Uniwersytet Wrocławski
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyczny

Katarzyna Kowalczuk

Od aksjomatów objętości do wzorów na objętość wielościanów

Praca magisterska
napisana pod kierunkiem
prof. dr hab. Jacka Świątkowskiego

Wrocław 2005

Spis treści

Rozdział 1. Aksjomaty objętości dla wielościanów.

W rozdziale tym zostaną wymienione aksjomaty, które będą podstawą rozważań dotyczących objętości wielościanów, zawartych w dalszej części pracy.
Jako *wielościan* będę traktować bryłę, dającą się przedstawić jako sumę skończonej ilości czworościanów. Przykładem wielościanu jest *bryła wielościenna* czyli wielościan wypukły będący częścią wspólną pewnej ilości półprzestrzeni.

Aksjomat jednostki

Dla pewnego ustalonego sześcianu S_0 o krawędzi długości 1, w przestrzeni euklidesowej, objętość tego sześcianu wynosi 1:

$$V(S_0) = 1.$$

Aksjomat przystawania

Jeśli wielościany W_1 i W_2 są przystające, to mają takie same objętości:

$$\text{Jeśli } W_1 \equiv W_2 \text{ to } V(W_1) = V(W_2)$$

Wielościany W_1 i W_2 są *przystające* wtedy, kiedy wyłącznie przy użyciu kombinacji translacji, symetrii płaszczyznowej (odbicia względem płaszczyzny) i obrotu, można jeden wielościan przekształcić na drugi.

Aksjomat sumy

Jeśli wielościan W jest sumą niezachodzących na siebie wielościanów W_1 i W_2, to jego objętość jest sumą objętości wielościanów W_1 i W_2 :

$$\text{Jeśli } W_1, W_2 \text{ nie zachodzą na siebie i } W = W_1 \cup W_2, \text{ to}$$
$$V(W) = V(W_1 \cup W_2) = V(W_1) + V(W_2)$$

Wielościany W_1 i W_2 są *nie zachodzące na siebie* wtedy, kiedy nie posiadają wspólnych punktów wewnętrznych (ich wnętrza są rozłączne).

Aksjomat monotoniczności

Jeśli wielościan W_1 zawiera się w wielościanie W_2 to objętość wielościanu W_1 jest mniejsza bądź równa objętości wielościanu W_2:

$$\text{Jeśli } W_1 \subset W_2, \text{ to } V(W_1) \leq V(W_2)$$

Rozdział 2. Aksjomatyczna teoria objętości dla wielościanów.

W rozdziale tym zostaną wyprowadzone wzory na objętości wybranych wielościanów, począwszy od prostopadłościanów, poprzez graniastosłupy proste, graniastosłupy pochyłe, ostrosłupy, a na ostrosłupach ściętych skończywszy. Wzory te zostaną wyprowadzone wyłącznie z aksjomatów objętości, wymienionych w rozdziale pierwszym, oraz ze Stwierdzeń, które zostaną wcześniej udowodnione. Dowody przeprowadzone będą przy założeniu, że zarówno własności pola figur płaskich jak i podstawowe własności geometrii przestrzennej, jako powszechnie znane, nie wymagają wyjaśnienia ani udowodnienia.

2.1 Prostopadłościany.

Poniżej zostaną wyprowadzone wzory na objętości dowolnych prostopadłościanów. Symbol $a \times b \times c$ użyty w dowodach określać będzie prostopadłościan o wymiarach a, b, c, gdzie a, b, c oznaczają długości krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka.

<u>*Stwierdzenie 2.1. 1:*</u>

Objętość każdego sześcianu o krawędzi 1 wynosi 1.

Dowód:

Dowolny sześcian S, o krawędzi długości 1 jest przystający do sześcianu S_0. Powołując się na aksjomat jednostki i aksjomat przystawania możemy zapisać:

$$V(S) = V(S_0) = 1,$$

czyli $V(S) = 1$, co kończy dowód Stwierdzenia 2. 1. 1.

<u>*Stwierdzenie 2. 1. 2:*</u>

Jeśli wielościany $W_1, W_2, \ldots, W_n$ nie zachodzą na siebie to:

$$V(W_1 \cup W_2 \cup \ldots \cup W_n) = V(W_1) + V(W_2) + \ldots + V(W_n)$$

Zauważmy, że Stwierdzenie 2. 1. 2 jest uogólnieniem aksjomatu sumy, na przypadek sumy n niezachodzących na siebie wielościanów, gdzie $n > 2$.

Dowód indukcyjny:

I krok indukcyjny:

Dla $n = 2$ stwierdzenie jest prawdziwe na mocy aksjomatu sumy.

II krok indukcyjny:

Załóżmy, że równość: $V = V(W_1) + V(W_2) + \ldots + V(W_n)$ dotycząca n niezachodzących na siebie wielościanów jest prawdziwa.

Sprawdźmy czy podobny wzór zachodzi dla $n + 1$ niezachodzących na siebie wielościanów. Jeśli $W_1, \ldots, W_n, W_{n+1}$ będą niezachodzącymi na siebie wielościanami oraz $W = W_1 \cup \ldots \cup W_n$, wtedy wielościany W i W_{n+1} również nie będą zachodzić na siebie. Wykorzystując aksjomat sumy możemy zapisać:

$$V(W_1 \cup \ldots \cup W_n) = V(W \cup W_{n+1} = V(W) + V(W_{n+1}) =$$
$$V(W_1 \cup \ldots \cup W_n) + V(W_{n+1}) = V(W_1) + \ldots + V(W_n) + V(W_{n+1})$$

Z powyższych rachunków wynika, że Stwierdzenie 2. 1. 2 jest prawdziwe.

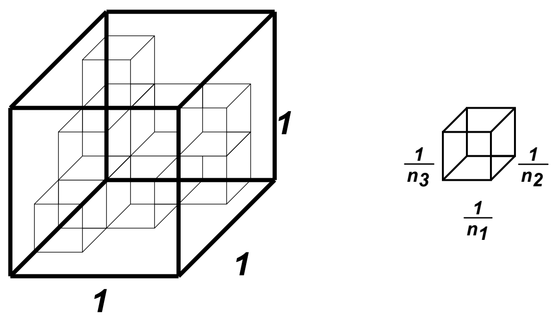
Stwierdzenie 2. 1. 3:

Dla prostopadłościanu P o wymiarach $\frac{1}{n_1} \times \frac{1}{n_2} \times \frac{1}{n_3}$, gdzie $n_1, n_2, n_3 \in N$:

$$V(P) = \frac{1}{n_1 n_2 n_3}.$$

Dowód:

Do dowodu powyższego stwierdzenia potrzebny nam będzie jednostkowy sześcian S. Powstanie on z dodania do siebie, przystających oraz niezachodzących na siebie prostopadłościanów P.



Zauważmy, że sześcian S składa się z n_3 warstw będących prostopadłościanami P_1 o wymiarach $1 \times 1 \times \frac{1}{n_3}$. Każdy z prostopadłościanów P_1 zbudowany jest z $n_1 \cdot n_2$ niezachodzących na siebie prostopadłościanów P. Tak więc na budowę sześcianu S zużyliśmy $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3$ prostopadłościanów P.

Korzystając ze Stwierdzenia 2. 1. 1 i Stwierdzenia 2. 1. 2 otrzymamy:

$$V(S) = V(1 \times 1 \times 1) = V(\frac{1}{n_1} \times \frac{1}{n_2} \times \frac{1}{n_3} + \ldots + \frac{1}{n_1} \times \frac{1}{n_2} \times \frac{1}{n_3}) =$$

$$V(\frac{1}{n_1} \times \frac{1}{n_2} \times \frac{1}{n_3}) + \ldots + V(\frac{1}{n_1} \times \frac{1}{n_2} \times \frac{1}{n_3}) = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot V(\frac{1}{n_1} \times \frac{1}{n_2} \times \frac{1}{n_3})$$

Przyrównując do siebie obie strony równania uzyskamy następującą równość:

$$1 = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot V(\frac{1}{n_1} \times \frac{1}{n_2} \times \frac{1}{n_3}).$$

Po przekształceniu będzie ona miała postać $V(\frac{1}{n_1} \times \frac{1}{n_2} \times \frac{1}{n_3}) = \frac{1}{n_1 n_2 n_3}$. Tak więc $V(P) = V(\frac{1}{n_1} \times \frac{1}{n_2} \times \frac{1}{n_3}) = \frac{1}{n_1 n_2 n_3}$, co kończy dowód Stwierdzenia 2. 3.

Stwierdzenie 2. 1. 4:

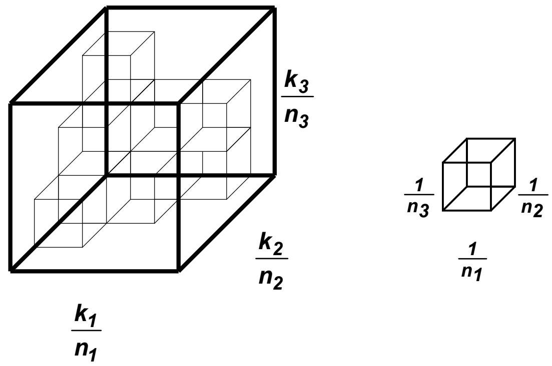
Dla prostopadłościanu M o wymiarach $\frac{k_1}{n_1} \times \frac{k_2}{n_2} \times \frac{k_3}{n_3}$, gdzie $k_1, k_2, k_3 \in N$:

$$V(M) = \frac{k_1 \cdot k_2 \cdot k_3}{n_1 \cdot n_2 \cdot n_3}$$

Dowód:

Aby przeprowadzić dowód musimy z przystających i niezachodzących na siebie prostopadłościanów P o wymiarach $\frac{1}{n_1} \times \frac{1}{n_2} \times \frac{1}{n_3}$, gdzie $n_1, n_2, n_3 \in N$, zbudować prostopadłościan M. Zauważmy, że prostopadłościan M jest sumą k_3 warstw, gdzie każda warstwa jest prostopadłościanem P_1 o wymiarach $k_1 \times k_2 \times \frac{1}{n_3}$. Prostopadłościany P_1 zbudowane są z $k_1 \cdot k_2$ prostopadłościanów P.

Podsumowując na budowę prostopadłościanu M zużyliśmy $k_1 \cdot k_2 \cdot k_3$ prostopadłościanów P.



Korzystając ze Stwierdzenia 2. 1. 3 otrzymujemy poniższą równość:

$$V(\frac{k_1}{n_1} \times \frac{k_2}{n_2} \times \frac{k_3}{n_3}) = V(\frac{1}{n_1} \times \frac{1}{n_2} \times \frac{1}{n_3}) + ... + V(\frac{1}{n_1} \times \frac{1}{n_2} \times \frac{1}{n_3}) =$$

$$k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot V(\frac{1}{n_1} \times \frac{1}{n_2} \times \frac{1}{n_3}) = k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot \frac{1}{n_1 n_2 n_3} = \frac{k_1 \cdot k_2 \cdot k_3}{n_1 \cdot n_2 \cdot n_3},$$

wynika z niej, że: $V(M) = \frac{k_1 \cdot k_2 \cdot k_3}{n_1 \cdot n_2 \cdot n_3}$, co kończy dowód Stwierdzenia 2. 1. 4.

Wniosek 2. 1. 5:

Dla prostopadłościanu R, o krawędziach długości a, b, c, gdzie $a, b, c \in Q$

$$V(R) = abc$$

Dowód:

Skoro $a, b, c \in Q$, to $a = \frac{p_1}{q_1}$, $b = \frac{p_2}{q_2}$, $c = \frac{p_3}{q_3}$, gdzie $p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3 \in N$.

Wykorzystując Stwierdzenie 2. 4 możemy zapisać:

$$V(a \times b \times c) = V(\frac{p_1}{q_1} \times \frac{p_2}{q_2} \times \frac{p_3}{q_3}) = \frac{p_1 \cdot p_2 \cdot p_3}{q_1 \cdot q_2 \cdot q_3} = \frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} \cdot \frac{p_3}{q_3} = abc$$

Z powyższej równości wynika, że $V(R) = abc$, co kończy dowód Wniosku 2. 1. 5.

Stwierdzenie 2.1. 6:

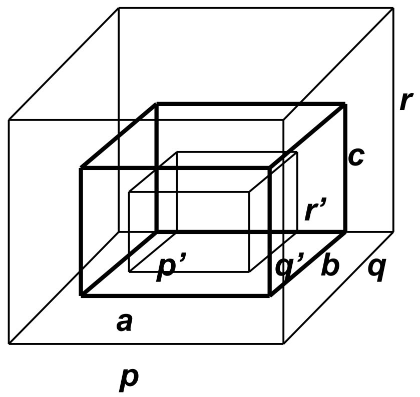
Dla prostopadłościanu D o krawędziach a, b, c dowolnej długości objętość wynosi:

$$V(D) = abc.$$

Stwierdzenie to jest uogólnieniem Wniosku 2. 1. 5 na przypadek prostopadłościanu o krawędziach dowolnej długości. W dowodzie tego Stwierdzenia po raz pierwszy będzie wykorzystany aksjomat monotoniczności.

Dowód:

W prostopadłościan D włóżmy prostopadłościan P_2 o wymiarach $p'\times q'\times r'$, następnie całość włóżmy w prostopadłościan P_1 o wymiarach $p\times q\times r$ gdzie $p, q, r, p', q', r' \in Q$ oraz $p < a < p', q < b < q', r < c < r'$.



Wiemy, że: $V(P_1) = pqr$ oraz $V(P_2) = p'q'r'$. Korzystając z aksjomatu monotoniczności uzyskujemy nierówności: $V(P_1) \leq V(D) \leq V(P_2)$, czyli $pqr \leq V(D) \leq p'q'r'$. Jeśli krawędzie prostopadłościanu P_1 będziemy zmniejszać, tak by $p\to a, q\to b, r\to c$, a krawędzie prostopadłościanu P_2 będziemy zwiększać, tak by $p'\to a, q'\to b, r'\to c$, to:

$$\lim_{\substack{p\to a\\ q\to b\\ r\to c}} pqr \leq V(D) \leq \lim_{\substack{p'\to a\\ q'\to b\\ r'\to c}} p'q'r' \Rightarrow abc \leq V(D) \leq abc,$$

z nierówności tych wynika, że $V(D) = abc$, co kończy dowód Stwierdzenia 2. 1. 6

2.2 Graniastosłupy proste.

Poniżej zostaną wyprowadzone wzory na objętości graniastosłupów prostych o podstawach będących dowolnym wielokątem. W dowodach korzystać będę z aksjomatów i Stwierdzeń udowodnionych w poprzednim rozdziale.

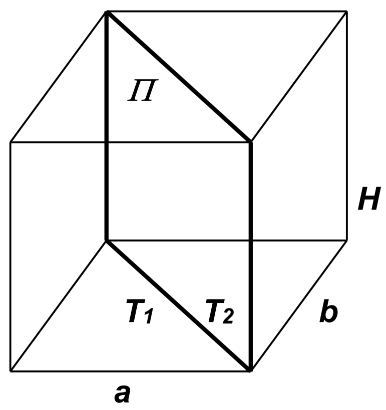
<u>*Stwierdzenie 2.2. 7:*</u>

Jeśli T jest graniastosłupem prostym o wysokości H i o podstawie będącej trójkątem prostokątnym, którego przyprostokątne mają długość a i b, to

$$V(T) = \frac{1}{2}abH$$

Dowód:

Niech W będzie prostopadłościanem o krawędziach długości $a, b, H.$ Podzielmy go płaszczyzną Π prostopadłą do podstaw i zawierającą ich przekątną. Uzyskamy w ten sposób dwa wielościany T_1 i T_2, o podstawach będących trójkątami prostokątnymi. Jeśli wielościan T_2 obrócimy wokół prostej prostopadłej do podstawy, przechodzącej przez środek przekątnej podstawy, to otrzymamy wielościan T_1. Oznacza to, że te dwa wielościany są przystające i są one przystające do graniastosłupa T.



Korzystając ze stwierdzenia 2. 1. 6 otrzymujemy, że:

$$abH = V(W) = V(T \cup T) = V(T) + V(T) = 2V(T).$$

Z faktu, że $abH = 2V(T)$ wynika: $V(T) = \frac{1}{2}abH$, co kończy dowód.

Stwierdzenie 2.2. 8:

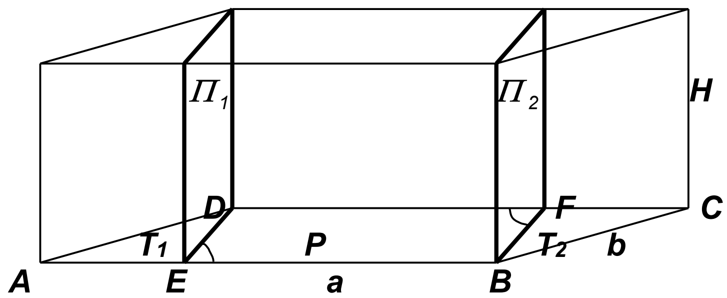
Jeśli R jest graniastosłupem prostym o wysokości H i o podstawie będącej równoległobokiem, którego boki mają długość a i b, gdzie $a \geq b$, to

$$V(R) = P_p H,$$

gdzie P_p jest polem podstawy .

Dowód:

Przyjmijmy, że: $P_p = ar$, gdzie r jest wysokością podstawy opuszczoną na bok a, oraz $a = |AB| = |CD|$, $b = |AD| = |BC|$, $r = |DE| = |BF|$. Graniastosłup R podzielmy płaszczyznami Π_1 i Π_2 prostopadłymi do jego podstaw, takimi że Π_1 zawiera odcinek DE, a płaszczyzna Π_2 odcinek BF.



Otrzymamy w ten sposób dwa graniastosłupy T_1 i T_2 oraz prostopadłościan P. Graniastosłupy T_1 i T_2 są przystające gdyż mają jednakowe wysokości, a ich podstawy są przystającymi do siebie trójkątami, oznaczmy je przez T . Zauważmy, że graniastosłup T ma wysokość H, a jego podstawą jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości $|AE|$ i $|DE|$. Prostopadłościan P ma wysokość H, a jego podstawą jest prostokąt o bokach długości $|EB|$ i $|DE|$.

Korzystając ze Stwierdzenia 2. 1. 2, Stwierdzenie 2. 1. 6 oraz Stwierdzenia 2.2. 7 możemy zapisać:

$$V(R) = V(T \cup P \cup T) = V(T) + V(P) + V(T) = V(P) + 2V(T) = |BE| \cdot |DE| \cdot H +$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot |AE| \cdot |DE| \cdot H = (|BE| + |AE|) \cdot |DE| \cdot H = |AB| \cdot |DE| \cdot H = arH = P_pH$$

W przypadku gdy s jest wysokością podstawy opuszczoną na krótszy bok b, objętość graniastosłupa dalej wynosi P_pH. Dzieje się tak dlatego, że obie wielkości bs i ar są równe polu równoległoboku będącego podstawą graniastosłupa R, a więc $bs = ar = P_p$. Tak więc objętość graniastosłupa, którego podstawą jest równoległobok wynosi P_pH.

<u>*Stwierdzenie 2.2. 10:*</u>

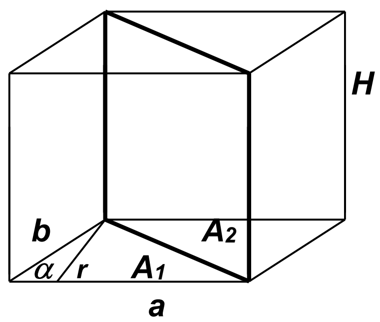
Jeśli A jest graniastosłupem prostym o wysokości H, którego podstawa jest dowolnym trójkątem o bokach a, b i kącie α między nimi to:

$$V(A) = P_pH$$

gdzie P_p jest polem podstawy.

Dowód:

Niech graniastosłup R będzie graniastosłupem o wysokości H, którego podstawą jest równoległobok o bokach długości a, b i kącie α zawartym miedzy tymi bokami.



Podzielmy ten graniastosłup płaszczyzną prostopadłą do jego podstawy, zawierającą taką przekątną równoległoboku, która nie przecina kąta α. W wyniku tego podziału otrzymamy dwa graniastosłupy A_1 i A_2, każdy o wysokości H. Podstawy tych graniastosłupów są przystającymi do siebie trójkątami, świadczy to o tym, że graniastosłupy A_1 i A_2 są przystające do siebie. Załóżmy, że są one przystające do graniastosłupa A. Opierając się na Stwierdzeniu 2. 2. 8 możemy zapisać:

$$arH = V(R) = V(A+A) = V(A) + V(A) = 2V(A),$$

więc $V(A) = \frac{1}{2} arH = P_pH$, co kończy dowód Stwierdzenia 2. 2. 10.

Stwierdzenie 2.2. 11:

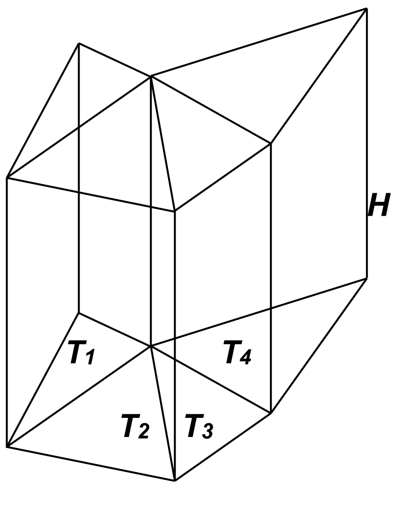
Jeśli W jest graniastosłupem prostym o wysokości H, którego podstawa jest dowolnym wielokątem to:

$$V(W) = P_p H,$$

gdzie P_p jest polem podstawy.

Dowód:

Podstawę graniastosłupa W podzielmy na niezachodzące na siebie trójkąty. Załóżmy, że w wyniku takiego podziału powstanie n trójkątów. Oznaczmy je przez T_n, natomiast ich pola przez P_n. Przez boki tych trójkątów poprowadźmy płaszczyzny prostopadłe do podstawy graniastosłupa W. Płaszczyzny te podzielą nam nasz wielościan na n graniastosłupów, z których każdy ma wysokość H i podstawę będącą trójkątem T_n.



Korzystając ze Stwierdzenia 2. 1. 2 i 2. 2. 10 przy założeniu, że $W = T_1 \cup \ldots \cup T_n$, a $P_p = P_1 + \ldots + P_n$, możemy zapisać:

$$V(W) = V(T_1 \cup \ldots \cup T_n) = V(T_1) + \ldots + V(T_n) = P_1H + \ldots + P_nH =$$
$$(P_1 + \ldots + P_n) \cdot H = P_pH$$

Z powyższej równości wynika, że $V(W) = P_p H$ co kończy dowód.

2.3 Graniastosłupy pochyłe.

Poniżej zostaną wyprowadzone wzory na objętości graniastosłupów pochyłych. W dowodach wykorzystane będą aksjomaty objętości dla wielościanów oraz udowodnione w poprzednich stwierdzeniach wzory.

<u>*Stwierdzenie 2. 3. 12:*</u>

Jeśli W jest graniastosłupem pochyłym, o wysokości H i podstawie będącej prostokątem o bokach długości a i b to:

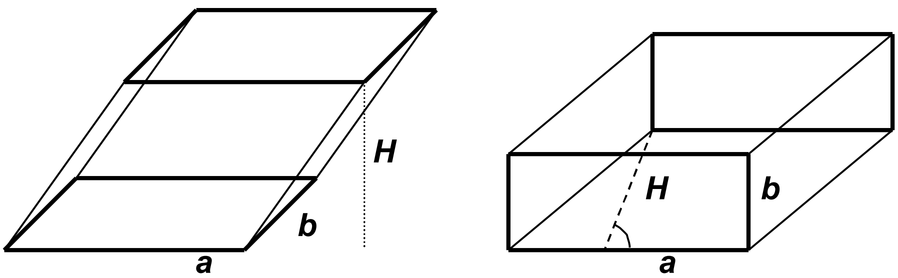
$$V(W) = P_pH$$

gdzie P_p jest polem podstawy.

Dowód:

Przypadek I: Graniastosłup W posiada tylko jedną parę ścian pochyłych.

Dany graniastosłup W obracamy w taki sposób, by jego podstawy stały się ścianami bocznymi, a ściany które były prostopadłe do płaszczyzny stały się podstawami.



Oznaczmy powstały graniastosłup przez W'. Jest on graniastosłupem prostym o wysokości b, podstawie będącej równoległobokiem o boku długości a i wysokości H opuszczonej na ten bok. Pole podstawy graniastosłupa W' wynosi aH. Oba graniastosłupy W i W' mają jednakowa objętość.

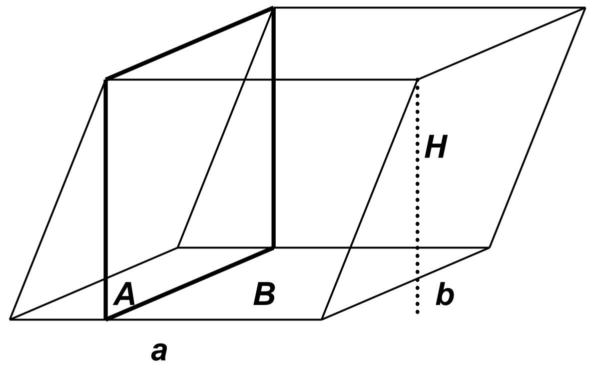
Wykorzystując Stwierdzenie 2. 2. 8 i aksjomat przystawania możemy zapisać:

$$V(W) = V(W') = aHb = abH = P_pH,$$

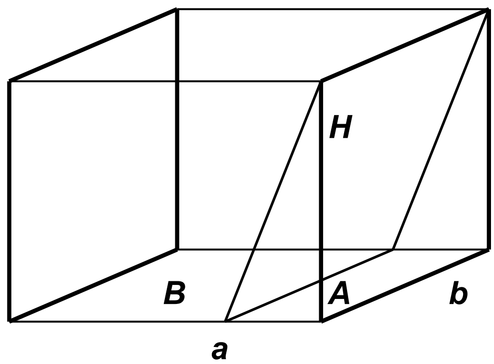
a więc $V(W) = P_pH.$

Przypadek II: Graniastosłup W posiada dwie pary ścian pochyłych, a jego wysokość w całości zawiera się w jego wnętrzu.

Dany graniastosłup W przecinamy płaszczyzną pionową, zawierającą tą z krawędzi podstawy górnej, przy której kąt dwuścienny ma miarą większą niż $90°$. Otrzymamy w ten sposób dwie bryły: A i B, które mają jednakową wysokość H.



Łączymy bryły A i B w taki sposób jak na poniższym rysunku.



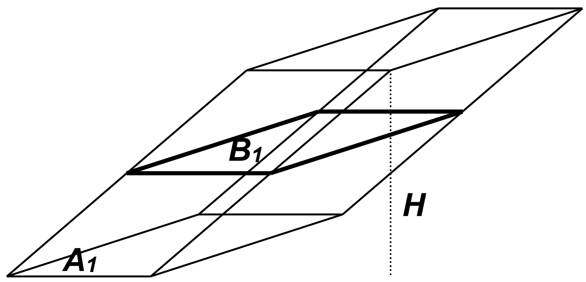
W wyniku tego przekształcenia, podstawy graniastosłupów znajdą się w jednej płaszczyźnie i utworzą prostokąt przystający do prostokąta będącego podstawą graniastosłupa pochyłego W. Oznaczmy powstały graniastosłup przez M. Ma on tylko jedną parę ścian pochyłych, jego podstawą jest prostokąt o bokach a i b, a jego wysokość wynosi H. Jego objętość jest taka sama jak objętość graniastosłupa W. Postępując tak jak w pierwszym podpunkcie dowodu otrzymujemy:

$$V(W) = V(A \cup B) = V(A) + V(B) = V(M) = P_pH,$$

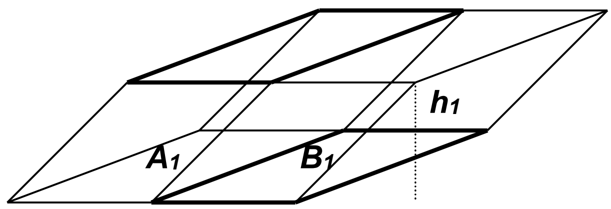
a więc $V(W) = P_pH$.

Przypadek III: Graniastosłup W posiada dwie pary ścian pochyłych, a jego wysokość nie zawiera się w jego wnętrzu.

Podzielmy graniastosłup W płaszczyzną równoległą do płaszczyzny podstawy i przecinającą jego wysokość w połowie długości. Uzyskamy w ten sposób dwa graniastosłupy pochyłe A_1 i B_1, z każdy o wysokości $h_1 = \frac{1}{2}H$ i podstawię będącą prostokątem o bokach długości a i b.



Graniastosłupy A_1 i B_1 są przystające gdyż poprzez translację o odpowiedni wektor możemy przekształcić jeden na drugi. Połączmy graniastosłupy A_1 i B_1 tak jak na poniższym rysunku, a otrzymany graniastosłup pochyły oznaczmy przez W_1.



Jeśli wysokość h_1 nie zawiera się we wnętrzu W_1, to przecinamy powstały graniastosłup płaszczyzną równoległą do płaszczyzny podstawy i przecinającą jego wysokość w połowie jej długości. Postępujemy w ten sposób tak długo aż wysokość h_i będzie zawierać się we wnętrzu graniastosłupa pochyłego W_i. Podstawą graniastosłupa W_i jest prostokąt o bokach długości $2^i \cdot a$ i b, a $h_i = \frac{H}{2^i}$. Postępując podobnie jak we wcześniejszych przypadkach możemy zapisać, że:

$$V(W) = V(A_1 \cup B_1) = V(A_2 \cup B_2) = ... = V(A_i \cup B_i) = 2^i \cdot a \cdot b \cdot \frac{H}{2^i} = abH = P_pH,$$

a więc $V(W) = P_pH$, co kończy dowód Stwierdzenia 2. 3. 12.

<u>Stwierdzenie 2. 3. 13:</u>

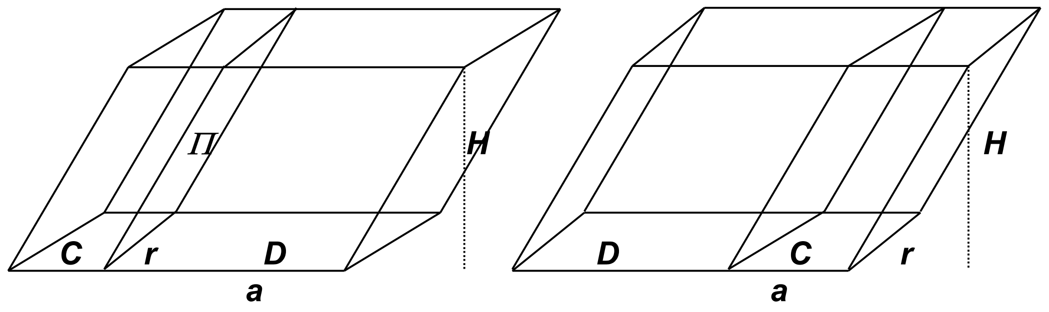
Jeśli K jest graniastosłupem pochyłym o wysokości H i podstawie będącej równoległobokiem o bokach długości a i b, to:

$$V(K) = P_p H,$$

gdzie P_p jest polem podstawy.

Dowód:

Oznaczmy przez a dłuższy bok równoległoboku będącego podstawą graniastosłupa K, zaś przez r wysokość podstawy opuszczoną na ten bok. Graniastosłup K przetnijmy pod takim kątem płaszczyzną Π zawierającą r, by przekrój płaszczyzny z graniastosłupem znalazł się wewnątrz bryły.



W wyniku takiego przecięcia otrzymamy dwa graniastosłupy pochyłe C i D, każdy o wysokości H. Przesuwamy graniastosłup C o odpowiedni wektor tak jak na powyższym rysunku. Po połączeniu graniastosłupa C z graniastosłupem D otrzymamy graniastosłup pochyły B o wysokości H i podstawie będącej prostokątem o bokach długości a i r. Graniastosłup B i graniastosłup K mają jednakowe objętości, gdyż są sumą jednakowych wielościanów.

Korzystając ze Stwierdzenia 2. 3. 12 możemy zapisać, że:

$$V(K) = V(C \cup D) = V(B) = arH,$$

a więc $V(K) = arH = P_p H$, co kończy dowód Stwierdzenia 2. 3. 13

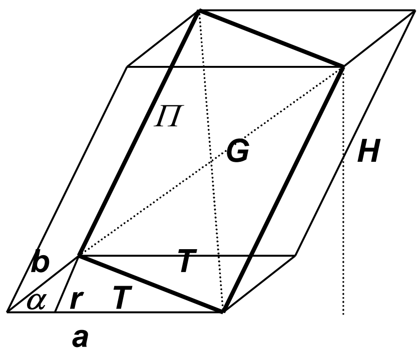
<u>Stwierdzenie 2. 3. 14:</u>

Jeśli A jest graniastosłupem pochyłym o wysokości H i podstawie będącej dowolnym trójkątem o polu P to :

$$V(W) = P_pH$$

Dowód:

Oznaczmy przez a i b boki trójkąta T, zaś przez α kąt pomiędzy nimi. Kąt jaki tworzy ściana boczna zawierająca a z płaszczyzną podstawy oznaczmy przez β, a przez λ kąt jaki tworzy ściana boczna zawierająca b z płaszczyzną podstawy. Niech Z będzie graniastosłupem pochyłym o wysokości H i podstawie będącej równoległobokiem o bokach długości a, b i kącie α miedzy nimi. Niech kąt miedzy płaszczyzną podstawy a ścianą boczną zawierająca bok a wynosi β, a kąt między płaszczyzna podstawy a ścianą boczną zawierająca b wynosi λ. Przetnijmy graniastosłup Z płaszczyzną Π, zawierającą takie przekątne podstaw, które nie przecinają kata α. Powstaną nam dwa graniastosłupy pochyłe A_1 i A_2, każdy o wysokości H i podstawie będącej trójkątem T. Oznaczmy przez G punkt przecięcia się przekątnych równoległoboku, będącego przekrojem płaszczyzny Π z graniastosłupem Z. Symetria środkowa względem punktu G pokazuje, że graniastosłupy A_1 i A_2 przystają do siebie. Oznaczmy je przez A.



Korzystając ze Stwierdzenia 2. 3. 13 otrzymamy:

$$V(Z) = V(A \cup A) = V(A) + V(A) = 2V(A)$$

$$V(A) = \frac{1}{2}V(Z) = \frac{1}{2}arH = P_pH,$$

a więc $V(A) = P_pH$, co kończy dowód.

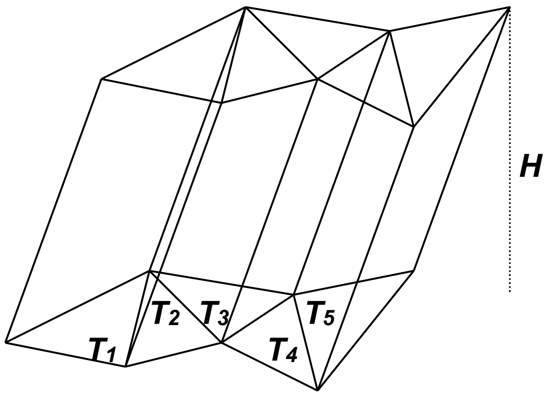
Stwierdzenie 2.3. 15:

Dla graniastosłupa pochyłego M o wysokości H i dowolnej podstawie o polu P_p

$$V(M) = P_pH,$$

Dowód:

Podzielmy jedną z podstaw graniastosłupa M na niezachodzące na siebie trójkąty. Załóżmy, że w wyniku podziału powstanie n trójkątów o polu P_n. Drugą podstawę graniastosłupa podzielmy w taki sam sposób. Następnie przez odpowiednie boki powstałych trójkątów poprowadźmy płaszczyzny. Płaszczyzny te podzielą nam nasz wielościan na n graniastosłupów pochyłych $T_1, \ldots, T_n$, z których każdy będzie miał wysokość H i podstawę będącą trójkątem o polu P_i.



Przy założeniu, że $M = T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_n$, a $P_p = P_1 + P_2 + \ldots + P_n$ oraz korzystając ze Stwierdzenia 2. 1. 2 i Stwierdzenia 2. 3. 14 uzyskamy:

$$V(M) = V(T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_n) = V(T_1) + V(T_2) + \ldots + V(T_n) =$$
$$P_1H + P_2H + \ldots + P_nH = (P_1 + P_2 + \ldots + P_n) \cdot H = P_pH,$$

a wiec $V(M) = P_pH,$ co kończy dowód Stwierdzenia 2. 3. 16.

2. 4 Ostrosłupy.

Poniżej zostanie udowodniony wzór na objętość ostrosłupa o dowolnej podstawie. W dowodzie tym w ostrosłup będziemy wpisywać coraz większe bryły i w ten sposób przybliżymy objętość ostrosłupa „od dołu". Wpisując ostrosłup w coraz mniejsze bryły przybliżymy jego objętość „od góry". Obliczając granicę objętości odpowiednich brył udowodnimy wzór na objętość ostrosłupa.

Stwierdzenie 2. 4. 17:

Jeśli K jest ostrosłupem o wysokości H i podstawie będącej dowolnym wielokątem W, to:

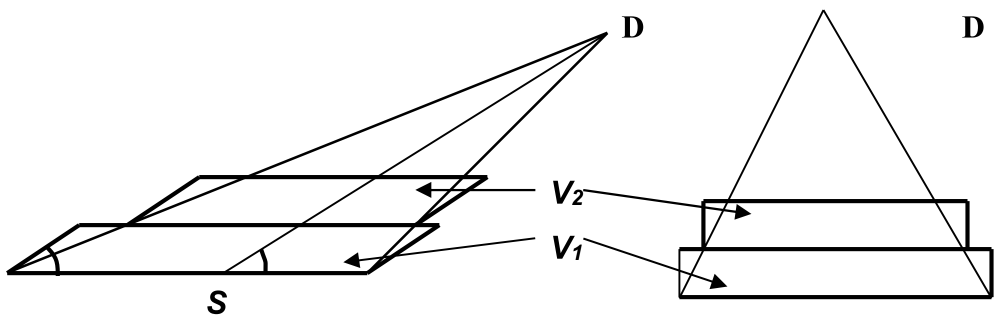
$$V(K) = \frac{1}{3}PH$$

gdzie P jest polem podstawy.

Dowód:

Aby obliczyć objętość ostrosłupa K potrzebne nam będą dwie bryły pomocnicze. Oznaczmy przez U „bryłę wewnętrzną", która w całości będzie zawierać się w ostrosłupie K, przez V natomiast „bryłę zewnętrzną", w której ostrosłup K będzie zawierać się w całości. Korzystając z aksjomatu monotoniczności możemy objętość ostrosłupa K przybliżać z dowolnie dużą dokładnością objętościami brył „zewnętrznych" i „wewnętrznych", gdyż : $V(U) \leq V(K) \leq V(U)$. W celu znalezienia brył U i V podzielmy wysokość ostrosłupa K na n równych części, gdzie n jest dowolne. Przyjmijmy, że Π_0 jest płaszczyzną zawierającą podstawę ostrosłupa. Równolegle do niej w odległości $\frac{H}{n}$ poprowadźmy płaszczyznę Π_1, następnie w odległości $\frac{H}{n}$ od Π_1 poprowadźmy równoległą do niej płaszczyznę Π_2. Postępując dalej w taki sposób otrzymamy n płaszczyzn, równoległych do Π_0 gdzie Π_n przechodzi przez wierzchołek ostrosłupa, a każde dwie kolejne płaszczyzny są oddalone od siebie o $\frac{H}{n}$. Oznaczmy przez F_m wielokąt powstały w wyniku przecięcia ostrosłupa płaszczyzną Π_m dla $m = 0, 1, ..., n$. Zbudujmy n graniastosłupów, z których każdy będzie miał wysokości $\frac{H}{n}$, a ich podstawami będą odpowiednie wielokąty F_m. Podstawą pierwszego graniastosłupa będzie F_0, podstawą drugiego F_1, n - tego F_{n-1}.

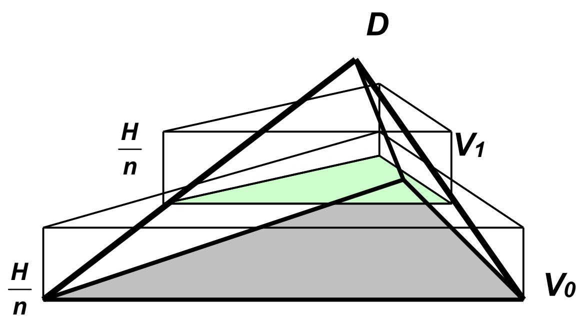
Oznaczmy przez V_m graniastosłup, którego podstawą jest figura F_m dla $m = 0, 1, \ldots, n - 1$. Niech każdy graniastosłup V_m zawiera w sobie fragment ostrosłupa K, znajdujący się pomiędzy płaszczyznami Π_m a Π_{m+1}. Aby ten warunek został spełniony musimy ustalić pochyłość graniastosłupów. W przypadku gdy spodek wysokości ostrosłupa znajduje się w jego wnętrzu, powstałe graniastosłupy będą graniastosłupami prostymi. W przypadku ostrosłupa, którego spodek wysokości znajduje się na zewnątrz, powstałe graniastosłupy V_m będą pochyłe, a ich krawędzie boczne będą równoległe do odcinka SD, powstałego przez połączenie wierzchołka D z dowolnym punktem S leżącym wewnątrz figury F_0 .



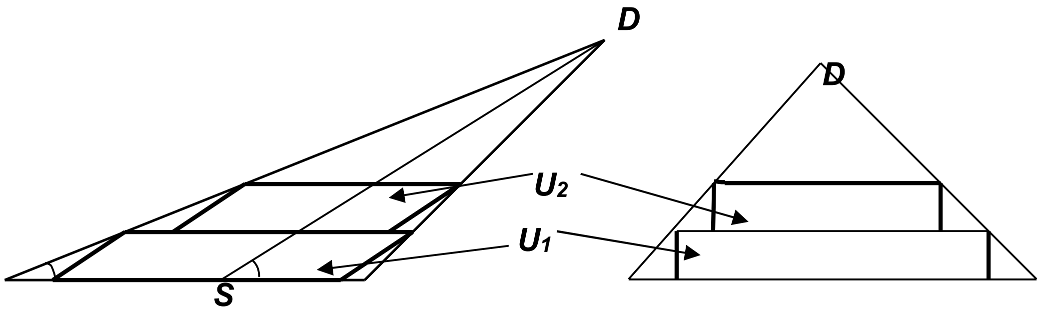
Schematyczne rysunki ostrosłupów i brył zewnętrznych

Bryłę powstałą z dodania do siebie graniastosłupów V_k oznaczmy jako V^n, czyli:

$$V^n = V_0 \cup V_1 \cup \ldots \cup V_{n-1}$$



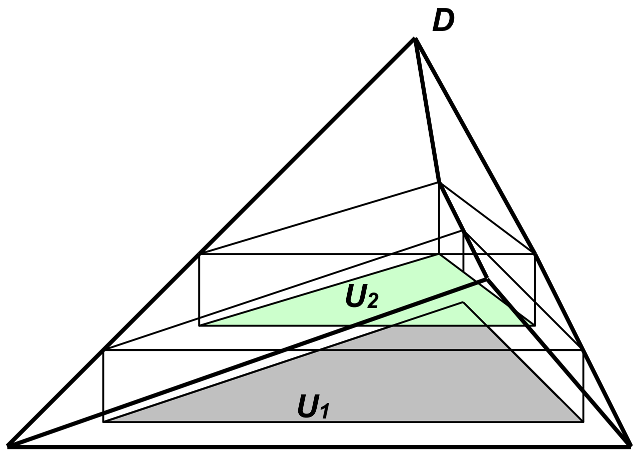
Następnie zbudujmy $n - 1$ graniastosłupów, z których każdy będzie miał wysokość $\frac{H}{n}$, a ich górnymi podstawami będą odpowiednie wielokąty F_m. Górną podstawą pierwszego graniastosłupa będzie wielokąt F_1, górną podstawą drugiego F_2, ostatniego F_{n-1}. Graniastosłup, którego podstawą jest F_m oznaczmy przez U_m, dla $m = 1, \ldots, n - 1$. Niech każdy graniastosłup U_m zawiera się we fragmencie ostrosłupa K, znajdującego się pomiędzy płaszczyznami Π_{m-1} i Π_m. Aby ten warunek był spełniony ustalamy pochyłość graniastosłupów U_m postępując podobnie jak w przypadku graniastosłupów V_m.



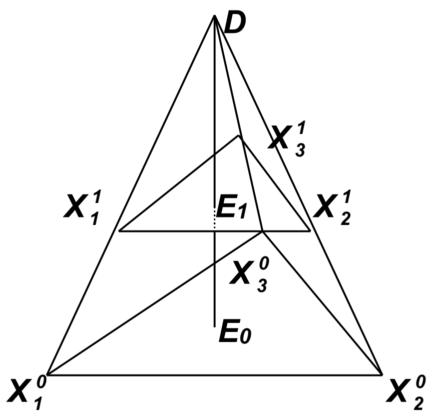
Schematyczne rysunki ostrosłupów i brył wewnętrznych

Bryłę powstałą z dodania do siebie graniastosłupów U_m oznaczmy jako U^n, czyli:

$$U^n = U_1 \cup U_2 \ldots \cup U_{n-1}$$



Objętości powstałych brył pozwolą nam oszacować objętość ostrosłupa K, gdyż: $V(U^n) \leq V(K) \leq V(V^n)$. Zauważmy, że na mocy aksjomatu monotoniczności objętość bryły U^n przybliża nam objętość ostrosłupa K z dołu, natomiast objętość V^n przybliża nam objętość ostrosłupa K z góry. Liczba podziałów wysokości ostrosłupa K na n części może być dowolnie duża, a dla coraz większych n przybliżenie objętości ostrosłupa K będzie dokładniejsze. Obliczmy jakimi wielkościami są objętości U^n i V^n.
Zauważmy, że wielokąty F_m powstałe w wyniku przecięcia ostrosłupa K płaszczyznami Π_m są obrazami wielokąta F_0 przez odpowiednią jednokładność w przestrzeni względem wierzchołka D.



Oznaczmy przez X_m^i wierzchołki wielokąta F_m, będącego przekrojem ostrosłupa K z płaszczyzną Π_i. Przez E_m oznaczmy punkt, w którym wysokość ostrosłupa K przecina wielokąt F_m. Zauważmy, że wielokąty F_m są podobne. Dla $m = s$ i $m = t$ takich, że $s \neq t$ zachodzi równość: $\frac{\overline{X_s^i E_s}}{\overline{DE_s}} = \frac{\overline{X_n^i E_n}}{\overline{DE_n}} = k$, gdzie k jest skalą podobieństwa.

Po przekształceniu wzoru otrzymamy: k = $\frac{\overline{DE_n}}{\overline{DE_s}}$, zauważmy, że $\overline{DE_n}$ określa odległości płaszczyzny zawierającej figurę F_n od wierzchołka D, natomiast $\overline{DE_s}$ określa odległości płaszczyzny zawierającej figurę F_s od wierzchołka D. W wyniku podziału wysokości H ostrosłupa K na n części powstanie n wielokątów podobnych. Oznaczmy przez P_0 pole wielokąta F_0, przez P_1 pole wielokąta F_1, przez P_{n-1} pole wielokąta F_{n-1}. Korzystając z podobieństwa figur i własności, że stosunek pól figur podobnych do siebie w skali k jest równy k^2, przedstawmy pola kolejnych figur za pomocą pola P_0.

$$\frac{P_1}{P_0} = \left[\frac{(n-1)\frac{H}{n}}{H}\right]^2 \Rightarrow P_1 = \frac{P_0 \cdot (n-1)^2}{n^2},$$

$$\frac{P_2}{P_0} = \left[\frac{(n-2)\frac{H}{n}}{H}\right]^2 \Rightarrow P_2 = \frac{P_0 \cdot (n-2)^2}{n^2},$$

...

$$\frac{P_{n-2}}{P_0} = \left[\frac{2 \cdot \frac{H}{n}}{H}\right]^2 \Rightarrow P_{n-2} = \frac{P_0 \cdot 2^2}{n^2},$$

$$\frac{P_{n-1}}{P_0} = \left[\frac{1 \cdot \frac{H}{n}}{H}\right]^2 \Rightarrow P_{n-1} = \frac{P_0 \cdot 1^2}{n^2},$$

Objętość bryły V^n jest sumą objętości graniastosłupów V_t dla $t = 0, 1, ..., n\text{-}1:$

$$V(V^n) = V(V_0) + V(V_1) + ... + V(V_{n-1}) = \frac{H}{n} \cdot P_0 + \frac{H}{n} \cdot P_1 + ... + \frac{H}{n} \cdot P_{n-1} =$$

$$\frac{H}{n}(P_0 + P_1 + ... + P_n) = \frac{H}{n}\left(P_0 \cdot \frac{n^2}{n^2} + P_0 \cdot \frac{(n-1)^2}{n^2} + ... + P_0 \cdot \frac{1^2}{n^2}\right) =$$

$$\frac{P_0 \cdot H}{n^3}(n^2 + (n - 1)^2 + ... + 1^2).$$

Do obliczenia wyrażenia znajdujące się w nawiasie stosujemy wzór na sumę kwadratów kolejnych liczb naturalnych: $1^2 + 2^2 + ... + w^2 = \frac{w(w+1)(2W+1)}{6}$.

$$V(V^n) = \frac{P_0 \cdot H}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{P_0 \cdot H}{6} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3}.$$

Wielkości P_0 i H są niezmienne, natomiast wielkość n dąży do nieskończoności.

$$lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3} = lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{n^3} = 2.$$

Tak wiec: $lim_{n\to\infty} V^n = \frac{P_0 \cdot H}{6} \cdot 2 = \frac{P_0 \cdot H}{3} = \frac{1}{3} P_0 H.$

W podobny sposób obliczamy objętość U^n. Dodajemy do siebie graniastosłupy U_t, dla $t = 1, 2, \dots , n-1$:

$$V(U^n) = V(U_1) + \dots + V(U_{n-1}) = \frac{H}{n} \cdot P_1 + \dots + \frac{H}{n} \cdot P_{n-1} = \frac{H}{n} (P_1 + \dots + P_{n-1}) =$$

$$\frac{P_0 \cdot H}{n^3} ((n-1)^2 + \dots + 1^2) = \frac{P_0 \cdot H}{n^3} \cdot \frac{n(n-1)(2n-2+1)}{6} = \frac{P_0 \cdot H}{6} \cdot \frac{n(n-1)(2n-1)}{n^3} .$$

Granica wyrażenia $\frac{n(n-1)(2n-1)}{n^3}$ dla n dążącego do nieskończoności wynosi 2, więc:

$$lim_{n \to \infty} \quad U^{2^k} = \frac{P_0 \cdot H}{6} \cdot 2 = \frac{P_0 \cdot H}{3} = \frac{1}{3} P_0 H.$$

Mając wyliczone wielkości U^{2^k} i V^{2^k} możemy przybliżyć objętość ostrosłupa K:

$$V(U^{2^k}) \leq V(K) \leq V(V^{2^k}),$$

$$lim_{n \to \infty} V(U^{2^k}) \leq V(K) \leq lim_{n \to \infty} V(V^{2^k}),$$

$$\frac{1}{3} P_0 H \leq V(K) \leq \frac{1}{3} P_0 H.$$

Z nierówności tych wynika, że $V(K) = \frac{1}{3} P_0 H$. Zauważmy, że P_0 jest polem podstawy ostrosłupa K, a więc $V(K) = \frac{1}{3} PH$, co kończy dowód Stwierdzenia 2. 4. 17

2.5 Ostrosłupy ścięte.

Poniżej zostanie wyprowadzony wzór na objętość ostrosłupa ściętego. W dowodzie wykorzystamy poznany w poprzednim rozdziale wzór na objętość ostrosłupa o dowolnej podstawie.

<u>*Stwierdzenie 18:*</u>

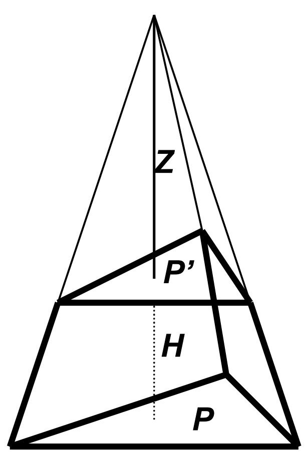
Jeśli *B* jest ostrosłupem ściętym to:

$$V(B) = \frac{1}{3}\left(P + P' + \sqrt{P P'}\right),$$

gdzie *P* jest polem dolnej podstawy ostrosłupa ściętego, *P'* jest polem górnej podstawy, a *H* jest wysokością.

Dowód:

W danym ostrosłupie ściętym *B*, przedłużamy krawędzie boczne tak długo, aż przetną się one w jednym punkcie. W ten sposób powstanie ostrosłup *A*, o podstawie o polu *P* i wysokości $M = H + Z$. Zauważmy, że ostrosłup *A* składa się z ostrosłupa ściętego *B* i nowo powstałego ostrosłupa *B'* o wysokości *Z*, którego podstawą jest górna podstawa ostrosłupa ściętego *B*.



Na mocy Stwierdzenia 2. 4. 17 potrafimy obliczyć objętości ostrosłupów A i B'.

Objętość ostrosłupa A wynosi: $V(A) = \frac{1}{3} P\,(H + Z)$, a ostrosłupa B' : $V(B') = \frac{1}{3} P' \cdot Z$.

Z aksjomatu sumy wynika, że objętość ostrosłupa ściętego B jest różnicą objętości ostrosłupów A i B'. $\cdot Z$, wiec:

$$V\,(B) = V(A) - V(B') = \frac{1}{3} P(H + Z)\ -\ \frac{1}{3} P' \cdot Z = \frac{1}{3} (PH + Z(P - P').$$

Podstawy P i P' są wielokątami przystającymi, jeden jest obrazem drugiego przez jednokładność w przestrzeni względem wierzchołka D. Podobnie jak w dowodzie Stwierdzenia 2. 4. 17 skala podobieństwa jest równa iloczynowi odległości wielokątów od wierzchołka D. Stosunek pól podstaw, przy założeniu, ze $P > P'$ jest równy kwadratowi skali podobieństwa: $\frac{P}{P'} = \frac{(H+Z)^2}{Z^2}$. Przekształcając ten wzór otrzymamy:

$$PZ^{\,2} = P'H^{\,2} + 2P'HZ + P'Z^{\,2},$$

$$Z^{\,2}\,(P - P') - 2P'HZ - P'H^{\,2} = 0,$$

$$Z = \frac{2P + \sqrt{4P'^{\,2}H^2 + 4H^2(PP' - P'^{\,2})}}{2\,(P - P')} = \frac{H\,(P' + \sqrt{PP'})}{P - P'}.$$

Wyliczoną wielkość Z wstawiamy do wzoru na objętość:

$$V(B) = \frac{1}{3} (PH + Z(P - P') = \frac{1}{3} (PH + H(P' + \sqrt{P\,P'}\,)) = \frac{H}{3} (P + P' + \sqrt{P\,P'}\,),$$

Tak więc $V(B) = \frac{H}{3} (P + P' + \sqrt{P\,P'}\,)$ co kończy dowód Stwierdzenia 2. 5. 18.

Rozdział 3. Analiza teorii aksjomatycznej.

W rozdziale tym zostanie skonstruowana bez odwoływania się do pojęcia objętości, funkcja przyporządkowująca wielościanom liczby rzeczywiste, spełniająca wszystkie aksjomaty objętości. Istnienie takiej funkcji uzasadnia niesprzeczność aksjomatów objętości. W dowodach wielościany będziemy dzielić na czworościany. Czworościany te muszą być niezachodzące na siebie i tworzyć triangulację wielościanu tzn. dwa dowolne czworościany podziału są rozłączne, albo mają część wspólną, którą może być: wspólny wierzchołek, jedna ze wspólnych krawędzi, albo jedna wspólna ścian.

3.1 Definicja funkcji *L*.

Jeśli S jest czworościanem, którego podstawa ma pole P i wysokości H to funkcję L definiujemy następująco: $L(S)=\frac{1}{3}PH$.

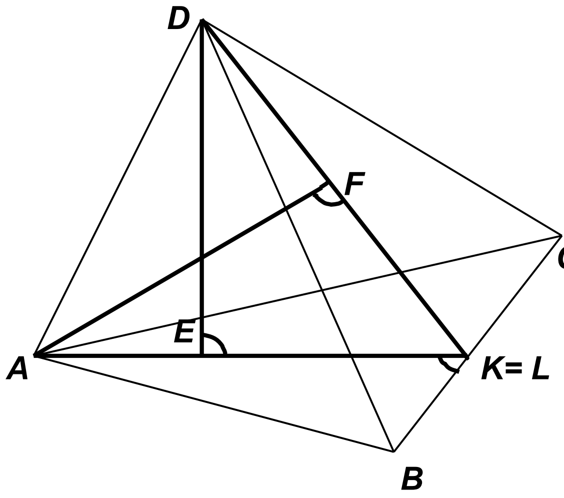
Jeśli W jest wielościanem będącym suma niezachodzących na siebie czworościanów $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$, tworzących triangulację wielościanu W, to wielkość funkcji L określamy jako: $L(W) = L(S_1) + L(S_2) + \dots + L(S_n) = \sum \frac{1}{3} P_i\ H_i$, gdzie P_i jest polem pewnej ściany w czworościanie S_i zaś H_i jest wysokością wyznaczoną względem tej ściany jako podstawy czworościanu.

Twierdzenie 1. **Wartość funkcji *L(S)* dla czworościanu *S* nie zależy od wyboru jego podstawy**.

Dowód:

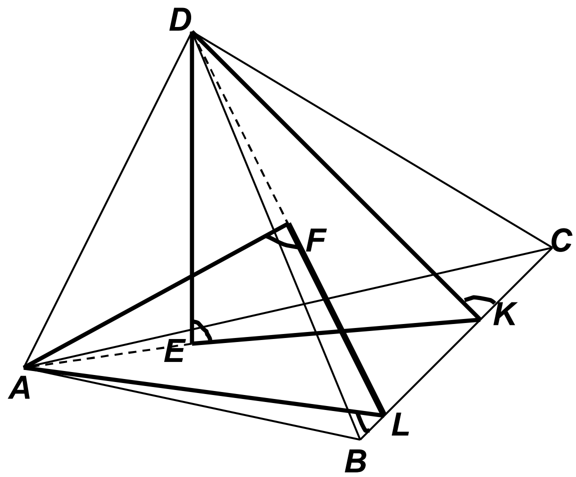
W danym czworościanie S o wierzchołkach A, B, C, D obierzmy za jedną z podstaw trójkąt ABC, zaś za drugą podstawę trójkąt BCD. Niech odcinek DE będzie wysokością czworościanu S opuszczona na płaszczyznę zawierającą ABC, AF wysokością czworościanu S opuszczona na płaszczyznę zawierającą BCD, AL wysokością trójkąta ABC opuszczoną na bok BC, a DK wysokością trójkąta BCD opuszczoną na bok BC. W dowodzie korzystać będziemy z podobieństwa trójkątów AKE i DEL. Rozpatrzmy kilka przypadków, ze względu na zawieranie się wysokości w czworościanie S i wzajemne położenie punktów K i L. Po znalezieniu trójkątów podobnych, dalsza cześć dowodu będzie wspólna dla wszystkich rozpatrywanych czworościanów.

Przypadek I: Wysokości czworościanu S zawierają się w całości w jego wnętrzu, oraz punkty K i L pokrywają się.



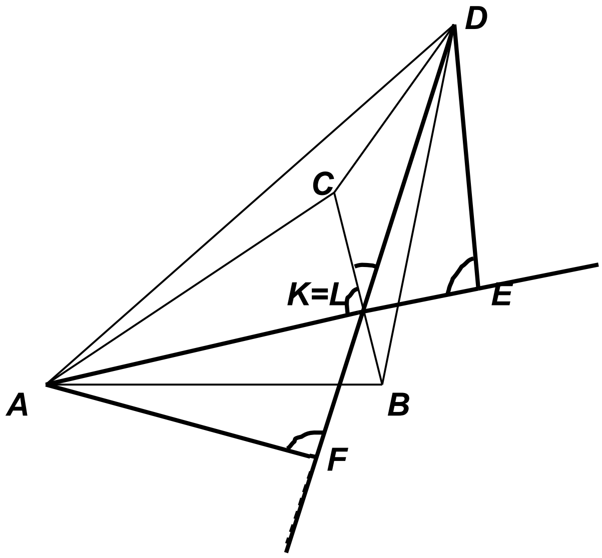
Rozpatrzmy trójkąty *AKF* i *DEL*. Zauważmy, że $\angle$ *FKA* = $\angle$ *EKD*, oraz $\angle$ *AFK* = $\angle$ *DEK* = 90°, więc $\angle$ *FAK* musi być równy $\angle$ *EDK*. Z równości kątów wynika, że trójkąty *AKF i DEL* są do siebie podobne.

Przypadek II: Wysokości czworościanu S zawierają się w całości w jego wnętrzu, oraz punkty K i L nie pokrywają się.



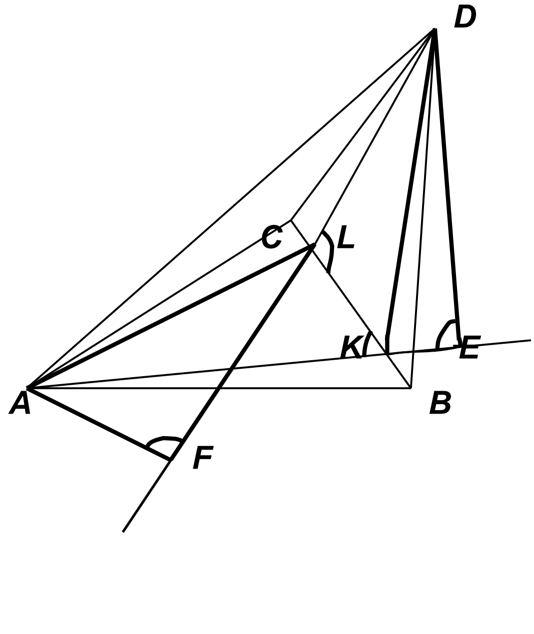
Rozpatrzmy trójkąty *ALF* i *KED*. Zauważmy, że płaszczyzny zawierające te trójkąty przecinają pod katem prostym krawędź *BC*. Z tego powodu $\angle$*ALF* = $\angle$*EKD,* wiemy że $\angle$ *AFK* = $\angle$ *DEK* = 90°, więc $\angle$ *LAF* musi być równy $\angle$ *EDK*. Z równości kątów wynika, że trójkąty *ALF i DEK* są do siebie podobne.

Przypadek III. Wysokości czworościanu S *nie zawierają się we wnętrzu czworościanu oraz punkty* K *i* L *pokrywają się.*



Rozpatrzmy trójkąty ALF i KED. Zauważmy, że kąty ALF i EKD są kątami wierzchołkowymi więc $\angle ALF = \angle EKD$, wiemy że $\angle AFK = \angle DEK = 90°$, więc $\angle LAF$ musi być równy $\angle EDK$. Z równości kątów wynika, że trójkąty ALF *i* DEK są do siebie podobne.

Przypadek IV. Wysokości czworościanu S *nie zawierają się we wnętrzu czworościanu oraz punkty* K *i* L *nie pokrywają się.*



Rozpatrzmy trójkąty ALF i KED. Zauważmy, że płaszczyzny zawierające te trójkąty przecina pod katem prostym krawędź BC. Z tego powodu $\angle ALF = \angle EKD$, wiemy że $\angle AFK = \angle DEK = 90°$, więc $\angle LAF$ musi być równy $\angle EDK$. Z równości kątów wynika, że trójkąty ALF *i* DEK są do siebie podobne.

We wszystkich czterech przypadkach trójkąty ALF i DEK są podobne, więc stosunek długości ich odpowiednich boków jest stały:

$$\frac{|AF|}{|AL|} = \frac{|DE|}{|DK|} \quad \Rightarrow \quad |AF| \cdot |DL| = |AK| \cdot |DE|$$

Oznaczmy przez $P_p = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |AK|$ pole trójkąta ABC, a przez $P_p' = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |DL|$ pole trójkąta BCD. Obliczmy $L(ABC)$ i $L(BCD)$ przyjmując, że $L(ABC)$ jest wartością funkcji L dla czworościanu S gdy za podstawę obierzemy trójkąt ABC, a $L(BCD)$ jest wartością funkcji L dla czworościanu S gdy podstawą będzie trójkąt BCD:

$$L(ABC) = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot |DE| = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |AK| \cdot |DE| = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |DL| \cdot |AF| =$$

$$P_p' \cdot |AF| = L(BCD),$$

czyli $L(ABC) = L(BCD)$

Twierdzenie 2. **Dla dowolnego wielościanu W wielkość $L(W)$ nie zależy od sposobu przedstawienia wielościanu W jako sumy niezachodzących na siebie czworościanów.**

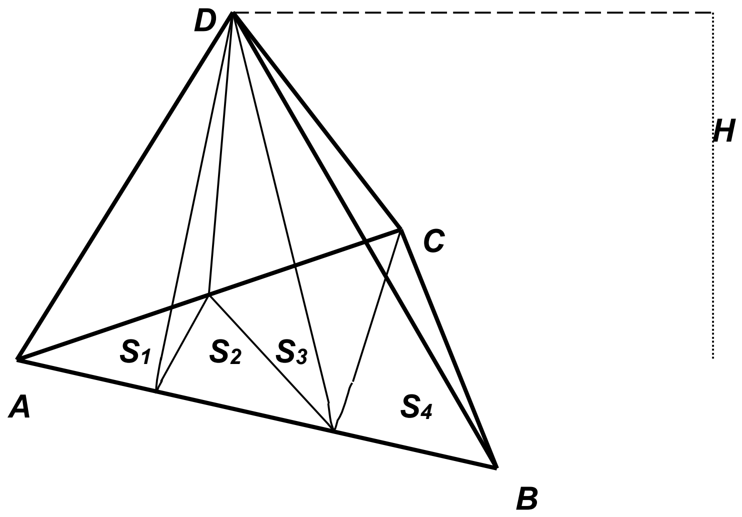
Do udowodnienia Twierdzenia 2 potrzebne są dodatkowe informacje. Zostaną one sformułowane w lematach, a ich treść i dowody będą podane poniżej.

<u>Lemat 1.</u> Jeśli czworościan S o wysokości H i polu podstawy równym P podzielimy płaszczyznami przechodzącymi przez jego wierzchołek na n niezachodzących na siebie czworościanów S_i to:

$$L(S) = L(S_1) + L(S_2) + ... + L(S_n)$$

Dowód:

Oznaczmy przez P_i pole podstawy czworościanu S_i. Zauważmy, że wszystkie czworościany S_i mają wysokość H.



Na podstawie definicji funkcji L możemy zapisać:

$$L(S_1) + ...+ L(S_n) = \frac{1}{3}P_1H + \dots + \frac{1}{3}P_nH = \frac{1}{3}(P_1+\dots+ P_n)H = \frac{1}{3}PH = L(S),$$

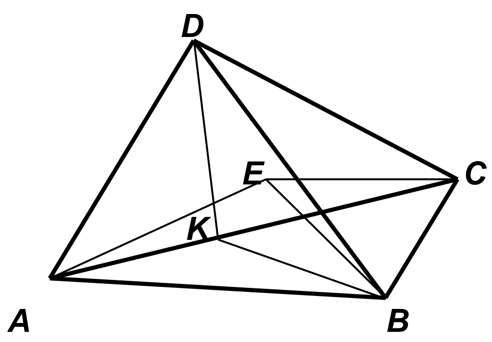
co kończy dowód Lematu 1.

Lemat 2. Dla punktu E leżącego wewnątrz czworościanu $ABCD$, zachodzi równość:

$$L(ABCD) = L(ABCE) + L(BCDE) + L(ABDE) + L(ACDE)$$

Dowód:

Dany czworościan $ABCD$, wewnątrz którego znajduje się punkt E dzielimy płaszczyzną przechodzącą przez punkty B,D,E. Płaszczyzna ta przecina krawędź AC w punkcie K.



Na mocy Lematu 1, z którego wynika, że: *L(ABCD) = L(ABKD) + L(BCKD).*

W oparciu o Fakt 1 i Lemat 1 otrzymujemy:

$$L(ABKD) = L(ABDE) + L(ABKE) + L(ADKE)$$
$$L(BCKD) = L(BCEK) + L(BDCE) + L(KCDE)$$
$$L(ABKE) + L(BCEK) = L(ABCE)$$
$$L(ADKE) + L(KCDE) = L(ACDE)$$

Powyższe wielkości wstawmy do wzoru na objętość czworościanu *ABCD*:

$$L(ABCD) = L(ABKD) + L(BCKD) = L(ABDE) + L(ABKE) + L(ADKE) + L(BCEK) + L(BDCE) + L(KCDE) = L(ABCE) + L(ACDE) + L(ABDE) + L(BDCE) = L(ABCE) + L(BCDE) + L(ABDE) + L(ACDE).$$

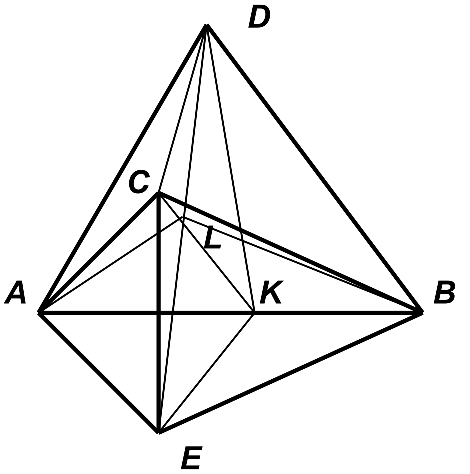
Podsumowując, *L(ABCD) =L(ABCE) + L(BCDE) + L(ABDE) + L(ACDE).*

Lemat 3: Niech płaszczyzna przechodząca przez punkty *A, B, C* podzieli przestrzeń na dwie półprzestrzenie. Dla punktu *E* leżącego w innej półprzestrzeni niż punkt *D*, takiego, że suma czworościanów *ABCD* i *ABCE* jest bryłą wypukłą, zachodzi równość:

$$L(ABCD) + L(ABCE) = L(CDEA) + L(DEAB) + L(CDEB)$$

Dowód:

Bryłę powstałą z połączenia punktu *E* z wierzchołkami podstawy *ABC* czworościanu *ABCD*, przecinamy płaszczyzną przechodzącą przez punkty *E,C,D*, która przecina krawędź *BA* w punkcie *K*. Odcinek łączący punkt *D* i *E* przecina *CK* w punkcie *L.*



Korzystając z Lematu 1 otrzymamy:

$L(ABCD)=L(ACKD) + L(BCKD)=L(DKLA) + L(CDLA) + L(CDLB) + L(DKLB)$
$L(ABCE)=L(ACKE) + L(BCKE)=L(EKLA) + L(CELA) + L(CELB) + L(EKLB)$
$L(DKLA) + L(EKLA) + L(DKLB) + L(EKLB) = L(DEAB)$
$L(CDLA) + L(CELA) = L(CDEA)$
$L(CDLB) + L(CELB) = L(DEBC)$

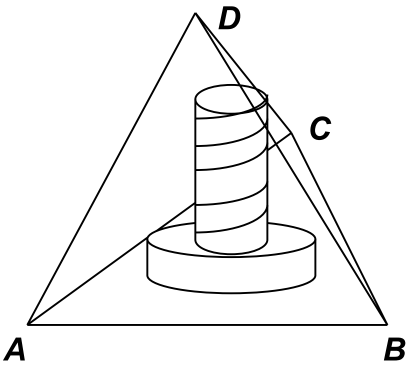
Podstawiając powyższe wartości do wzoru otrzymujemy:

$L(ABCD) + L(ABCE) = L(DKLA) + L(CDLA) + L(CDLB) + L(DKLB) +$
$L(EKLA) + L(CELA) + L(CELB) + L(EKLB) =$
$L(CDEA) + L(DEAB) + L(DEBC)$

więc $L(ABCD) + L(ABCE) = L(CDEA) + L(DEAB) + L(DEBC)$

Przed sformułowaniem kolejnego Lematu musimy zdefiniować kilka nowych pojęć, z których będziemy korzystać w dalszej części pracy.

Orientacją czworościanu $ABCD$ nazywamy uporządkowanie jego wierzchołków z dokładnością do parzystej permutacji (np. orientacje $ABCD$ i $BADC$ są takie same, są jednak różne od orientacji $DABC$).
Obiegiem ABC trójkąta nazywamy sposób poruszania się po jego obwodzie od A do B, potem do C i z powrotem do A. Obiegi ABC i BCA są równe natomiast obieg CBA jest do nich przeciwny.
Aby określić jaki znak ma orientacja czworościanu wyznaczona przez uporządkowanie $ABCD$, wykorzystujemy *regułę śruby prawoskrętnej*. Śruba prawoskrętna to śruba, która podczas obracania jej „główki" w kierunku przeciwnym do wskazówek zegara , czyli w prawo „wkręca się".
Przyjmijmy, że podstawą czworościanu jest trójkąt ABC, leżący na płaszczyźnie dzielącej przestrzeń na dwie półprzestrzenie. Wewnątrz trójkąta umieszczamy „główkę" śruby prawoskrętnej w taki sposób by oś śruby była prostopadła do płaszczyzny ABC oraz tak by kierunek obracania „główki" śruby podczas jej wkręcania był zgodny z obiegiem trójkąta ABC.



Jeśli wierzchołek *D* leży w tej samej półprzestrzeni co nagwintowana część śruby to orientacja czworościanu jest dodatnia, jeśli natomiast „nóżka" śruby i wierzchołek *D* leżą w różnych półprzestrzeniach to orientacja czworościanu jest ujemna.

Orientacja czworościanu *ABCD* wyznacza (indukuje) zgodne z nią obiegi trójkątów będących ścianami. Jeśli orientacja *ABCD* jest dodatnia to zgodne z nią obiegi ścian czworościanu są dodatnie, gdy patrzymy na ściany z zewnątrz czworościanu. Podobnie jest w przypadku gdy orientacja *ABCD* jest ujemnej tzn. zgodne z nią obiegi ścian czworościanu są ujemne, gdy patrzymy na ściany z zewnątrz czworościanu. Dla orientacji czworościanu *ABCD* za zgodne z nią obiegi ścian przyjmujemy: *ABC, -ABD ,ACD, -BCD,* gdzie *-PQR* oznacza obieg przeciwny do obiegu *PQR*. Aby wyznaczyć obiegi ścian wykreślamy kolejne litery z ciągu *ABCD* i dopisujemy na przemian znak **+** i **-** .

Indukowane obiegi ścian nie zmieniają się gdy uporządkowanie wierzchołków czworościanu zmienimy parzystą permutacją.

Zorientowaną pojemnością $[ABCD]$ czworościanu *ABCD* z wybrana orientacją nazywamy iloczyn znaku orientacji i wartości funkcji *L* dla tego czworościanu:

$[ABCD] = +L(ABCD)$ – gdy orientacja jest dodatnia,

$[ABCD] = -L(ABCD)$ – gdy orientacja jest ujemna.

W przypadku gdy punkty *A*, *B*, *C*, *D* leżą w jednej płaszczyźnie przyjmujemy, że zorientowana pojemność $[ABCD]$ ma zerową wartość.

Zorientowaną pojemność możemy zapisać algebraicznie w następującej postaci:

$[ABCD] = \frac{1}{6}(\vec{AB} \times \vec{AC}) \circ \vec{AD} = \frac{1}{6}\left[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}\right]$, gdzie $\left[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}\right]$

jest iloczynem mieszanym.

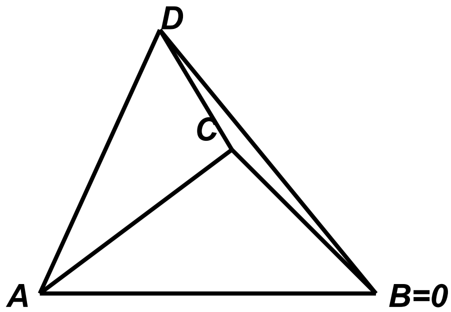
Zorientowana pojemność *(ABCD)* zależy od orientacji czworościanu i zmienia się na przeciwną przy jej zmianie. Gdy orientacja czworościanu jest dodatnia to zorientowana pojemność również jest dodatnia. Przy zmianie orientacji czworościanu na ujemną, na przykład w wyniku nieparzystej permutacji wierzchołków zorientowana pojemność również będzie ujemna.

Poniższy Lemat będzie kluczowym elementem dowodu Twierdzenia 2.

Lemat 4. Dla czworościanu *ABCD* i dowolnego punktu *O* prawdziwy jest wzór:
[ABCD] = [ABCO] – [ABDO] + [ACDO] – [BCDO].

Dowód:
Rozpatrzmy różne przypadki, w zależności od położenia punktu *O* względem czworościanu *ABCD*. We wszystkich rozpatrywanych przypadkach orientacja czworościanu *ABCD* jest dodatnia, więc *[ABCD] = L(ABCD).*

Przypadek I: Punkt O pokrywa się z jednym z wierzchołków czworościanu ABCD.
Przyjmijmy, że punkt *O* pokrywa się z punktem *B.*



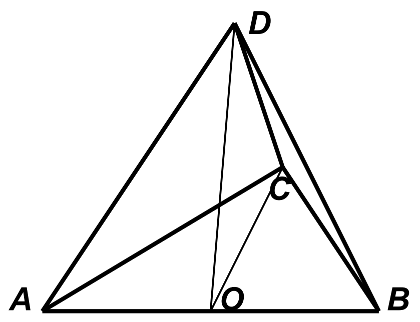
Punkty *A, B, C, O* leżą w jednej płaszczyźnie więc *[ABCO] = 0*, podobnie punkty *A, B, D, O* i *B, C, D, O*, więc *[ABDO] = 0* i *[BCDO] = 0.* Obieg zorientowanego czworościanu *ACDO* jest dodatni wiec *[ACDO] = L[ACDO].* Podstawmy wartości do wzoru otrzymamy, że:

L(ABCD) = L(ACDO),

równość ta jest prawdziwa. W przypadku gdy punkt *O* pokrywa się z innym wierzchołkiem czworościanu *ABCD* równość uzasadnia się analogicznie.

Przypadek II: Punkt O leży na jednej z krawędzi czworościanu ABCD.

Przyjmijmy, że punkt *O* leży na krawędzi *AB.*



Punkty *A, B, C, O* leżą w jednej płaszczyźnie więc *[ABCO] = 0*, *A, C, D, O*, też leżą w jednej płaszczyźnie więc *[ACDO]* = 0. Obieg *[ACDO]* jest dodatni więc *[ACDO] = L(ACDO),* zaś obieg *[BCDO]* jest ujemny więc *[BCDO] = -L(BCDO).*

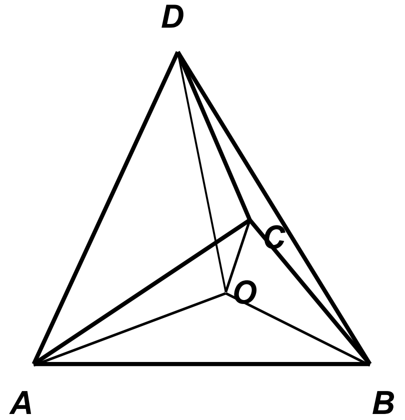
Podstawiając powyższe warunki do wzoru otrzymujemy:

L(ABCD) = L(ACDO) + L(BCDO),

równość ta jest prawdziwa na mocy Lematu 1. W przypadku gdy punkt *O* leży wewnątrz innej krawędzi czworościanu *ABCD* równość uzasadnia się analogicznie.

Przypadek III: Punkt O leży we wnętrzu jednej ze ścian czworościanu ABCD.

Przyjmijmy, że punkt *O* leży wewnątrz ściany *ABC*.



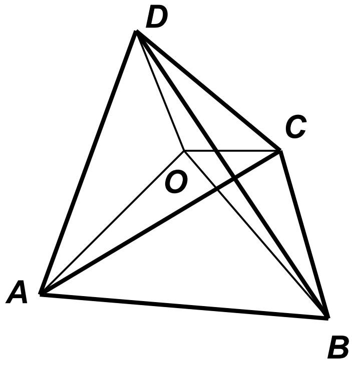
Punkty *A, B, C, O* leżą w jednej płaszczyźnie więc *[ABCO] = 0*, *[ABDO]* i *[BCDO]* mają obiegi ujemne więc *[ABDO] = -L(ABDO)*, a *[BCDO] = - L(BCDO).* Obieg *[ACDO]* jest dodatni więc *[ACDO] = - L(ACDO).*

Podstawiając powyższe wartości do wzoru otrzymamy:

L(ABCD) = L(ABDO) + L(ACDO) + V(BCDO),

co jest prawdziwe na mocy aksjomatu sumy. W przypadku gdy punkt O leży wewnątrz innej ściany czworościanu ABCD równość uzasadnia się analogicznie.

Przypadek IV: Punkt O znajduje się wewnątrz czworościanu ABCD.



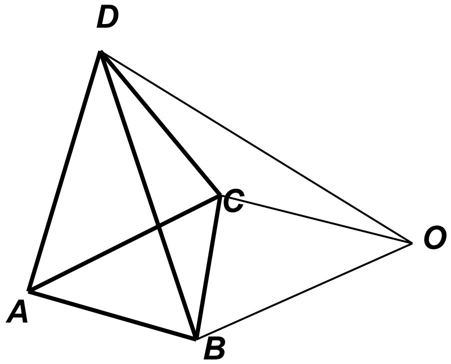
[ABCO] = L(ABCO), [ACDO] = L(ACDO), gdyż obiegi *[ABCO]* i *[ACDO]* są dodatnie, obiegi *[ABDO]* i *[BCDO]* są ujemne więc *[ABDO] = -L(ABDO)*, *[BCDO] = - L(BCDO)*. Podstawiając te wartości do wzoru otrzymamy:

L(ABCD) = L(ABCO) + L(ABDO) + L(ACDO) + L(BCDO),

równość jest prawdziwa na mocy Lematu 2.

Przypadek V: Punkt O leży na zewnątrz czworościanu ABCD, na płaszczyźnie wyznaczonej przez jedną z jego ścian w taki sposób, że wraz z wierzchołkami tej ściany tworzy czworokąt.

Przyjmijmy, że punkt *O* leży na płaszczyźnie wyznaczonej przez trójkąt *ABC*.

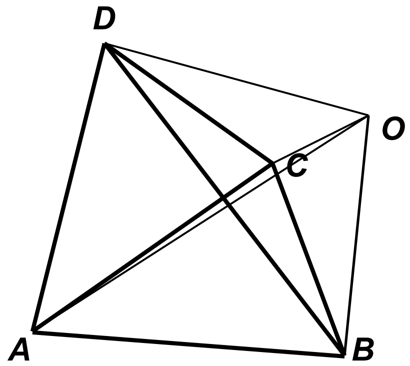


Punkty A, B, C, O leżą w jednej płaszczyźnie więc $[ABCO] = 0$, orientacja $[ABDO]$ jest ujemna więc $[ABDO] = -L(ABDO)$, podobnie przy ujemnej orientacji $[BCDO]$, $[BCDO] = -L(BCDO)$. Orientacja $[ACDO]$ jest dodatnie więc $[ACDO] = L(ACDO)$ Podstawiając do wzoru otrzymamy:

$$L(ABCD) = L(ABDO) + L(ACDO) - L(BCDO),$$
$$L(ABCD) + L(BCDO) = L(ABDO) + L(ACDO),$$

Jest to prawda na mocy Lematu 2. W przypadku gdy punkt O leży na płaszczyźnie wyznaczonej przez inną ścianę czworościanu $ABCD$ uzasadnienie równości jest analogiczne.

Przypadek VI: Punkt O *znajduje na zewnątrz czworościanu* $ABCD$*, nie leży na żadnej z płaszczyzn wyznaczonych przez ściany czworościanu oraz odcinek łączący* O *z jednym z wierzchołków czworościanu przecina wnętrze ściany przeciwległej do tego wierzchołka.*



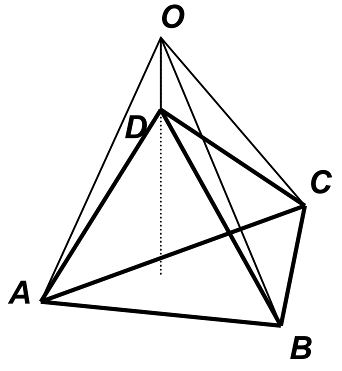
Orientacje $[ABCO]$, $[ACDO]$, $[BCDO]$ są dodatnie więc $[ABCO] = L(ABCO)$, $[ACDO] = L(ACDO)$, $[BCDO] = L(BCDO)$. Orientacja $[ACDO]$ jest ujemna więc $[ACDO] = L(ACDO)$. Podstawiając do wzoru otrzymamy:

$$L(ABCD) = L(ABCO) + L(ABDO) + L(ACDO) – L(BCDO),$$
$$L(ABCD) + L(BCDO) = L(ABCO) + L(ABDO) + L(ACDO),$$

Powyższa równość jest prawdziwa na mocy Lematu 3.

Przypadek VII: Punkt O znajduje na zewnątrz czworościanu ABCD, na prostej zawierającej wysokość czworościanu ABCD.

Przyjmijmy, że punkt *O* leży na prostej zawierającej wysokość czworościanu *ABCD* opuszczoną z wierzchołka *D.*



[ABCO] = L(ABCO), [ABDO] = L(ABDO), *[BCDO] = L(BCDO)* gdyż obiegi *[ABCO]*, *[ABDO], [BCDO]* są dodatnie, obieg *[ACDO]* jest ujemny więc *[ACDO] = -L(ACDO)*. Podstawiając te wartości do wzoru otrzymamy:

L(ABCD) = L(ABCO) - L(ABDO) - L(ACDO) -L(BCDO),
L(ABCO) = L(ABCD) + L(ABDO) + L(ACDO) + L(BCDO)

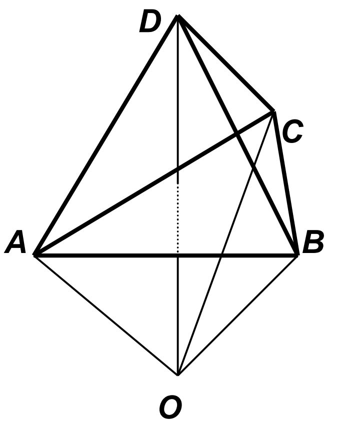
Powyższa równość jest prawdziwa na mocy Lematu 2, jeśli przyjmiemy, że rozpatrujemy czworościan *ABCO* i punkt *D* znajdujący się w jego wnętrzu.

W przypadku gdy punkt *O* znajduje się na prostej wyznaczonej przez wysokość czworościanu *ABCD* opuszczoną z innego wierzchołka uzasadnienie równości jest analogiczne.

Istnieją jeszcze inne przypadki dla punktu *O* położonego na zewnątrz czworościanu *ABCD,* m. in:

- punkt O leży na prostej zawierającej krawędź czworościanu *ABCD*,
- punkt O leży na płaszczyźnie wyznaczonej przez ścianę czworościanu *ABCD*, wraz z dwoma spośród jej wierzchołków tworzy trójkąt, w którym zawiera się cała ściana

- punkt O leży tak jak na poniższym rysunku



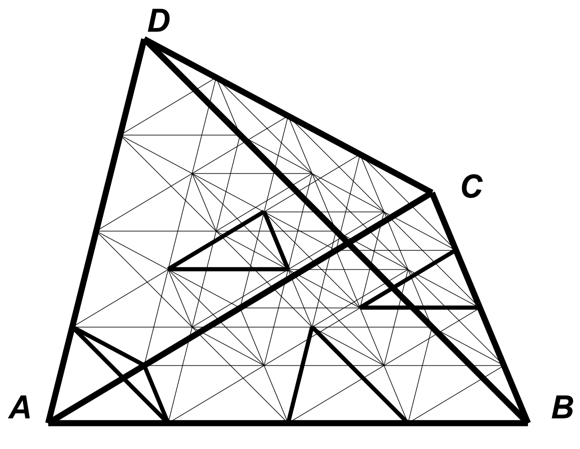
Dowody tych przypadków są analogiczne jak dla przypadków I – VII. Dla wszystkich możliwych położeń punktu O względem czworościanu $ABCD$ Lemat 4 jest prawdziwy.

<u>Lemat 5.</u> Jeśli czworościan S jest sumą niezachodzących na siebie czworościanów S_i, to: $L(S) = \sum_i L(S_i)$.

Dowód:

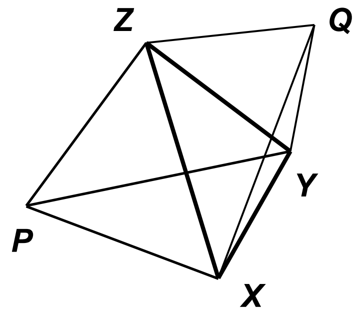
Oznaczmy wierzchołki czworościanów S_i przez A_i, B_i, C_i, D_i, tak aby orientacja $[A_iB_iC_iD_i]$ była dodatnia, wtedy korzystając z Lematu 4 możemy zapisać:

$$L(S) = \sum_i [A_iB_iC_iD_i] = \sum_i ([A_iB_iC_iO] + [B_iA_iD_iO] + [A_iC_iD_iO] + [C_iB_iD_iO])$$



Zauważmy, że trójkąty będące ścianami czworościanów S_i możemy podzielić na dwie grupy, ze względu na rodzaj ich części wspólnej ze ścianami czworościanu S.

Oznaczmy przez T_z trójkąty, które zawierają się w jednej ze ścian czworościanu S, natomiast przez T_w oznaczmy te trójkąty, których wnętrze zawiera się wewnątrz S. Zauważmy, że dowolny trójkąt T_w jest ścianą dwóch różnych czworościanów S_i. Trójkąty T_z są ścianą dokładnie jednego czworościanu S_i. Oznaczmy przez XYZ wierzchołki dowolnego trójkąta T_w. Wybierzmy te spośród czworościanów S_i, których wspólną ścianą jest trójkąt XYZ, oznaczmy je jako $XYZP$ i $XZYQ$ tak jak na poniższym rysunku.

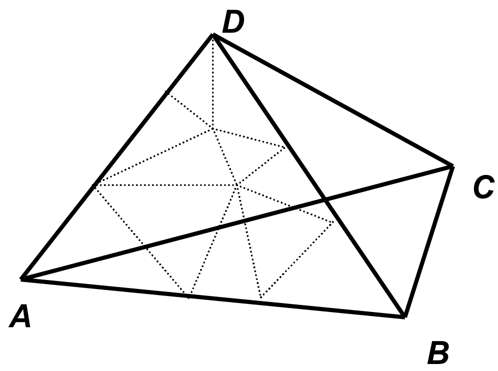


Korzystając z Lematu 4 wiemy, że:

$$L(XYZP) = [XYZP] = [XYZO] - [XYPO] + [XZPO] - [YZPO],$$
$$L(XZYQ) = [XZYQ] = [XZYO] - [XZQO] + [XYQO] - [ZYQO].$$

Wielkości $L(XYZP)$ i $L(XZYQ)$ są składnikami $\sum_i [A_iB_iC_iD_i]$, po dodaniu ich do siebie $[XYZO]$ i $[XZYO]$ zredukują się, gdyż $[XYZO] = -[XZYO]$. Wszystkie składniki typu $[XYZO]$ występujące w równaniu na $\sum_i [A_iB_iC_iD_i]$, dla których trójkąt XYZ jest typu T_w, ulegną parami redukcji więc przy obliczaniu $L(S)$ możemy je pominąć.

Wynika stąd, że do obliczenia $L(S)$ wystarczą nam wielkości $[XYZO]$, gdzie XYZ jest trójkątem T_z, który w całości zawiera się w ścianie czworościanu S. Oznaczmy wierzchołki tych trójkątów przez $X_iY_iZ_i$.



Trójkąty $X_iY_iZ_i$ całkowicie wypełniają ściany czworościanu S, oraz każdy taki trójkąt zawiera się tylko w jednej ścianie. Jeśli $X_aY_aZ_a$ są trójkątami zawierającymi się w ścianie ABC czworościanu S, to w $\sum_i [A_iB_iC_iD_i]$ pojawią się wielkości $[X_aY_aZ_aO]$, gdzie czworościany $X_aY_aZ_aO$ mają jednakową wysokość. Obiegi $X_aY_aZ_a$ oglądane z zewnątrz czworościanu S są takie same jak obieg ABC. Jest to wynik podziału czworościanu $ABCD$ na dodatnio zorientowane czworościany.

Korzystając z Lematu 1 otrzymamy, że: $\sum_a [X_aY_aZ_aO] = [ABCO]$, bo albo są to wielkości $L(X_aY_aZ_aO)$, $-L(X_aY_aZ_aO)$ lub 0 w zależności po której stronie leży punkt O. Podobnie dzieje się dla pozostałych trójkątów $X_iY_iZ_i$. Tak więc $\sum_b [X_bY_bZ_bO] = [ADBO]$, dla trójkątów $X_bY_bZ_b$, zawierających się w ścianie ABD czworościanu S, $\sum_c [X_cY_cZ_cO] = [ACDO]$, dla trójkątów $X_cY_cZ_c$, zawierających się w ścianie ACD czworościanu S, oraz $\sum_d [X_dY_dZ_dO] = [BDCO]$ jeśli $X_dY_dZ_d$ są trójkątami zawartymi w ścianie BCD czworościanu S. Podstawmy powyższe wartości do wzoru na $L(S)$:

$$L(S) = \sum_i [A_iB_iC_iD_i] = \Big(\sum_a [X_aY_aZ_aO] + \sum_b [X_bY_bZ_bO] + \sum_c [X_cY_cZ_cO] +$$

$$\sum_d [X_dY_dZ_dO] \Big) = ([ABCO] + [ADBO] + [ACDO] + [BDCO]) =$$

$$([ABCO] - [ABDO] + [ACDO] - [BCDO]).$$

Udowodnienie Lematu 5, kończy nam równocześnie dowód Twierdzenia 2.

Mając udowodnione Twierdzenie 1 i Twierdzenie 2 możemy stwierdzić, że aksjomaty objętości są niesprzeczne. Świadczy o tym fakt, że funkcja $L(S)$, którą skonstruowaliśmy bez odwołania się do pojęcia objętości, spełnia wszystkie aksjomaty.

Wniosek:

Aksjomaty objętości są niesprzeczne.

4. Niezależność aksjomatów objętości.

W rozdziale tym zostanie udowodniona niezależność aksjomatów objętości z pominięciem niezależności aksjomatu monotoniczności. Dla niesprzecznego układu aksjomatów $A_1, A_2, \ldots, A_n$ aksjomat A_n jest niezależny od aksjomatów $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ jeśli nie da się go wyprowadzić logicznym rozumowaniem z tych aksjomatów.
Jeśli znajdziemy funkcję, dla której spełnione są wszystkie aksjomaty $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$, natomiast aksjomat A_n nie jest spełniony, to aksjomat A_n jest niezależny od pozostałych aksjomatów.

4.1 Niezależność aksjomatu jednostki.

Niech funkcja $K(W)$, dla dowolnego wielościanu będzie zdefiniowana następująco:

$$K(W) := 2 \cdot L(W),$$

gdzie $L(W)$ jest funkcją zdefiniowaną w poprzednim rozdziale. Sprawdźmy, które aksjomaty spełnia zdefiniowana funkcja $K(W)$.

Aksjomat jednostki.

Obliczmy ile wynosi $K(S)$ dla S będącego sześcianem o krawędzi długości 1:

$$K(S) = 2 \cdot L(S) = 2 \cdot 1 = 2.$$

Funkcja $K(W)$ nie spełnia aksjomatu jednostki. Gdyby aksjomat ten był spełniony to dla sześcianu jednostkowego S, funkcja $K(S) = 1$, a tak nie jest.

Aksjomat monotoniczności.

Niech M i N będą takimi wielościanami, że $M \subseteq N$, więc z aksjomatu monotoniczności wiemy, że $L(M) \leq L(N)$. Mnożąc obie strony nierówności przez 2 otrzymamy, że:

$$2 \cdot L(M) \leq 2 \cdot L(N) \Rightarrow K(M) \leq K(N),$$

więc aksjomat monotoniczności jest spełniony.

Aksjomat przystawania.

Niech P i T będą przystającymi do siebie wielościanami. Z aksjomatu przystawania wiemy, że $L(P) = L(T)$. Mnożąc obie strony równości przez 2 otrzymamy, że:

$$2 \cdot L(P) = 2 \cdot L(T) \Rightarrow K(P) = K(T),$$

więc aksjomat przystawania jest spełniony.

Aksjomat sumy.

Niech wielościan $D = A \cup B$. Z aksjomatu sumy wiemy, że $L(D) = L(A) + L(B)$. Obliczmy ile wynosi $K(D)$.

$$K(D) = 2 \cdot L(D) = 2 \cdot (L(A) + L(B)) = 2 \cdot L(A) + 2 \cdot L(B) = K(A) + K(B).$$

Okazało się, że $K(D) = K(A) + K(B)$ dla $D = A \cup B$, więc aksjomat sumy jest spełniony.

Zdefiniowana przez nas funkcja $K(W)$ spełnia wszystkie aksjomaty z wyjątkiem aksjomatu jednostki. Oznacza to, że aksjomat jednostki jest niezależny od pozostałych aksjomatów.

4.2 Niezależność aksjomatu przystawania.

Dla płaszczyzny Π zawierającej jedną ze ścian czworościanu S, funkcję $G(W)$ definiuje się następująco:

$$G(W) := P,$$

gdzie P jest polem przekroju bryły W z płaszczyzną Π. Sprawdźmy, które aksjomaty spełnia zdefiniowana funkcja $G(W)$.

Aksjomat jednostki:

Przekrój sześcianu S z płaszczyzna Π jest kwadratem o boku długości 1:

$$G(S) = 1 \cdot 1 = 1,$$

to oznacza, że aksjomat jednostki jest spełniony.

Aksjomat monotoniczności:

Niech M i N będą takimi wielościanami, że $M \subseteq N$, oraz pole przekroju bryły N z płaszczyzną Π wynosi P_N, natomiast pole przekroju bryły M z płaszczyzną Π wynosi P_M. Zauważmy, że skoro $M \subseteq N$, to $P_M \leq P_N$, tak więc $G(M) \leq G(N)$, czyli aksjomat monotoniczności jest spełniony.

Aksjomat przystawania:

Niech P i T będą sześcianami o krawędzi długości 1 takimi, że podstawa sześcianu P leży na płaszczyźnie Π, natomiast przekrój sześcianu T z płaszczyzną Π jest zbiorem pustym. Zauważmy, że P i T są do siebie przystające, ale $G(P) = 1$, a $G(T) = 0$, tak więc aksjomat przystawania nie jest spełniony.

Aksjomat sumy:

Dla niezachodzących na siebie brył A i B przekrój bryły A z płaszczyzną Π oznaczmy przez P_A, natomiast przekrój bryły B z płaszczyzną Π przez P_B. Zauważmy, że przekrój P_D bryły D powstałej z dodania do siebie wielościanów A i B jest równy sumie $P_A \cup P_B$, przy czym przekroje te są figurami niezachodzącymi na siebie. Dostajemy wtedy:

$$G(D) = G(A \cup B) = G(A) + G(B) = P_A + P_B,$$

czyli aksjomat sumy jest spełniony.

Zdefiniowana przez nas funkcja $G(W)$ spełnia wszystkie aksjomaty z wyjątkiem aksjomatu przystawania. Oznacza to, że aksjomat przystawania jest niezależny od pozostałych aksjomatów.

4.3 Niezależność aksjomatu sumy.

Dla wielościanów W określmy funkcję $F(W)$ następująco:

$$F(W) = \begin{cases} 5, \text{ gdy } L(W) \geq 5 \\ L(W), \text{ gdy } L(W) < 5 \end{cases}$$

sprawdźmy, które aksjomaty spełnia zdefiniowana funkcja $F(W)$.

Aksjomat jednostki:

Dla sześcianu S o krawędzi długości 1 funkcja $F(S)$ wynosi 1, więc aksjomat jednostki jest spełniony.

Aksjomat monotoniczności:

Niech M i N będą takimi wielościanami, że $M \subseteq N$. Gdy $L(M) < 5$ i $L(N) < 5$, to $F(M) = L(M)$, a $F(N) = L(N)$. Funkcja $L(W)$ spełnia aksjomat monotoniczności, więc $L(M) \leq L(N)$, czyli $F(M) \leq F(N)$. Jeśli $L(M) \geq 5$ i $L(N) \geq 5$, to $F(M) = F(N) = 5$. W przypadku gdy $L(M) < 5$, a $L(N) \geq 5$ wartość $F(M) = L(M)$, natomiast $F(N) = 5$, więc $F(M) \leq F(N)$. Tak więc dla wszystkich wielościanów funkcja $F(W)$ spełnia aksjomat monotoniczności.

Aksjomat przystawania:

Niech P i T są przystającymi do siebie wielościanami. Wtedy na mocy aksjomatu przystawania zachodzi $L(P) = L(T)$. W przypadku gdy $L(P) = L(T) < 5$ wartość funkcji $F(P) = F(T)$. Jeśli $L(P) = L(T) \geq 5$, to $F(P) = F(T) = 5$. Oznacza to, że aksjomat przystawania jest spełniony.

Aksjomat sumy:

Oznaczmy przez D bryłę powstałą z dodania do siebie wielościanów A i B takich, że $L(A) = 4$ i $L(B) = 3$. Zauważmy, że:

$$F(D) = F(A \cup B) = 5,$$

$$F(A) + F(B) = L(A) = L(B) = 3 + 4 = 7$$

Z powyższych równości wynika, że $F(D) = F(A \cup B) \neq F(A) + F(B)$. Oznacza to, że aksjomat sumy nie jest spełniony.

Zdefiniowana funkcja $F(W)$ spełnia wszystkie aksjomaty z wyjątkiem aksjomatu sumy. Oznacza to, że aksjomat sumy jest niezależny od pozostałych aksjomatów.

4.4 Niezależność aksjomatu monotoniczności.

Podczas uzasadniania niezależności aksjomatu monotoniczności skorzystamy z istnienia funkcji f gdzie $f : R \to R$, mającą następujące własności:

1. $\forall_{x \in R} \forall_{q \in Q} \; f(q \cdot x) = q \cdot f(x)$,
2. $\forall_{x,y \in R} \; f(x + y) = f(x) + f(y)$,
3. $\forall_{q \in Q} \; f(q) = q$,
4. f nie jest funkcja tożsamościową.

Uzasadnienie, że taka funkcja istnieje pomijamy.

Dla wielościanów W funkcja H zdefiniowana jest następująco: $H := f(L(W))$.

Sprawdźmy, które aksjomaty spełnia zdefiniowana funkcja $H(W)$.

Aksjomat jednostki.

Dla sześcianu jednostkowego S wartość funkcji $H(S)$ wynosi:

$$H(S) = f(L(S)) = f(1).$$

1 jest liczbą wymierną więc korzystając z 3 własności funkcji f otrzymamy, że $f(1) = 1$. Aksjomat jednostki jest spełniony przez funkcję $H(S)$.

Aksjomat monotoniczności.

Funkcja f nie jest funkcją tożsamościową, więc musi istnieć co najmniej jedna wartość $x \in R$, dla której $f(x) \neq x$. Przyjmijmy, że $x > 0$. Jeśli $x<0$ to zamiast x bierzemy liczbę do niego przeciwną, czyli $-x$, wtedy $f(-x) = f((-1)\cdot x) = -1\cdot f(x) = -f(x)$ i $-x \neq f(-x)$

Załóżmy, że $f(x) > x$. Wybierzmy dowolną liczb $q \in Q$, leżącą w przedziale $(x, f(x))$, zauważmy, że dla takich wartości zachodzi poniższa nierówność:

$$x < q < f(x).$$

Skoro $q \in Q$, to z własności funkcji f wynika, że $f(q) = q$. Wstawiając $f(q)$ w miejsce q w powyższej nierówności otrzymamy, że:

$$x < f(q) < f(x).$$

Tak więc $x < q$ i $f(q) < f(x)$.

Jeśli $f(x) < x$, to zawsze znajdziemy takie $q \in Q$, które leży w przedziale $(f(x), x)$. Dla takich wartości zachodzi następująca nierówność:

$$f(x) < q < x.$$

Podobnie jak we wcześniejszym przypadku z tego, że $q \in Q$ wynika, że $q = f(q)$, więc:

$$f(x) < f(q) < x,$$

tak więc $x > q$ i $f(q) > f(x)$.

Z powyższych obliczeń wynika, że dla funkcji f istnieją takie liczby z i y, że:

$y < z$ ale $f(y) > f(z)$.

Niech $M \subset N$, oraz M będzie czworościanem o podstawie o polu 1 i wysokości y, natomiast N niech będzie czworościanem o wysokości z, którego podstawa jest figurą przystającą do podstawy czworościanu M. Pole podstawy czworościanu N wynosi 1.

Zauważmy, że $L(M) = \frac{1}{3}\cdot 1\cdot y$, a $L(N) = \frac{1}{3}\cdot 1\cdot z$, oraz $L(M) < L(N)$. Obliczmy wartości funkcji H dla tych wielościanów:

$$H(M) = f(L\ (M)) = f(\tfrac{1}{3}\cdot 1\cdot y) = f(\tfrac{1}{3}y) = \tfrac{1}{3}\cdot f(y)$$

$$H(N) = f(L\ (N))\ f(\tfrac{1}{3}\cdot 1\cdot z) = f(\tfrac{1}{3}z) = \tfrac{1}{3}\cdot f(z)$$

Wiemy, że $f(y) > f(z)$, a więc $\frac{1}{3}\cdot f(y) > \frac{1}{3}\cdot f(z)$, czyli $H(M) > H(N)$. Aksjomat monotoniczności nie jest spełniony.

Aksjomat przystawania.

Dla P i T będących przystającymi do siebie wielościanami mamy $L(P) = L(T)$. Niech $L(P) = L(T) = x$, dla $x \in R$, wtedy:

$H(P) = f(L(P)) = f(x),$

$H(T) = f(L(T)) = f(x),$

tak więc $H(P) = H(T)$. Aksjomat przystawania jest spełniony.

Aksjomat sumy.

Wiemy, że dla wielościanu $D = A \cup B$ zachodzi własność $L(D) = L(A) + L(B).$ Korzystając z własności 2 funkcji f obliczmy ile wynosi wartość funkcji H dla wielościanu D:

$H(D) = f(L(D)) = f(L(A) + L(B)) = f(L(A)) + f(L(B)) = H(A) + H(B),$

tak więc aksjomat sumy jest spełniony.

Zdefiniowana funkcja $H(W)$ spełnia wszystkie aksjomaty z wyjątkiem aksjomatu monotoniczności. Oznacza to, że aksjomat monotoniczności jest niezależny od pozostałych aksjomatów.