutą krzywej γ_n , pozwala na zbudowanie zależności rekurencyjnej bez konieczności każdorazowego wyznaczania pełnych równań parametrycznych kolejnych ewolut. Warto podkreślić, że przedstawione poniżej wyliczenia długości kolejnych ewolut mają charakter oryginalny i zostały przeprowadzone według autorskiego pomysłu zaproponowanego przez opiekuna projektu.

Dla naszej konstrukcji przyjmujemy warunki początkowe oparte na łuku kołowym γ_0 . Przyjmujemy, że γ_0 reprezentuje ruch po okręgu jednostkowym od punktu $P = (\cos \theta, \sin \theta)$ w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara, ze stałą prędkością jednostkową, w czasie θ aż do punktu końcowego $(1, 0)$. Stąd wynikają następujące parametry:

- $v_0(t) = 1$ (stała prędkość na okręgu jednostkowym),
- $\theta_0(t) = \alpha - \frac{\pi}{2} - t$,
- $d_0(t) = t$.

Wtedy dla każdej kolejnej ewoluty γ_{n+1} otrzymujemy zależność:

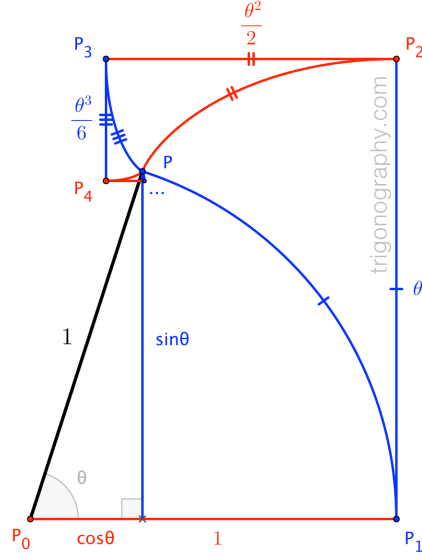
$$v_{n+1}(t) = d_n(t) \cdot |\theta'_n(t)|.$$

Ponieważ w każdym kroku zachodzi $\theta'_n(t) = -1$, prędkość kolejnej ewoluty staje się bezpośrednio drogą przebytą przez jej poprzedniczkę. To właśnie ta zależność „całkująca” generuje kolejne silnie $(n!)$ w mianownikach, co prowadzi bezpośrednio do uzyskania struktury szeregu potęgowego.

5.3.3 Dowód równoważności - wiatraczek Chaikovsky’ego

Konstrukcja Chaikovsky’ego opiera się na iteracyjnym procesie tworzenia ewolut, który w sposób naturalny generuje kolejne wyrazy szeregów Taylora. Zdefiniujemy ciąg krzywych $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$, gdzie γ_0 jest łukiem kołowym, a każda kolejna krzywa γ_{n+1} jest ewolutą poprzedniej.

Geometryczna geneza szeregu



Rysunek 5.1: Wiatraczek ewolut Chaikovsky

Konstrukcja „wiatraczka” (patrz Rysunek 5.1 (źródło: pozycja [3] z bibliografii)) polega na tym, że wektory wodzące kolejnych ewolut są ustawione względem siebie pod kątem prostym (zgodnie z Faktem 2). Zauważmy, że kąt nachylenia n -tej ewoluty wynosi:

$$\theta_n(t) = \theta_0(t) + n \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Współrzędne końca n -tej ewoluty są sumą wektorową prostopadłych do siebie odcinków długości kolejnych krzywych. Rzutując te prostopadłe względem siebie odcinki na osie układu współrzędnych, otrzymujemy:

- składowa y (sinusoidalna): składowa y punktu P , odpowiadająca wartości $\sin\theta$, jest sumą długości ewolut o indeksach nieparzystych z naprzemiennymi znakami, co daje zależność:

$$\sin \theta = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

- składowa x (cosinusoidalna): składowa x punktu P , odpowiadająca wartości $\cos\theta$, jest sumą długości ewolut o indeksach parzystych z naprzemiennymi znakami, co daje zależność:

$$\cos \theta = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!}.$$

Iteracyjne wyznaczanie prędkości

Aby precyzyjnie wyznaczyć długości ramion wspomnianego wiatraczka, należy przeanalizować prędkości i drogi uzyskiwane w kolejnych krokach iteracji. Zgodnie z wyprowadzonymi faktami, prędkość n -tej ewoluty wyraża się wzorem $v_{n+1}(t) = d_n(t) \cdot |\theta'_n(t)|$.

Ponieważ dla krzywej wyjściowej mamy $\theta_0(t) = \alpha - \frac{\pi}{2} - t$, jej pochodna wynosi $\theta'_0(t) = -1$. Z Faktu 2 wiemy, że kąt każdej kolejnej ewoluty różni się od poprzedniej o stałą wartość $\pm \frac{\pi}{2}$. W związku z tym jej pochodna nie ulega zmianie i dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi:

$$\theta'_n(t) = -1.$$

Upraszcza to ogólną zależność rekurencyjną do postaci:

$$v_{n+1}(t) = d_n(t).$$

Podstawiając warunki początkowe $d_0(t) = t$:

- $v_1(t) = d_0(t) = t \implies d_1(t) = \int_0^t s \, ds = \frac{t^2}{2!},$
- $v_2(t) = d_1(t) = \frac{t^2}{2!} \implies d_2(t) = \int_0^t \frac{s^2}{2!} \, ds = \frac{t^3}{3!},$
- $v_3(t) = d_2(t) = \frac{t^3}{3!} \implies d_3(t) = \int_0^t \frac{s^3}{3!} \, ds = \frac{t^4}{4!}.$

Indukcyjnie otrzymujemy, że droga przebyta przez n -tą ewolwę (odpowiadająca długości odpowiedniego ramienia wiatraczka) wynosi $d_n(t) = \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}$.

Uwaga

W naszych rozważaniach używamy zamiennie oznaczeń t oraz θ . Identyfikacja ta wynika z geometrii okręgu jednostkowego ($r = 1$), gdzie miara kąta środkowego θ w radianach jest równa długości łuku t , na którym jest oparty. Zgodność tę potwierdza całka długości łuku dla krzywej $\gamma(\phi) = (\cos \phi, \sin \phi)$:

$$t = \int_0^\theta \sqrt{(-\sin \phi)^2 + (\cos \phi)^2} \, d\phi = \int_0^\theta 1 \, d\phi = \theta.$$

Dzięki tej równości $t = \theta$, zmiana parametru długości łuku jest wprost utożsamiana ze zmianą kąta, co pozwala na płynne łączenie metod geometrycznych z dynamicznymi. Ostatecznie otrzymujemy

$$\sin(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

oraz

$$\cos(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!}.$$

Konkluzja

Geometryczna suma długości „ramion” wiatraczka ewolut jest tożsama z sumą szeregów potęgowych funkcji sinus i cosinus. Warto zaznaczyć, że metoda wiatraczka ewolut nie jest nową geometryczną definicją. Jest to geometryczne narzędzie do pokazania równoważności definicji geometrycznej z Rozdziału 2.2 (z okręgiem) oraz definicji z Rozdziału 3 (z szeregiem potęgowym)

Rozdział 6

Podsumowanie

6.1 Interpretacja i znaczenie podejścia geometrycznego

Przedstawione w Rozdziale 2 ujęcie definicji funkcji trygonometrycznych ukazuje przejście od intuicyjnego, geometrycznego rozumienia funkcji trygonometrycznych do ich ścisłego ujęcia analitycznego. Początkowa definicja oparta na trójkącie prostokątnym ma charakter praktyczny i znajduje zastosowanie w zadaniach związanych z pomiarami, jednak jest ograniczona i niewystarczająca w szerszym kontekście matematycznym.

Wprowadzenie okręgu jednostkowego pozwala rozszerzyć te funkcje na cały zbiór liczb rzeczywistych oraz badać ich własności w sposób bardziej ogólny. Dzięki temu funkcje trygonometryczne stają się pełnoprawnym narzędziem analizy matematycznej, wykorzystywanym m.in. w badaniu ciągłości, granic czy okresowości.

Jednocześnie analiza definicji opartej na długości łuku ujawnia problem błędnego koła, wskazując, że intuicyjne podejście geometryczne nie zapewnia pełnej ścisłości. To prowadzi do potrzeby wprowadzenia bardziej fundamentalnych metod definiowania tych funkcji. Rozdział ten uzasadnia więc, dlaczego rozwój matematyki wymaga przejścia od intuicji do precyzyjnych, abstrakcyjnych konstrukcji.

6.2 Interpretacja i znaczenie podejścia analitycznego

Funkcje trygonometryczne można zdefiniować w sposób całkowicie analityczny, jako szeregi potęgowe ważne dla każdego argumentu rzeczywistego. Dzięki temu sinus i cosinus przestają być obiektami geometrycznymi, a stają się dobrze określonymi funkcjami o ściśle opisanych własnościach, wynikających z ich rozwinięcia w szereg Maclaurina.

Takie podejście eliminuje zależność od geometrii i pozwala na pełną ścisłość matematyczną, a jednocześnie ujawnia ich silne powiązania z funkcją wykładniczą oraz analizą zespoloną. W praktyce umożliwia to zarówno dokładne obliczenia, jak i stosowanie przybliżeń w zastosowaniach technicznych.

6.3 Interpretacja i znaczenie podejścia przez równania różniczkowe

Funkcje trygonometryczne można również w sposób w pełni analityczny zdefiniować jako rozwiązania prostego równania różniczkowego drugiego rzędu. W tym ujęciu sinus i cosinus nie są już definiowane ani geometrycznie, ani przez szeregi, lecz jako funkcje spełniające określone własności wynikające z dynamiki zmian.

Kluczowe jest tu wskazanie, że odpowiednie warunki początkowe jednoznacznie wyznaczają postać funkcji, dzięki czemu sinus i cosinus stają się naturalnymi i jedynymi możliwymi rozwiązaniami tego problemu. Oznacza to, że ich definicja nie wymaga żadnych dodatkowych konstrukcji – wynika bezpośrednio z reguł analizy równań różniczkowych.

Taki sposób ujęcia wzmacnia ścisłość teorii, ponieważ opiera się na ogólnych twierdzeniach o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań. Jednocześnie pokazuje on, że funkcje trygonometryczne są głęboko związane z procesami dynamicznymi i stanowią naturalny opis zjawisk okresowych, takich jak drgania czy ruch harmoniczny.

Bibliografia

- [1] Rudin, W., *Podstawy analizy matematycznej*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2009.
- [2] Fichtenholz, G. M., *Rachunek różniczkowy i całkowy, t. 2*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2020.
- [3] Blue, T., *Zig-Zag Involutiones, Up-Down Permutations, and Secant and Tangent*, The Trigonographer, 2026. Dostępne online: <https://daylateanddollarshort.com/mathdocs/Zig-Zag-Up-Down-Secant-Tangent.pdf>
- [4] I. Goodfellow, J. Pouget-Abadie, M. Mirza, B. Xu, D. Warde-Farley, S. Ozair, A. Courville, Y. Bengio, *Generative Adversarial Nets*, arXiv:1610.04825, 2016. Dostępne online: <https://arxiv.org/pdf/1610.04825>
- [5] W. Palczewski, *Równania różniczkowe zwyczajne*, Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego, Gdańsk 1999 (Rozdział 4: *Układy równań różniczkowych liniowych* oraz Sekcja dotycząca macierzowej funkcji wykładniczej).