

Skąd wzięła się $\frac{1}{3}$ we wzorze na objętość ostrosłupa i stożka?

Weronika Nowak, Wiktoria Wojtas i Hanna Jaromin

Marzec 2026

Spis treści

Wstęp	2
1 Metoda wyczerpywania	2
1.1 Metoda Euklidesa	2
1.2 Metoda Archimedesza	4
1.3 Wniosek	6
2 Metoda geometryczna	7
2.1 Najprostsze przypadki geometryczne	7
2.1.1 Podział sześcianu na trzy przystające ostrosłupy	7
2.1.2 Podział sześcianu na sześć przystających ostrosłupów	8
2.1.3 Yangma	8
2.2 Dowód wzoru ogólnego na objętość ostrosłupa metodą geometryczną	11
3 Zasada Cavalieriego	12
3.1 Dowód wzoru na objętość stożka kołowego metodą geometryczną	13
3.2 Wzór na objętość stożka dla dowolnego kształtu podstawy	15
4 Metoda całkowania	15
4.1 Objętość jako całka funkcji pól przekrojów	16
4.2 Objętość jako całka z funkcji dwóch zmiennych	17
4.3 Wniosek	19
5 Twierdzenie Pappusa-Guldina	22
6 Prawdopodobieństwo	23
Bibliografia	26

Wstęp

W szkole podstawowej wprowadza się uczniom figury przestrzenne. Dzieci poznają ich własności, pole powierzchni, czy objętość. Dwoma z przedstawianych im figur są ostrosłup i stożek. Pojawiają się przy nich dobrze każdemu znany wzór na ich objętość: $\frac{1}{3} \cdot P_p \cdot H$, czyli iloczyn $\frac{1}{3}$, pola podstawy i wysokości bryły. Wszyscy wiemy, że objętość ostrosłupa (stożka) stanowi $\frac{1}{3}$ objętości graniastosłupa (walca).

Wielu z nas uważa tę zależność jako fakt i mało kto zastanawia się skąd się wzięła. Czasem w szkole, jako dowód, przedstawia się metodę z przelewaniem wody. Nauczyciel bierze specjalnie zbudowane dwie figury ostrosłup (stożek) i graniastosłup (walec). Do ostrosłupa nalewa wodę, a następnie przelewa ją do graniastosłupa. Po trzech takich ruchach graniastosłup jest pełny. W ten sposób pokazuje się, że ostrosłup stanowi $\frac{1}{3}$ graniastosłupa.

Metoda ta nie jest jednak odpowiednim dowodem. Przy przelewaniu traci się część wody, co może oznaczać, że stosunek, między graniastosłupem, a ostrosłupem może wyjść np. 3, 2. Dodatkowo w ten sposób sprawdzamy jeden przypadek, by móc tej zależności używać dla każdego ostrosłupa, musielibyśmy sprawdzić nieskończenie wiele przypadków. Mało kto zna bardziej uniwersalny dowód. Jednak dowody na to istnieją.

W naszej pracy chcielibyśmy przedstawić wam różne sposoby na wyprowadzenie wzoru na objętość ostrosłupa i stożka. Praca ta może służyć zarówno nauczycielom szukającym alternatyw dla metody z przelewaniem wody, jak i miłośnikom matematyki, którzy chcieliby uzupełnić swoją wiedzę i odkryć tajemnice wzoru poznanego w szkole. Zastanawiając się nad tym, skąd bierze się wzór wystarczyłoby pokazać jedynie jeden dowód. Jednak nasz zespół postanowił pokazać różne sposoby na wyprowadzenie wzoru na objętość ostrosłupa bądź stożka.

Dla ułatwienia, w naszej pracy zakładaliśmy, że wzór na objętość graniastosłupa i walca jest nam znany.

1 Metoda wyczerpywania

1.1 Metoda Euklidesa

Metody, obserwacje i dowody zawarte w tym podrozdziale pochodzą z książki i materiałów autorstwa Marka Kordosa [1] - [3].

Pierwsze sposoby obliczania objętości ostrosłupów wymyślono już w starożytności. Posługiwano się przy tym **metodą wyczerpywania**. Metoda ta, nazywana jest inaczej całkowaniem starożytnych lub całką Eudoksosa.

Obserwacja. *Jeśli z jakiejś figury płaskiej (przestrzennej) wyjmiesz więcej niż połowę, z tego co zostanie znów wyjmiesz więcej niż połowę i będziesz tak postępował dalej, to suma pól (objętości) wyjętych części dowolnie dokładnie przybliży pole (objętość) tej figury.*

Uzasadnienie. Oznaczmy poszukiwane pole (objętość) przez S a kolejno wyjmowane fragmenty odpowiednio przez U_1, U_2, U_3 itd. Z założenia

$$U_1 \geq \frac{1}{2}S \text{ i ogólnie } U_k \geq \frac{1}{2}(S - (U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_{k-1})).$$

Wykażemy, że

$$U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n \geq S \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} \right)$$

Dla $n = 1$ mamy $U_1 \geq \frac{1}{2}S$ - z założenia.

Dalej, indukcyjnie.

Założmy, że dla pewnego k powyższa nierówność jest spełniona. To znaczy, że zachodzi

$$U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_k \geq S \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^k} \right).$$

Wówczas:

$$U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_{k+1} \geq U_1 + U_2 + \dots + U_k + \frac{1}{2}(S - (U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_k)) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \cdot (S + (U_1 + U_2 + \dots + U_k)) \geq \frac{1}{2} \cdot \left(S + S \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^k} \right) \right) = \\
&= S \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{k+1}} \right),
\end{aligned}$$

co kończy dowód.

Zatem pokazaliśmy, że $S \geq (U_1 + U_2 + U_3 + \dots) \geq S \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots \right) = S$

Czyli

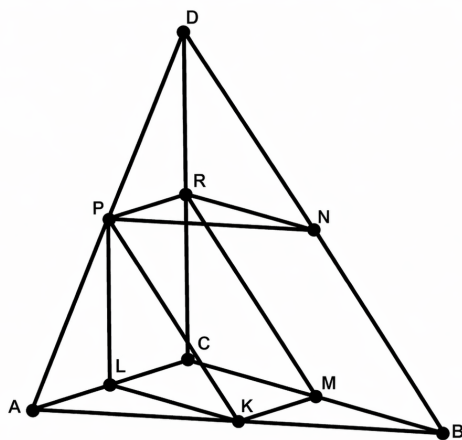
$$S = \sum_{i=1}^{\infty} U_i.$$

Metodę wyczerpywania do obliczania objętości wielościanów zastosował Euklides. Zaczniemy od uzasadnienia, że do obliczenia objętości dowolnego ostrosłupa wystarczy umieć obliczyć objętość czworościanu.

Uzasadnienie. Każdy wielokąt można podzielić na skończoną liczbę trójkątów. Ponieważ objętość jest addytywna względem takiego podziału, wystarczy wyprowadzić wzór na objętość ostrosłupa trójkątnego. Sumując objętości otrzymanych ostrosłupów trójkątnych dostajemy wzór dla ostrosłupa o podstawie, będącej wielokątem.

Przejdziemy teraz do sposobu Euklidesa na obliczenie objętości czworościanu z wykorzystaniem metody wyczerpywania.

Rozważamy czworościan $ABCD$. Przez K, L, M, N, P, R oznaczamy środki krawędzi, jak na Rysunek 1.



Rysunek 1

Z tego czworościanu wyciągamy (zgodnie z oznaczeniami stosowanymi powyżej) U_1 , czyli dwa graniastosłupy: $KLMCPR$ i $KMBPRN$. Wyciągnęliśmy więcej niż połowę objętości całego ostrosłupa, ponieważ dwa czworościany, które zostały $AKLP$ i $PRND$ możemy zmieścić w graniastosłupach, co widać po ich równoległym przesunięciu. Te same operacje powtarzamy dla powstałych czworościanów $AKLP$ i $PRDN$. Po wyjęciu z nich analogicznie jak wyżej graniastosłupów dostaniemy U_2 . Jeśli przez S oznaczmy objętość czworościanu $ABCD$, wówczas:

$$S = U_1 + U_2 + \dots + U_K + \dots$$

Wiemy też, że

$$U_2 = 2 \cdot \frac{1}{8} U_1 = \frac{1}{4} U_1,$$

ponieważ każdy z czworościanów $AKLP$ i $PRDN$ to czworościan $ABCD$ w skali $1 : 2$ a objętość skaluje się z sześciannem, stąd ta $\frac{1}{8}$. Analogicznie:

$$U_3 = \frac{1}{4}U_2 = \frac{1}{4^2}U_1 \text{ itd.}$$

Stąd

$$S = U_1 \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^n} + \dots \right) = \frac{4}{3}U_1.$$

Natomiast

$$U_1 = V_{KLMCPR} + V_{KMBPRN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}P_{ABC} \cdot \frac{1}{2} \cdot H + \frac{1}{4}P_{ABC} \cdot \frac{1}{2} \cdot H = \frac{1}{4}P_{ABC} \cdot H,$$

gdzie H jest wysokością czworościanu $ABCD$ opuszczoną z wierzchołka D .

Powyższe równości wynikają z następujących faktów:

- $KLMCPR$ to połowa graniastosłupa o podstawie $KLMC$ (który jest równoległobokiem o polu będącym połową pola trójkąta ABC) i wysokości stanowiącej połowę wysokości czworościanu $ABCD$ opuszczonej z wierzchołka D ;
- $KMBPRN$ ma w podstawie trójkąt KMB , który stanowi $\frac{1}{4}$ trójkąta ABC , a jego wysokością jest połowa wysokości czworościanu $ABCD$ opuszczonej z wierzchołka D .

Podsumowując,

$$S = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4}P_{ABC} \cdot H = \frac{1}{3}P_{ABC} \cdot H.$$

1.2 Metoda Archimedesesa

Archimedes stosował metodę wyczerpywania do obliczania objętości brył, przybliżając je za pomocą brył, których objętość potrafił obliczyć. Wykorzystamy tę metodę do wyznaczenia wzoru na objętość ostrosłupa. Skorzystamy przy tym ze współczesnej teorii granic.

Rozważmy ostrosłup trójkątny o wysokości H oraz polu podstawy S . Dzielimy jego wysokość na n równych części długości:

$$\Delta H = \frac{H}{n}.$$

Przez punkty podziału prowadzimy płaszczyzny równoległe do podstawy ostrosłupa. W przekroju otrzymujemy figury o polach:

$$S_1, S_2, \dots, S_n,$$

gdzie $S_n = S$ jest polem podstawy ostrosłupa.

Na tej podstawie budujemy dwa ciągi brył:

- P_n — bryłę wpisaną w ostrosłup, złożoną z graniastosłupów trójkątnych, patrz Rysunek 2,
- Q_n — bryłę opisaną na ostrosłupie, także złożoną z graniastosłupów trójkątnych, patrz Rysunek 3.

Bryłę P_n konstruujemy z graniastosłupów wpisanych w ostrosłup, przyjmując jako ich podstawy górne przekroje kolejnych warstw. Analogicznie bryła Q_n powstaje z graniastosłupów opisanych na ostrosłupie, których podstawami są dolne przekroje tych warstw.

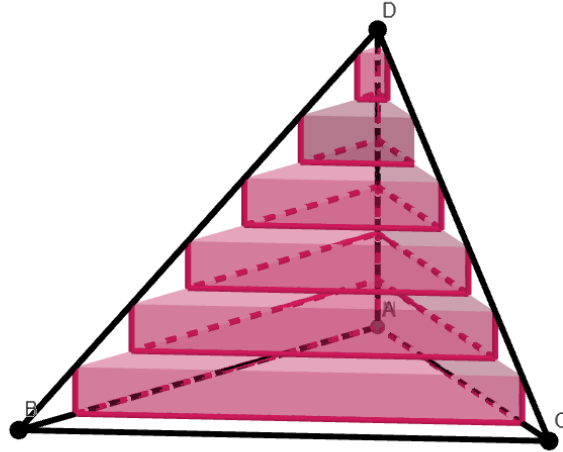
Z konstrukcji otrzymujemy:

$$P_n < V < Q_n,$$

gdzie V oznacza objętość ostrosłupa.

Skąd mamy nierówność:

$$0 < V - P_n < Q_n - P_n$$



Rysunek 2

Wiemy, że różnica $Q_n - P_n$ jest równa objętości dolnego graniastosłupa w Q_n . Czyli

$$Q_n - P_n = S \cdot \Delta H = S \cdot \frac{H}{n} = \frac{SH}{n}$$

Z powyższych obliczeń i na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (Q_n - P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S \frac{H}{n} = 0.$$

Zatem:

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n.$$

Przejdźmy teraz do obliczenia P_n .

Obserwacja. *Przekroje ostrosłupa są podobne do jego podstawy.*

Istotnie, przekrój S_i znajduje się w odległości $i\Delta H$ od wierzchołka ostrosłupa, podczas gdy cała wysokość wynosi $n\Delta H$. Skala podobieństwa k przekroju do podstawy wynosi więc

$$k = \frac{i}{n}.$$

Ponieważ pola figur podobnych skalują się z kwadratem skali podobieństwa, otrzymujemy:

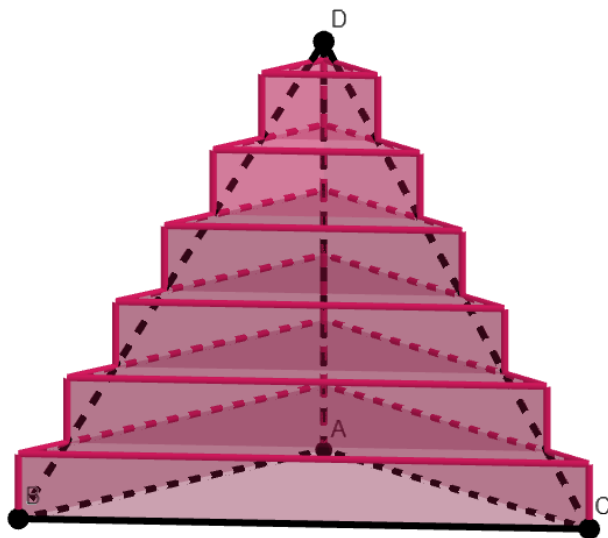
$$S_i = k^2 S = \frac{i^2}{n^2} S.$$

Objętość bryły P_n wynosi zatem:

$$\begin{aligned} P_n &= S_1 \Delta H + S_2 \Delta H + \dots + S_{n-1} \Delta H = S \cdot \frac{1^2}{n^2} \cdot \frac{H}{n} + S \cdot \frac{2^2}{n^2} \cdot \frac{H}{n} + \dots + S \cdot \frac{(n-1)^2}{n^2} \cdot \frac{H}{n} = \\ &= S \cdot \frac{H}{n^3} \cdot (1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2) = S \cdot H \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}. \end{aligned}$$

W powyższych obliczeniach skorzystaliśmy, ze wzoru :

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{(n+1)n(2n+1)}{6}.$$



Rysunek 3

Udowodnimy go indukcyjnie. Dla $n = 1$ mamy $1^2 = \frac{2 \cdot 1 \cdot 3}{6}$, więc $L = P$.
Założmy, że dla pewnego k powyższa nierówność jest spełniona. To znaczy, że zachodzi

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = \frac{(k+1)k(2k+1)}{6}.$$

Wówczas:

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{(k+1)k(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{(k+1)k(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} = \\ &= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} = \frac{(k+1)(2k+3)(k+2)}{6} \end{aligned}$$

co kończy dowód.

Obliczmy granicę:

$$\begin{aligned} V &= \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = SH \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} = \frac{SH}{6} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)(2n-1)}{n^2} = \\ &= \frac{SH}{6} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right). \end{aligned}$$

Przechodząc do granicy otrzymujemy:

$$V = \frac{SH}{6} \cdot 2 = \frac{1}{3}SH.$$

Zatem objętość ostrosłupa wynosi:

$$V = \frac{1}{3}SH.$$

1.3 Wniosek

Możemy zauważyć, że za pomocą obu powyższych metod jesteśmy w stanie otrzymać **współczynnik** $\frac{1}{3}$ we wzorze na objętość ostrosłupa.

2 Metoda geometryczna

Kolejną metodą na obliczanie objętości ostrosłupów jest **metoda geometryczna**. W tym rozdziale przedstawimy geometryczne uzasadnienie pojawienia się współczynnika $\frac{1}{3}$ we wzorze na objętość ostrosłupa, tą właśnie metodą.

2.1 Najprostsze przypadki geometryczne

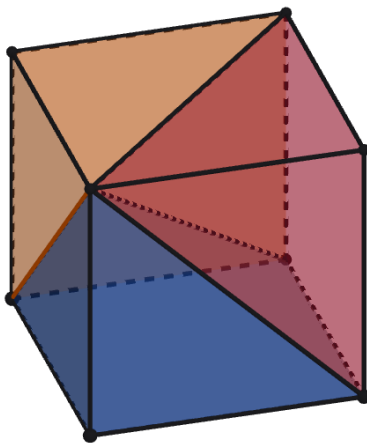
Rozpocznijmy od najprostszych i najbardziej intuicyjnych przykładów geometrycznych, które pozwolą nam bezpośrednio zauważyć zależność między objętością ostrosłupa, a objętością graniastosłupa o tej samej podstawie i wysokości.

2.1.1 Podział sześcianu na trzy przystające ostrosłupy

Rozważmy sześcian o krawędzi długości a . Objętość tego sześcianu wynosi zatem

$$V_{sz} = a^3 .$$

Podzielmy go na trzy przystające ostrosłupy o wspólnym wierzchołku, jak na Rysunku 4.



Rysunek 4

Skoro każdy z ostrosłupów, na który został podzielony sześcian, stanowi jedną trzecią jego objętości (jako, że są przystające), to objętość każdego z nich wynosi

$$V_{ostr} = \frac{a^3}{3} .$$

Możemy łatwo zauważyć, że dla każdego ostrosłupa podstawa p jest ścianą sześcianu, czyli

$$P_p = a^2 ,$$

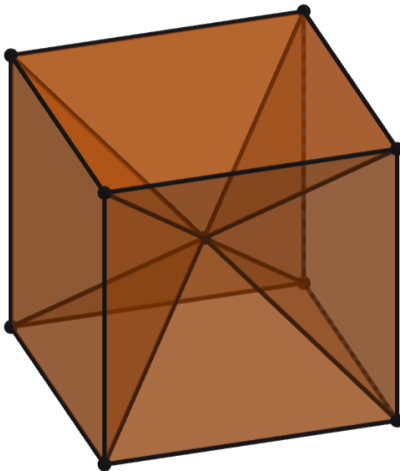
a wysokością H jest wysokość sześcianu

$$H = a .$$

Mamy zatem iloczyn pola podstawy i wysokości ostrosłupa wynoszący $a^2 \cdot a = a^3$. Porównując go, do jego objętości wyznaczonej powyżej widzimy, że objętość każdego z tych ostrosłupów jest równa iloczynowi pola ich podstawy i wysokości oraz czynnika $\frac{1}{3}$.

2.1.2 Podział sześcianu na sześć przystających ostrosłupów

Rozważmy ponownie sześcian o krawędzi długości a . Niech S oznacza środek tego sześcianu. Każda ściana sześcianu może zostać potraktowana jako podstawa ostrosłupa, którego wierzchołkiem jest punkt S . W ten sposób cały sześcian dzielimy na sześć przystających ostrosłupów, jak na Rysunku 5.



Rysunek 5

Objętość sześcianu wynosi

$$V_{sz} = a^3 .$$

Ponieważ ostrosłupów jest sześć i są one przystające, objętość jednego z nich wynosi

$$V_{ostr} = \frac{a^3}{6} .$$

Podstawą każdego ostrosłupa jest kwadrat o polu

$$P_p = a^2 .$$

Wysokość H ostrosłupa jest odległością środka sześcianu od ściany. Ponieważ środek dzieli wysokość sześcianu na połowy, otrzymujemy

$$H = \frac{a}{2} .$$

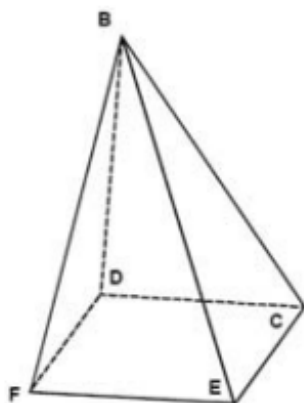
Analogicznie do poprzedniego przykładu mamy więc iloczyn pola podstawy oraz wysokości ostrosłupa $a^2 \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3}{2}$ i porównując go do jego objętości, dochodzimy ponownie, że objętość każdego z ostrosłupów jest iloczynem pola ich podstawy i wysokości oraz ułamka $\frac{1}{3}$.

2.1.3 Yangma

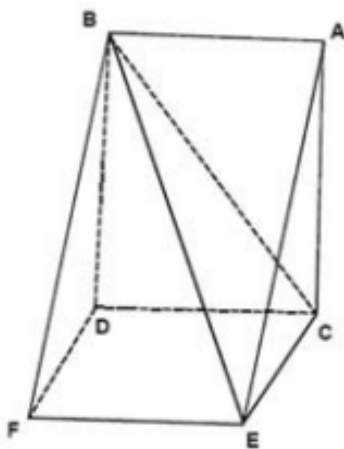
Przyjrzyjmy się teraz bardziej złożonemu przypadkowi. Opisana w III wieku n.e. przez chińskiego matematyka Liu Hui *yangma* (patrz [8]) jest ostrosłupem o prostokątnej podstawie i wierzchołku nad jednym z wierzchołków podstawy, jak na Rysunku 6. Jest to uogólniony przykład ostrosłupów z Rysunku 4, ponieważ jego trzy wymiary nie są równe i nie da się z trzech przystających *yangm* złożyć sześcianu.

Aby pokazać, że objętość *yangmy* jest równa jednej trzeciej objętości graniastosłupa o tym samym polu podstawy oraz wysokości, dobudowujemy do niej czworościan (zwany *bienao*) i w ten sposób otrzymujemy *qiandu* - graniastosłup prosty o trójkącie prostokątnym w podstawie, jak na Rysunku 7.

Możemy łatwo zauważyć, że *qiandu* jest połową prostopadłościanu (na który składają się dwie po *yangmy* i *bienao*), zatem wystarczy, że pokażemy, że objętość *yangmy* jest dwukrotnością objętości



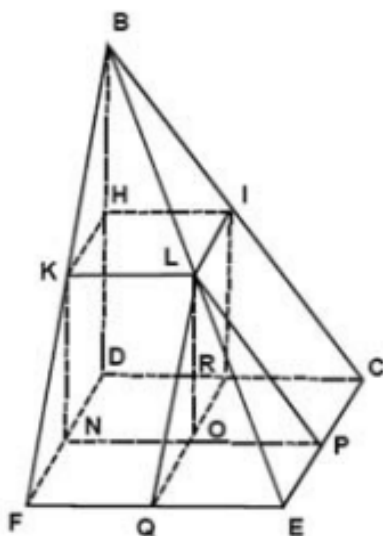
Rysunek 6



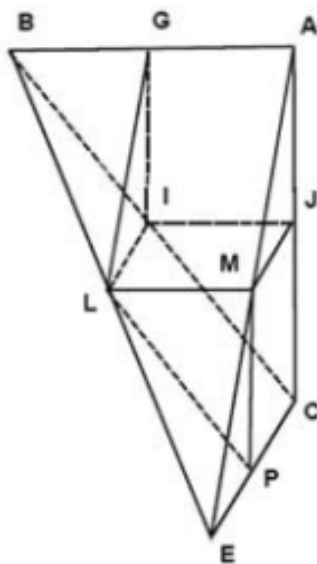
Rysunek 7

bienao.

Dzielimy *yangmę* na mniejszy prostopadłościan oraz dwa *qiandu* i dwie *yangmy*, jak na Rysunku 8. *Bienao* dzielimy na dwa mniejsze *qiandu* i dwa mniejsze *bienao*, jak na Rysunku 9.



Rysunek 8



Rysunek 9

Jako że na mniejszy prostopadłościan składają się dwa mniejsze *qiandu*, to *yangma* mieści w sobie dwa *qiandu*, a *bienao* jeden. Pozostałe *yangmy* i *bienao* możemy dalej dzielić w taki sam sposób i ponownie w *yangmie* będzie się zawierać dwukrotnie więcej prostopadłościanów niż w *bienao*. Objętości *yangm* i *bienao* będą dążyć do zera, zatem po wystarczająco wielu podziałach dochodzimy do tego, że objętość *yangmy* jest równa objętości dwóch *bienao*.

Prostopadłościan, na który składają się dwie *qiandu*, ma tę samą podstawę i wysokość co *yangma*. Składa się z dwóch *bienao*, których suma objętości jest równa *yangmie*, oraz dwóch *yangm*, a zatem

ma łącznie objętość trzech *yangm*. Dochodzimy więc i w tym przypadku do czynnika $\frac{1}{3}$ w objętości ostrosłupa, porównując go z graniastosłupem o tym samym polu podstawy i wysokości.

2.2 Dowód wzoru ogólnego na objętość ostrosłupa metodą geometryczną

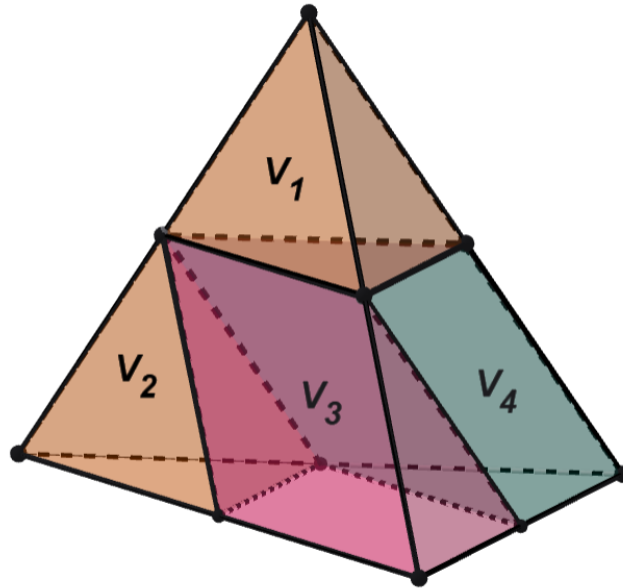
Każdy wielokąt można podzielić na trójkąty, a co za tym idzie, każdy ostrosłup na ostrosłupy o trójkątnych podstawach, zatem jeśli udowodnimy wzór na objętość dla ostrosłupów trójkątnych, to będzie on prawdziwy dla wszystkich ostrosłupów.

Zacniemy od prostego faktu:

Lemat. *Stosunek objętości brył podobnych jest równy trzeciej potędze ich skal podobieństwa.*

Pominiemy dowód tego lematu, ponieważ nietrudno zauważyć, że jeśli każdy z trzech wymiarów pomnożymy przez czynnik k , to jego objętość zmieni się k^3 razy.

Rozważmy dowolny ostrosłup trójkątny. Jego wysokość oznaczmy jako H , pole podstawy jako P_p , a objętość oznaczmy jako V . Podzielimy go na cztery bryły: dwa czworościany podobne do niego w skali $\frac{1}{2}$ oraz dwa graniastosłupy trójkątne, jak na Rysunku 10.



Rysunek 10

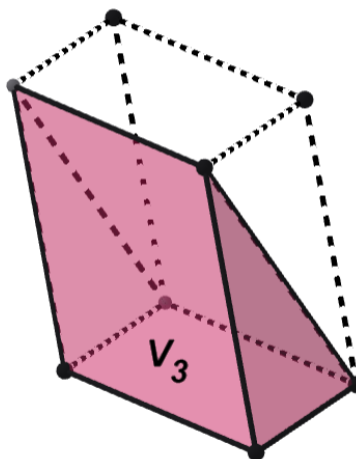
Dwa małe czworościany są przystające. Powołując się na lemat, przy skali podobieństwa $\frac{1}{2}$ mamy

$$V_1 = V_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot V = \frac{1}{8} V .$$

Trzecia bryła jest graniastosłupem, którego ściana boczna ma pole $\frac{1}{2}P_p$, a wysokość względem tej ściany wynosi $\frac{1}{2}H$. Możemy do niej dobudować przystający graniastosłup tworząc równoległoscian, jak na Rysunku 11.

Widzimy wtedy, że objętość trzeciej bryły wynosi

$$V_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}P_p \cdot \frac{1}{2}H = \frac{1}{8}P_pH .$$



Rysunek 11

Czwarta bryła jest graniastosłupem o trójkątnej podstawie o polu powierzchni $\frac{1}{4}P_p$ oraz wysokości $\frac{1}{2}H$, zatem jej objętość wynosi

$$V_4 = \frac{1}{4}P_p \cdot \frac{1}{2}H = \frac{1}{8}P_p H .$$

Objętość początkowego czworościanu jest równa sumie objętości brył, na które został podzielony, mamy zatem

$$\begin{aligned} V &= V_1 + V_2 + V_3 + V_4 , \\ V &= \frac{1}{8}V + \frac{1}{8}V + \frac{1}{8}P_p H + \frac{1}{8}P_p H , \\ V &= \frac{1}{4}V + \frac{1}{4}P_p H , \\ \frac{3}{4}V &= \frac{1}{4}P_p H , \\ V &= \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4}P_p H , \\ V &= \frac{1}{3}P_p H . \end{aligned}$$

Doszliliśmy więc, że objętość każdego ostrosłupa trójkątnego jest równa jednej trzeciej objętości graniastosłupa o tym samym polu podstawy i wysokości. Co za tym idzie, skoro każdy wielokąt można podzielić na trójkąty, to objętość ostrosłupa o dowolnym wielokącie w podstawie można wyliczyć ze wzoru

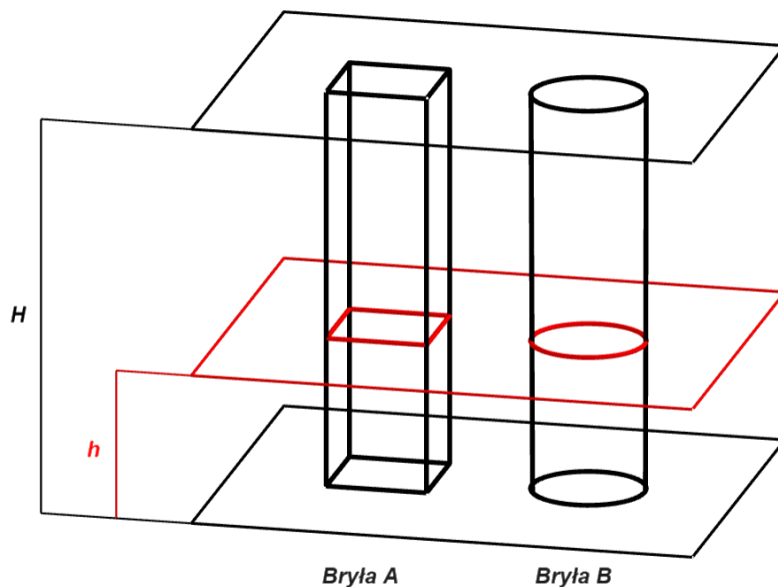
$$V = \frac{1}{3}P_p H ,$$

gdzie P_p , to pole powierzchni jego podstawy, a H to jego wysokość.

3 Zasada Cavalieriego

Aby móc porównywać objętości brył potrzebna nam będzie znajomość **zasady Cavalieriego**. Pozwoli nam ona uogólnić przedstawiony w poprzednim rozdziale wzór na objętość dla ostrosłupa o dowolnym wielokącie w podstawie, na stożek o dowolnej figurze w podstawie, w tym stożek kołowy.

Twierdzenie. Jeśli dwie bryły w przecięciu z każdą płaszczyzną równoległą do wybranej dają przekrój o tym samym polu, to ich objętości są równe.



Rysunek 12

Oznacza to, że jeśli rozpatrzmy dwie bryły o tej samej wysokości H i dla każdej wysokości h , gdzie $0 < h < H$, pola przekrojów tych brył będą jednakowe, to ich objętości również będą równe (patrz Rysunek 12).

3.1 Dowód wzoru na objętość stożka kołowego metodą geometryczną

Rozważmy dwie bryły: ostrosłup o kwadratowej podstawie oraz stożek kołowy. Bok podstawy ostrosłupa oznaczmy jako a , a promień koła u podstawy stożka jako r . Obie te bryły niech mają równe wysokości H oraz równe pola podstaw, czyli

$$P_p = a^2 = \pi r^2 .$$

Przetnijmy obie te bryły płaszczyzną równoległą do ich podstaw na wysokości h . Oznaczmy bok kwadratu przekroju ostrosłupa jako x_1 oraz promień przekroju stożka jako x_2 , jak na Rysunku 13.

W ostrosłupie trójkąty $A_1O_1B_1$ i $A_1S_1C_1$ są podobne, więc

$$\frac{H-h}{\frac{1}{2}x_1} = \frac{H}{\frac{1}{2}a} ,$$

$$x_1 = \frac{a(H-h)}{H} .$$

W stożku trójkąty $A_2O_2B_2$ i $A_2S_2C_2$ są podobne, więc

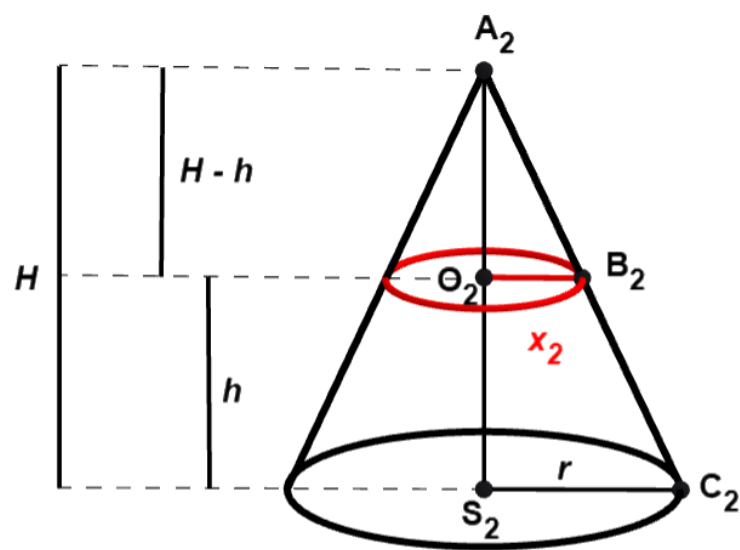
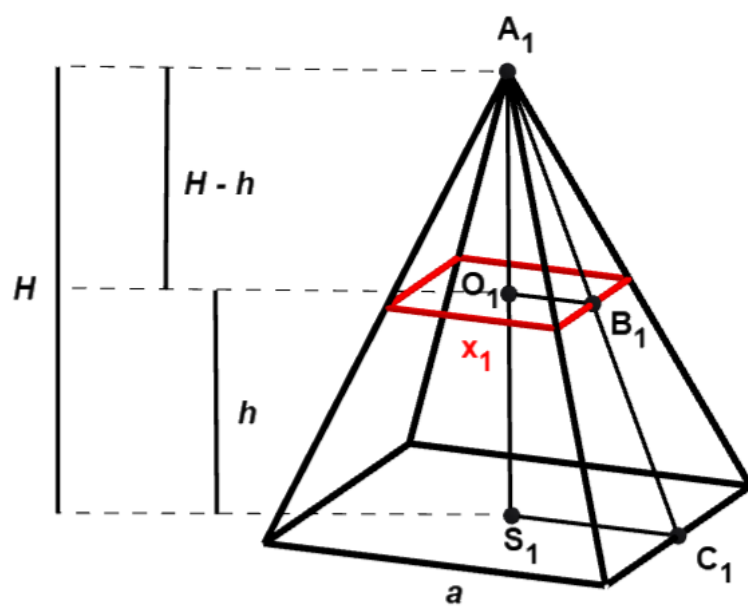
$$\frac{H-h}{x_2} = \frac{H}{r} ,$$

$$x_2 = \frac{r(H-h)}{H} .$$

Korzystając z tego, że pola podstaw tych brył są równe, możemy wyznaczyć a , zależnie od r , czyli

$$a^2 = \pi r^2 ,$$

$$a = r\sqrt{\pi} .$$



Rysunek 13

Podstawmy teraz wyznaczoną wartość do wzoru na x_1 :

$$x_1 = \frac{r\sqrt{\pi}(H-h)}{H}.$$

Obliczmy pola tych przekrojów. W ostrosłupie mamy

$$\begin{aligned} P_1 &= x_1^2, \\ P_1 &= \left(\frac{r\sqrt{\pi}(H-h)}{H} \right)^2, \\ P_1 &= \frac{r^2\pi(H-h)^2}{H^2}. \end{aligned}$$

Pole przekroju w stożku wynosi

$$\begin{aligned} P_2 &= \pi x_2^2, \\ P_2 &= \pi \left(\frac{r(H-h)}{H} \right)^2, \\ P_2 &= \pi \frac{r^2(H-h)^2}{H^2}, \\ P_2 &= \frac{r^2\pi(H-h)^2}{H^2}. \end{aligned}$$

Dochodzimy zatem do równości

$$P_1 = P_2.$$

Z dowolności h z przedziału $[0, H]$ wnioskujemy, że na wszystkich wysokościach pola tych przekrojów są równe. Z zasady Cavalieriego wnioskujemy więc, że objętości tych brył są jednakowe. Wiedząc, że objętość ostrosłupa liczymy ze wzoru

$$V_{ostrosłupa} = \frac{1}{3}P_p H,$$

każdy stożek kołowy możemy porównać do ostrosłupa o tym samym polu powierzchni podstawy i wysokości, zatem wzór na objętość stożka kołowego będzie miał taką samą postać, co wzór na pole ostrosłupa, czyli

$$V_{stożka} = \frac{1}{3}P_p H.$$

3.2 Wzór na objętość stożka dla dowolnego kształtu podstawy

Niezależnie od tego, jaka figura jest podstawą stożka, kiedy przetniemy go płaszczyzną równoległą do jego podstawy, przekrój będzie figurą podobną do podstawy. Skalą podobieństwa będzie iloraz odległości od wierzchołka i wysokości stożka odniesiona do kwadratu, jako że liczymy powierzchnię. Jeśli dwa stożki o tym samym polu podstawy i wysokości przetniemy płaszczyzną w tej samej odległości od wierzchołka, to przekroje te będą przeskalowane o taką samą wartość, a co za tym idzie będą sobie równe na każdej wysokości.

Tak więc każdy stożek, niezależnie od kształtu podstawy, można, powołując się na zasadę Cavalieriego, porównać do ostrosłupa o tym samym polu podstawy P_p oraz wysokości H co on i obliczyć jego objętość ze wzoru

$$V = \frac{1}{3}P_p H.$$

4 Metoda całkowania

Dotychczas opisane starożytne metody: metoda Euklidesa jak i Archimedesza zawierają nieskończone przejścia, które nie miały formalnego dowodu w tamtych czasach. Idea jest jednak podobna jak we współczesnym całkowaniu. Za pomocą całki także jesteśmy w stanie wyprowadzić wzór na objętość ostrosłupa. W tym rozdziale wyprowadzimy ten wzór na dwa sposoby. Najpierw za pomocą całki z pól przekrojów a następnie przez całkowanie odpowiedniej funkcji dwóch zmiennych.

4.1 Objętość jako całka funkcji pól przekrojów

Jednym z zastosowań całki jest obliczanie objętości brył poprzez sumowanie pól ich przekrojów. Idea tej metody jest bezpośrednim rozwinięciem starożytnej metody wyczerpywania: zamiast sumować objętości skończonej liczby elementów, przechodzimy do granicy sum.

Twierdzenie. Niech $A(x)$ oznacza pole przekroju bryły płaszczyzną prostopadłą do osi Ox na wysokości x i niech bryła zawiera się między płaszczyznami $x = a$ i $x = b$. Jeżeli funkcja A jest całkowalna w przedziale $[a, b]$, to objętość bryły wyraża się wzorem:

$$V = \int_a^b A(x) dx.$$

Twierdzenie to wynika bezpośrednio z definicji całki oznaczonej jako granicy sum Riemanna [4] (patrz: Rozdział 5.2 Definition 2 - suma Riemanna oraz Rozdział 6.2, Definition of volume - powyższe twierdzenie).

Istotnie, dzieląc przedział $[a, b]$ na małe podprzedziały długości Δx_i , objętość cienkiej warstwy bryły odpowiadającej danemu przedziałowi możemy przybliżyć przez:

$$A(x_i)\Delta x_i.$$

Sumując objętości wszystkich warstw otrzymujemy:

$$\sum_{i=1}^n A(x_i)\Delta x_i.$$

Przechodząc do granicy przy długości podziału dążącej do zera dostajemy:

$$V = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n A(x_i)\Delta x_i = \int_a^b A(x) dx.$$

Przejdziemy teraz do obliczenia objętości ostrosłupa.

Rozważmy ostrosłup o wysokości h oraz polu podstawy P_p . Przecinamy go płaszczyzną równoległą do podstawy na wysokości x , gdzie:

$$0 \leq x \leq H.$$

Otrzymany przekrój jest figurą podobną do podstawy ostrosłupa. Wynika to z faktu, że płaszczyzna przekroju jest równoległa do płaszczyzny podstawy, a odpowiadające sobie krawędzie pozostają proporcjonalne.

Skala podobieństwa przekroju do podstawy wynosi:

$$\frac{H-x}{H}.$$

Ponieważ pola figur podobnych skalują się z kwadratem skali podobieństwa, pole przekroju na wysokości x wynosi:

$$A(x) = P_p \left(\frac{H-x}{H} \right)^2.$$

Korzystając z poprzedniego twierdzenia otrzymujemy:

$$V = \int_0^H P_p \left(\frac{H-x}{H} \right)^2 dx = \frac{P_p}{H^2} \int_0^H (H-x)^2 dx.$$

Wprowadzamy podstawienie:

$$u = H - x.$$

Wówczas:

$$du = -dx.$$

Zmieniają się również granice całkowania:

$$x = 0 \Rightarrow u = H,$$

$$x = h \Rightarrow u = 0.$$

Otrzymujemy:

$$V = \frac{P_p}{H^2} \int_H^0 u^2 (-du) = \frac{P_p}{H^2} \int_0^H u^2 du = \frac{P_p}{H^2} \frac{u^3}{3} \Big|_0^H = \frac{P_p}{H^2} \cdot \frac{H^3}{3}.$$

Ostatecznie:

$$V = \frac{1}{3} P_p H.$$

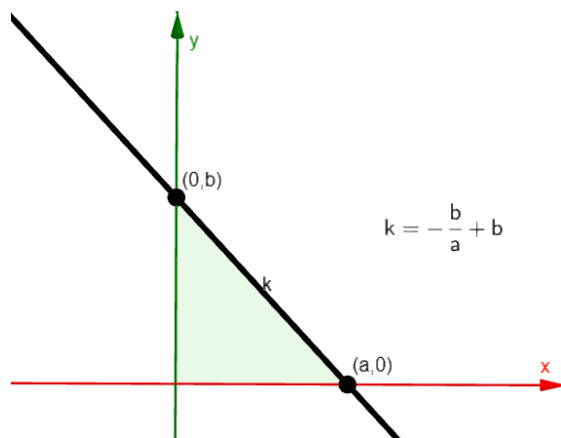
Przedstawione rozumowanie można w analogiczny sposób przeprowadzić dla stożków o dowolnej podstawie, w tym także stożków kołowych.

4.2 Objętość jako całka z funkcji dwóch zmiennych

Do obliczenia objętości ostrosłupa możemy użyć alternatywnej metody. Rozważmy ostrosłup o podstawie zdefiniowanej w następujący sposób:

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq a \wedge 0 \leq y \leq g(x)\},$$

gdzie $g(x) = -\frac{b}{a}x + b$, $a < 0$, $b > 0$, patrz *Rysunek 14*.



Rysunek 14

Jego wysokość oznaczmy przez H . Natomiast wierzchołek ostrosłupa znajduje się nad wierzchołkiem trójkąta w podstawie, nie przy kącie prostym a dokładniej nad punktem $A = (a, 0, 0)$, patrz *Rysunek 15*. W ten sposób otrzymujemy ostrosłup, o dowolnej wysokości, który jako podstawę ma dowolny trójkąt prostokątny, ale którego wierzchołek znajduje się nad jednym z wierzchołków podstawy przy kącie ostrym.

Funkcja opisująca płaszczyznę ukośnej ściany bocznej ma postać:

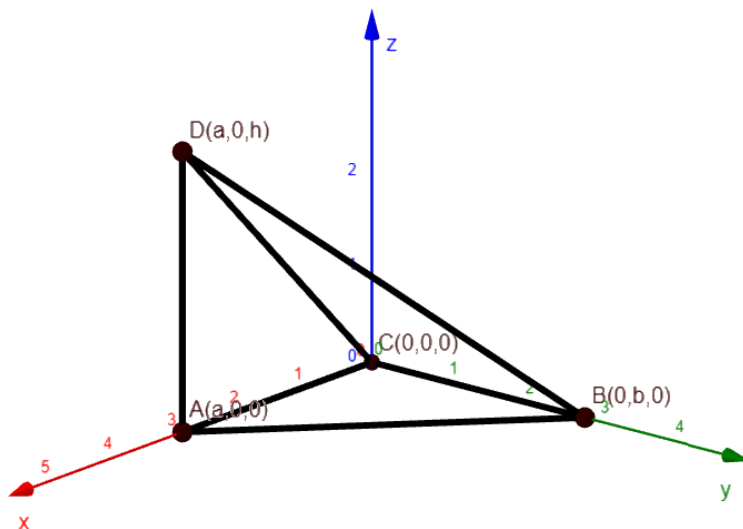
$$f(x, y) = \frac{H}{a}x.$$

Objętość ostrosłupa wyraża się całką podwójną:

$$V = \int_0^a \int_0^{-\frac{b}{a}x+b} \frac{H}{a}x \, dy \, dx.$$

Najpierw obliczmy całkę wewnętrzną:

$$V = \int_0^a \frac{H}{a}xy \Big|_{y=0}^{-\frac{b}{a}x+b} dx = \int_0^a \frac{H}{a}x \left(-\frac{b}{a}x + b \right) dx = \frac{H}{a} \int_0^a \left(-\frac{b}{a}x^2 + bx \right) dx.$$



Rysunek 15

Całkujemy:

$$V = \frac{H}{a} - \frac{b}{a} \frac{x^3}{3} + b \frac{x^2}{2} \Big|_{x=0}^a = \frac{H}{a} \left(-\frac{b}{a} \frac{a^3}{3} + b \frac{a^2}{2} \right) = \frac{H}{a} \left(-\frac{ba^2}{3} + \frac{ba^2}{2} \right).$$

Otrzymujemy:

$$V = \frac{H}{a} \cdot ba^2 \cdot \frac{1}{6}.$$

Stąd:

$$V = \frac{1}{6} abH.$$

Ponieważ pole podstawy wynosi:

$$P_p = \frac{1}{2} ab,$$

otrzymujemy ostatecznie:

$$V = \frac{1}{3} P_p H.$$

Uogólnienie wzoru na (prawie) dowolny ostrosłup trójkątny

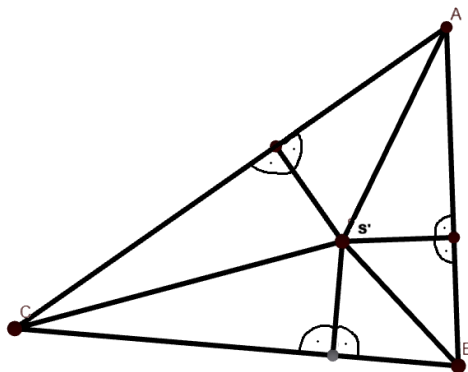
Powyższe rozważania dotyczą szczególnego przypadku, gdzie podstawą ostrosłupa jest trójkąt prostokątny a wierzchołek tego ostrosłupa znajduje się nad wierzchołkiem trójkąta w podstawie. Uogólnimy te rozważania do wszystkich ostrosłupów trójkątnych, w których wierzchołek znajduje się nad podstawą.

Uzasadnienie. Rozważmy ostrosłup, który w podstawie ma trójkąt ostrokątny lub prostokątny ABC a rzut wierzchołka S ostrosłupa na płaszczyznę podstawy znajduje się wewnątrz trójkąta ABC . Poprowadźmy odcinki łączące rzut wierzchołka z wierzchołkami trójkąta podstawy. W ten sposób dzielimy trójkąt ABC na sumę trzech mniejszych trójkątów a ostrosłup na sumę trzech mniejszych ostrosłupów trójkątnych o wspólnym wierzchołku S . Ponieważ trójkąt ABC jest ostrokątny lub prostokątny, każdy z otrzymanych trójkątów można dalej podzielić wysokością na dwa trójkąty prostokątne. W każdym z nich prowadzimy wysokość opuszczoną z wierzchołka będącego rzutem punktu S patrz *Rysunek 16*. W ten sposób wyjściowy ostrosłup $ABCS$ podzielił na 6 mniejszych szczególnych (z trójkątem prostokątnym w podstawie i wierzchołkiem nad jednym z wierzchołków podstawy przy kącie ostrym)

ostrosłupów, dla których wzór na objętość wyprowadziliśmy w tym rozdziale. Objętość jest addytywna względem rozkładu bryły. Stąd otrzymujemy :

$$V = \frac{1}{3}P_p H.$$

Wzór ten udowodniliśmy dla ostrosłupów o podstawie będącej trójkątem ostrokątnym lub prostokątnym, których rzut wierzchołka na płaszczyznę podstawy należy do wnętrza podstawy.



Rysunek 16

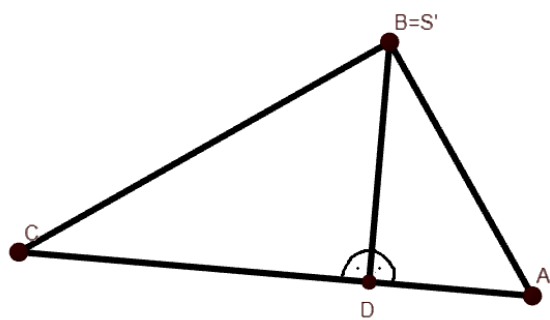
Rozważmy teraz przypadek ostrosłupa z trójkątem prostokątnym w podstawie, gdzie rzut wierzchołka ostrosłupa pada na jedną z krawędzi podstawy oraz analogiczny przypadek dla trójkąta ostrokątnego. Wtedy podobnie jak wyżej jesteśmy w stanie podzielić podstawę na trójkąty prostokątne w sposób pokazany na rysunkach, a dalsze rozumowanie przebiega analogicznie:

- *Rysunek 17*: dla trójkąta prostokątnego w podstawie ostrosłupa, gdzie rzut wierzchołka ostrosłupa znajduje się w wierzchołku podstawy przy kącie prostym,
- *Rysunek 18*: dla trójkąta prostokątnego w podstawie ostrosłupa, gdzie rzut wierzchołka ostrosłupa znajduje na przyprostokątnej,
- *Rysunek 19*: dla trójkąta prostokątnego w podstawie ostrosłupa, gdzie rzut wierzchołka ostrosłupa znajduje na przeciwprostokątnej podstawy.
- *Rysunek 20*: dla trójkąta ostrokątnego w podstawie ostrosłupa, gdzie rzut wierzchołka ostrosłupa znajduje na krawędzi podstawy,

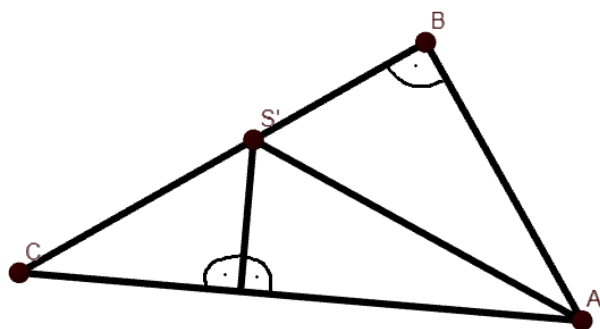
W ten sposób udowodniliśmy wzór na objętość ostrosłupa dla szczególnych przypadków ostrosłupów. Rozważane ostrosłupy mają w podstawie trójkąt prostokątny lub ostrokątny a rzut wierzchołka ostrosłupa pada na podstawę.

4.3 Wniosek

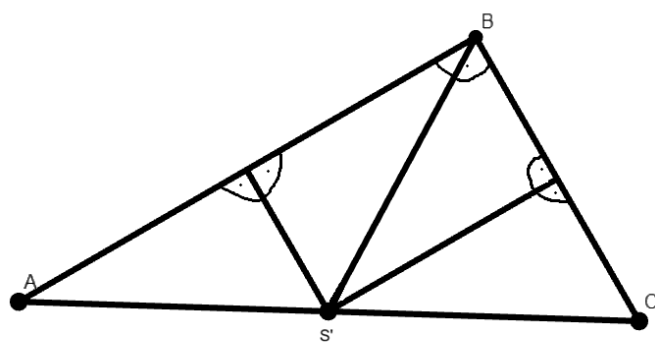
Otrzymany wynik pokazuje, że metoda całkowania prowadzi do tego samego wzoru na objętość ostrosłupa, co metoda wyczerpywania. Rachunek całkowy stanowi zatem ścisłą formalizację intuicji znanych już w starożytności.



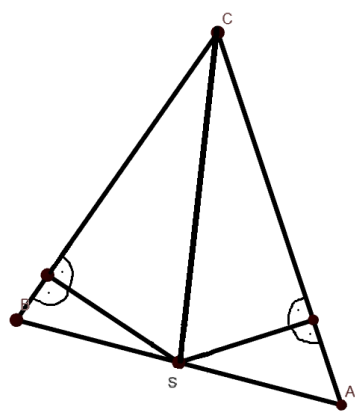
Rysunek 17



Rysunek 18



Rysunek 19



Rysunek 20

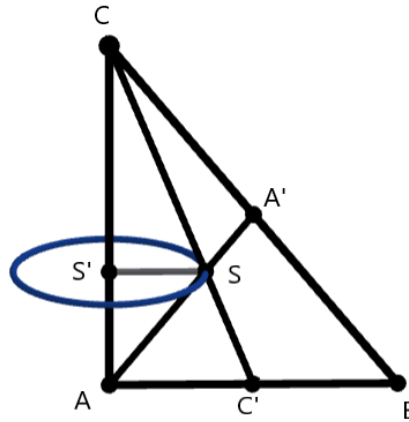
5 Twierdzenie Pappusa-Guldina

W tym rozdziale za pomocą Twierdzenia Pappusa-Guldina, wyprowadzimy wzór na objętość stożka kołowego.

Twierdzenie. (Pappusa-Guldina) [6]

Jeśli obracamy płaską i spójną (w jednym kawałku) figurę F względem osi leżącej w tej płaszczyźnie i nie przecinającej wnętrza F , to objętość powstającej bryły jest iloczynem pola figury F i drogi jaką przebył jej środek masy.

Zauważmy, że stożek prosty powstaje przez obrót trójkąta prostokątnego wokół jednej z przyprostokątnych oraz, że ta przyprostokątna nie przecina wnętrza tego trójkąta. Trójkąt ten jest płaską i spójną figurą. Co za tym idzie możemy obliczyć objętość stożka prostego przy pomocy twierdzenia Pappusa-Guldina.



Rysunek 21

Skorzystajmy z informacji, że środek masy trójkąta to przecięcie jego środkowych. Na Rysunku 21 zaznaczono go jako punkt S . Zauważmy, że przy obrocie figury, punkt ten porusza się po okręgu o promieniu SS' . Do wyznaczenia tego promienia posłużymy się następującym twierdzeniem.

Twierdzenie.

Środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie. Dzieli on każdą z nich w stosunku 2:1 licząc od wierzchołka.

Zauważmy, że trójkąty CAC' i $CS'S$ są podobne, ponieważ kąty $\angle CAC'$ i $\angle CS'S$ są proste, $\angle S'CS$ i $\angle ACC'$ to ten sam kąt, a co za tym idzie kąty $\angle CSS'$ oraz $\angle CAC'$ mają taką samą miarę. Dzięki tej obserwacji możemy obliczyć długość odcinka $S'S$:

$$\frac{|AC'|}{|S'S|} = \frac{|CC'|}{|CS|} = \frac{|CS| + |C'S|}{|CS|} = 1 + \frac{|C'S|}{|CS|}.$$

Z twierdzenia o środkowych trójkąta wiemy, że $\frac{|C'S|}{|CS|} = \frac{1}{2}$, a co za tym idzie:

$$\frac{|AC'|}{|S'S|} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

$$|AC'| = \frac{3}{2} \cdot |S'S|,$$

$$|S'S| = \frac{2}{3} \cdot |AC'|.$$

Ponieważ odcinek CC' jest środkową trójkąta to długość odcinka AC' stanowi połowę długości odcinka AB . Stożek, którego objętość chcemy obliczyć, powstaje przez obrót trójkąta ABC wokół przyprostokątnej AC . Nazwijmy więc AB promieniem R tego stożka, a bok AC jego wysokością H . Wówczas mamy zależność:

$$|S'S| = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}R = \frac{1}{3}R.$$

Wiemy już, że droga jaką przechodzi punkt S przy obrocie trójkąta ABC jest okręgiem o promieniu $|S'S|$. Jej długość wynosi:

$$2\pi \cdot |S'S| = 2\pi \cdot \frac{1}{3}R.$$

Obliczmy objętość stożka, posługując się twierdzeniem Pappusa-Guldina.

$$V = P_{ABC} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{3}R = \frac{|AB| \cdot |AC|}{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{3}R = \frac{R \cdot H}{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{3}R = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot H.$$

Zauważmy, że πR^2 to pole podstawy stożka kołowego, a co za tym idzie w tym przypadku objętość wynosi:

$$V = \frac{1}{3}P_p H.$$

W ten sposób wyprowadziliśmy wzór na objętość stożka kołowego. Nie możemy użyć tego toku rozumowania do wyprowadzenia wzoru na objętość ostrosłupa. Jednak wiemy, dzięki zasadzie Cavalieriego, że możemy poznać objętość ostrosłupa znając objętość stożka, gdy ich pola podstaw i długości wysokości są takie same.

6 Prawdopodobieństwo

W tym rozdziale zaprezentujemy sposób na wyprowadzenie wzoru na objętość stożka kołowego wykorzystując metody probabilistyczne, a w szczególności pojęcie prawdopodobieństwa warunkowego oraz całkową formułę na prawdopodobieństwo całkowite.

Rozważmy doświadczenie losowe, w którym jednostajnie losujemy punkty z walca opisanego na stożku A . Wtedy zbiorem zdarzeń elementarnych będzie

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\} \times [0, H],$$

gdzie R to promień podstawy stożka A , a H jego wysokość. Niech A będzie zdarzeniem losowym, polegającym na tym, że wylosowany punkt znajduje się w stożku A .

Wtedy zachodzi następująca zależność między prawdopodobieństwem a stosunkiem objętości A i Ω :

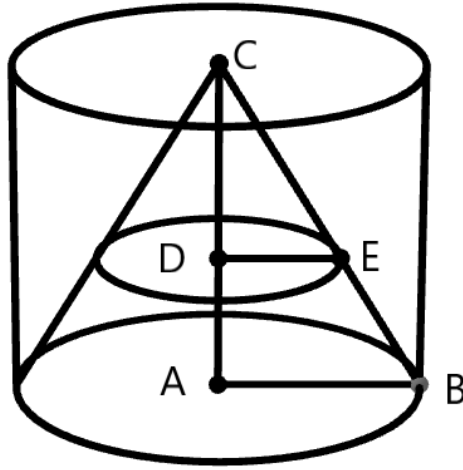
$$\mathbb{P}(A) = \frac{V(A)}{V(\Omega)}.$$

Z tego wynika, że jeżeli będziemy znali wartość $\mathbb{P}(A)$ to będziemy mogli wyznaczyć wzór na objętość stożka. Skupmy się więc na tym.

Możemy sprawdzać czy wylosowany punkt (x, y, z) znajduje się w stożku, patrząc najpierw na współrzędną z , a następnie sprawdzając, czy punkt (x, y, z) znajduje się w poziomym przecięciu stożka na wysokości z . Przekrojem tym jest koło o środku w $(0, 0, z)$ i promieniu $r(z)$.

Długość promienia tego koła zależy od wysokości na której się znajduje. Na Rysunku 22 mamy zależność: $|AB| = R$, $|DE| = r(z)$, $|AC| = Z$ i $|AD| = z$. Zauważmy, że kąty $\angle CAB$ i $\angle CDE$ są kątami prostymi, $\angle ACB$ i $\angle DCE$ to ten sam kąt, a co za tym idzie kąty $\angle CBA$ i $\angle CED$ mają tę samą miarę. Skoro kąty w trójkątach ABC i DEC są takie same, to trójkąty te są do siebie podobne. Możemy zatem obliczyć wzór na $r(z)$ w następujący sposób:

$$\frac{|CD|}{|CA|} = \frac{|DE|}{|AB|},$$



Rysunek 22

$$\begin{aligned}\frac{H-z}{H} &= \frac{r(z)}{R}, \\ 1 - \frac{z}{H} &= \frac{r(z)}{R}, \\ R \left(1 - \frac{z}{H}\right) &= r(z).\end{aligned}$$

Niech Z będzie zmienną losową, której wartość to współrzędna z -towa wylosowanego punktu (x, y, z) . Jej wartości, tak jak współrzędnej z , znajdują się w przedziale $[0, H]$.

Ponieważ jednostajnie losujemy punkt z walca, a walec ma produktową postać, rozkład Z jest jednostajny na przedziale $[0, H]$. To oznacza, że gęstość Z wynosi $f_Z(z) \equiv \frac{1}{H}$.

Obliczmy, dla danej współrzędnej z , jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosowany punkt znajduje się w poziomym przecięciu stożka na wysokości z . Oczywiście jest, że zachodzi równość między owym prawdopodobieństwem, a stosunkiem pola poziomego przecięcia stożka i poziomego pola przecięcia walca na wysokości z :

$$\mathbb{P}(A|Z=z) = \frac{\pi \cdot r(z)^2}{\pi \cdot R^2} = \frac{\pi \cdot \left(\left(1 - \frac{z}{H}\right) \cdot R\right)^2}{\pi \cdot R^2} = \left(1 - \frac{z}{H}\right)^2.$$

Fakt. Obliczanie prawdopodobieństwa za pomocą warunkowania [5] .

$$\mathbb{P}(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(A|B=b) \cdot f_B(b) \, db,$$

gdzie A to zdarzenie losowe, B to ciągła zmienna losowa, a $f_B(b)$ to gęstość prawdopodobieństwa zmiennej losowej B

Wiedząc to możemy obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia A :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(A) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(A \mid Z = z) \cdot f_Z(z) \, dz \\
 &= \int_0^h \mathbb{P}(A \mid Z = z) \cdot \frac{1}{h} dz = \\
 &= \frac{1}{h} \cdot \int_0^h \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 dz = \frac{1}{h} \cdot \int_0^h 1 - 2\frac{z}{h} + \frac{z^2}{h^2} dz = \\
 &= \frac{1}{h} \cdot \left(z - \frac{1}{h} \cdot z^2 + \frac{1}{3} z^3 \cdot \frac{1}{h^2} \right) \Bigg|_0^h = \frac{1}{h} \cdot \left(h - \frac{1}{h} \cdot h^2 + \frac{1}{3} h^3 \cdot \frac{1}{h^2} \right) = \\
 &= \frac{1}{h} \cdot \left(h - h + \frac{1}{3} h \right) = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

Zatem wracając do zależności z początku rozdziału:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3} = \frac{V(A)}{V(\Omega)},$$

$$\frac{1}{3} \cdot V(\Omega) = V(A),$$

$$V(A) = \frac{1}{3} \pi \cdot R^2,$$

W tym rozdziale wyprowadzaliśmy wzór na objętość stożka kołowego. Jednak możemy zastosować ten sam pomysł dla każdego innego stożka. Musimy tylko znać wysokość oraz być w stanie obliczyć pole poziomych przecięć stożka i walca opisanego na tym stożku.

Literatura

- [1] Marek Kordos, *Wykłady z historii matematyki*, WSiP, 1994.
- [2] Marek Kordos, *Całka Eudoksosa*, Delta 7/1989.
- [3] Marek Kordos materiały uzupełniające do wykładu <https://www.mimuw.edu.pl/media/uploads/cms-files/cms-file-wyczerpywanie-materialy-do-wykładu-historia-matematyki.pdf>.
- [4] James Stewart, *Single Variable Calculus: Early Transcendentals, Sixth Edition*, Thomson Learning, 2008.
- [5] Sheldon Ross, *A First Course in PROBABILITY*, 8th edition, Pearson, 2010.
- [6] Piotr Żmijewski, *Twierdzenie Guldina*, Delta 7/2001.
- [7] Jacek Świątkowski, notatki z wykładu https://www.math.uni.wroc.pl/swiatkow/_dydaktyka/geom-elem/zdalne/wykl_obj_ostrosłupow.pdf.
- [8] Michel Roelens, *The Volume of a Pyramid Through the Ages* (strony 63-70 *History and Epistemology in Mathematics Education*), 2007.
- [9] Bartłomiej Czerkas, *Zastosowanie zasady Cavalieriego*, 2013.
- [10] Izabela Król, *Obliczanie pól i objętości metodą Cavalieriego*, 2000.