

Uniwersytet Wrocławski
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyczny
specjalność: nauczycielska

Kornela Brodacka

Miara Jordana płatką Kocha

Praca magisterska
napisana pod kierunkiem
prof. dr hab. Jaceka Świątkowskiego

Wrocław 2026

Spis treści

1	Wstęp	3
2	Konstrukcja płatka Kocha	4
2.1	Ciągi indeksów i rodzina odcinków.	4
2.2	Rodzina trójkątów równobocznych i definicja płatka Kocha. . .	5
2.3	Rodzina trójkątów równoramiennych i własności obu rodzin trójkątów.	6
2.4	Rozłączność wnętrz trójkątów z definicji płatka Kocha.	9
3	Miara Jordana	13
3.1	Definicja miary Jordana	13
3.2	Przybliżenia wielokątne płatka Kocha	13

1 Wstęp

Płatek Kocha należy do klasycznych przykładów figur fraktalnych powstających w wyniku nieskończonego procesu iteracyjnego. Został opisany po raz pierwszy w pracy „Sur une courbe continue sans tangente obtenue par une construction géométrique élémentaire” przez Helgego von Kocha w roku 1904. Konstrukcja płatka Kocha prowadzi do otrzymania figury ograniczonej przez krzywą o nieskończonej długości i posiadającej skończone pole.

Celem niniejszej pracy jest obliczenie miary Jordana płatka Kocha poprzez dokładne podzielenie płatka Kocha na trójkąty, które parami na siebie nie zachodzą. Istnieje wiele artykułów poświęconych obliczaniu miary Jordana, na przykład [3] książka [5], mają one jednak tylko pogładowy charakter, natomiast w niniejszej pracy wszystko jest przedstawione precyzyjnie i ściśle.

W pracy wprowadzono odpowiedni system oznaczeń indeksujących odcinki oraz związane z nimi trójkąty równoboczne powstające w kolejnych iteracjach konstrukcji. Pozwoliło to na precyzyjne formułowanie i dowodzenie własności rozważanych figur geometrycznych, które w dalszej części pracy będą wykorzystywane do obliczenia miary Jordana płatka Kocha.

Ostatni rozdział pracy został poświęcony mierze Jordana płatka Kocha. W tym celu skonstruowano ciągi figur wielokątnych przybliżających płatek Kocha od wewnątrz i od zewnątrz. Pozwoliło to na udowodnienie mierzalności płatka Kocha w sensie Jordana oraz wyznaczenie dokładnej wartości jego pola.

Rysunki znajdujące się w pracy są generowane za pomocą narzędzi sztucznej inteligencji.

2 Konstrukcja płatka Kocha

Intuicyjna konstrukcja płatka Kocha polega na iteracyjnym modyfikowaniu każdego odcinka wyjściowej figury według tego samego schematu. W pierwszym kroku jako figurę początkową przyjmujemy trójkąt równoboczny. Każdy jego bok dzielimy na trzy równe części, następnie usuwamy środkową część i w jej miejsce wstawiamy dwa odcinki tworzące boki trójkąta równobocznego zbudowanego na usuniętym fragmencie - tak, aby ten trójkąt był skierowany na zewnątrz pierwotnego trójkąta. Zatem każdy bok trójkąta zostaje zastąpiony łamaną złożoną z czterech odcinków. W kolejnym kroku analogiczną operację stosujemy do każdego odcinka powstałego w poprzedniej interakcji to znaczy dzielimy każdy odcinek na trzy równe części, następnie usuwamy środkową część i w jej miejsce wstawiamy dwa odcinki tworzące boki trójkąta równobocznego zbudowanego na usuniętym fragmencie i skierowanego na zewnątrz. Płatek Kocha to suma rosnącej rodziny figur ograniczonych ciągiem opisanych łamanych.

2.1 Ciągi indeksów i rodzina odcinków.

Aby zdefiniować precyzyjnie płatek Kocha wprowadzimy najpierw cały szereg pomocniczych obiektów i oznaczeń.

Wprowadzmy zbiór I^* wszystkich skończonych ciągów indeksów w następujący sposób. Definiujemy zbiór indeksów $I = \{1, 2, 3, 4\}$ oraz zbiór bazowy boków $B = \{AB, BC, AC\}$ pewnego trójkąta równobocznego $\triangle ABC$. Dla każdego $k \in \mathbb{Z}^+$ definiujemy zbiór wszystkich ciągów długości k o wyrazach z I : $I^k = \{(i_1, \dots, i_k) : i_j \in I \text{ dla } j \in \{1, \dots, k\}\}$. Wówczas zbiór ciągów o długości k przypisanych do boków definiujemy jako: $I_k = \{(i_1, \dots, i_k)_\sigma : (i_1, \dots, i_k) \in I^k, \sigma \in B\}$. Ponadto okreśmy $I^* := \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$. Ponadto, dla ustalonego boku $\sigma \in B$ wprowadzamy oznaczenia $I_\sigma^k := \{(i_1, \dots, i_k)_\sigma : (i_1, \dots, i_k) \in I^k\}$ oraz $I_\sigma^* := \bigcup_{k \geq 1} I_\sigma^k$. Dla ustalonego boku $\sigma \in B$, elementy postaci $(i_1, \dots, i_k)_\sigma \in I_k$ będziemy wykorzystywać do oznaczania pewnej rodziny odcinków oraz do indeksowania dwóch rodzin trójkątów: $T_{(i_1, \dots, i_k)_\sigma}$ oraz $\Delta_{(i_1, \dots, i_k)_\sigma}$.

Opiszemy teraz rodzinę odcinków przypisanych do elementów z I_k . Wyjściowy trójkąt równoboczny $\triangle ABC$ nazwijmy Ω_0 . Rozważmy bok AB z wyjściowego trójkąta równobocznego Ω_0 . W pierwszym kroku konstrukcji, czyli dla $k = 1$, dzielimy odcinek AB na trzy równe części. Środkową część usuwamy i zastępujemy ją dwoma bokami trójkąta równobocznego zbudowanego na tej części, leżącego na zewnątrz trójkąta $\triangle ABC$. W ten sposób otrzymujemy łamaną złożoną z czterech równych odcinków. Oznaczamy je kolejno przez $(1)_{AB}$, $(2)_{AB}$, $(3)_{AB}$, $(4)_{AB}$ (patrz Rysunek 1). Analogicznie postępujemy z pozostałymi bokami BC oraz AC wyjściowego trójkąta.

Figura Ω_1 to figura ograniczona łamaną zamkniętą utworzoną ze wszystkich 12 odcinków $(i)_\sigma \in I_1$.

Dla każdego $j \in I$ odcinek $(j)_{AB}$ w następnym kroku przekształcamy w ten sam sposób. Dzielimy go na trzy równe części, środkową część usuwamy i zastępujemy ją dwoma bokami trójkąta równobocznego zbudowanego na tej części na zewnątrz figury Ω_1 . Otrzymane cztery równe odcinki oznaczamy kolejno przez

$(j, 1)_{AB}, (j, 2)_{AB}, (j, 3)_{AB}, (j, 4)_{AB}$. Analogicznie postępujemy z pozostałymi bokami BC oraz AC wyjściowego trójkąta.

Figura Ω_2 to figura ograniczona łamaną zamkniętą utworzoną ze wszystkich 48 odcinków $(i, j)_\sigma \in I_2$.

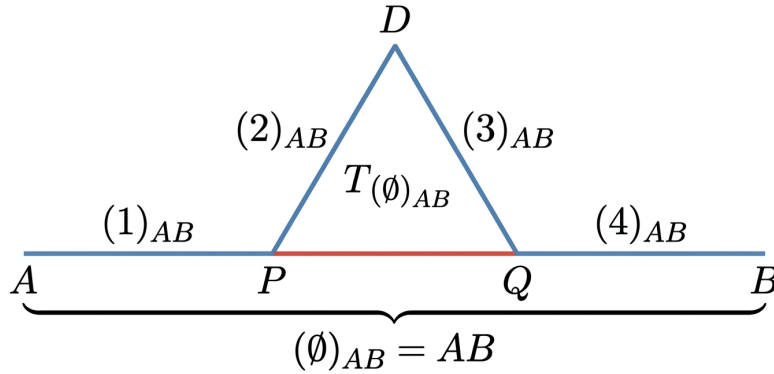
Indukcyjnie, dla każdego $k \in \mathbb{Z}^+$ oraz każdego ciągu $(i_1, \dots, i_k) \in I^k$, odcinek oznaczony przez $(i_1, \dots, i_k)_{AB}$ przekształcamy analogicznie. Dzielimy go na trzy równe części, środkową część usuwamy i zastępujemy ją dwoma bokami trójkąta równobocznego zbudowanego na tej części na zewnątrz figury Ω_k uzyskanej z wyjściowego trójkąta w k -tym kroku. Otrzymane cztery równe odcinki oznaczamy przez $(i_1, \dots, i_k, 1)_{AB}, (i_1, \dots, i_k, 2)_{AB}, (i_1, \dots, i_k, 3)_{AB}, (i_1, \dots, i_k, 4)_{AB}$. Analogicznie postępujemy z pozostałymi bokami trójkąta wyjściowego BC oraz AC . Wtedy definiujemy Ω_{k+1} jako figurę ograniczoną łamaną zamkniętą utworzoną ze wszystkich odcinków $(i_1, \dots, i_k, i_{k+1})_\sigma$, gdzie $\sigma \in \{AB, BC, AC\}$ oraz $(i_1, \dots, i_k, i_{k+1}) \in I^{k+1}$. W szczególności, zachodzi następujący fakt.

Fakt 2.1. Liczba odcinków łamanej ograniczającej figurę Ω_k wynosi $3 \cdot 4^k$.

Powyższy sposób oznaczania odcinków $(i_1, \dots, i_k)_\sigma$ rozszerzamy także na same odcinki AB, BC i AC , stosując do nich oznaczenie $(\emptyset)_{AB}, (\emptyset)_{BC}$ i $(\emptyset)_{AC}$ odpowiednio. Symbol $(\emptyset)$ nawiązuje tu do ciągu indeksów długości $k = 0$.

2.2 Rodzina trójkątów równobocznych i definicja płatką Kocha.

Definicja 2.2. Trójkąt $T_{(\emptyset)_{AB}}$ to trójkąt równoboczny nadbudowany na odcinku $AB = (\emptyset)_{AB}$, czyli trójkąt którego jednym bokiem jest środkowy odcinek podziału AB na trzy równe części, zaś dwa pozostałe boki to odcinki $(2)_{AB}$ i $(3)_{AB}$ (patrz Rysunek 1). Analogicznie trójkąt $T_{(i_1, \dots, i_k)_{AB}}$ to trójkąt równoboczny nadbudowany nad odcinkiem $(i_1, \dots, i_k)_{AB}$, którego dwoma bokami są odcinki $(i_1, \dots, i_k, 2)_{AB}$ oraz $(i_1, \dots, i_k, 3)_{AB}$. Analogicznie dla boków BC i AC wprowadzamy odpowiadające trójkąty $T_{(i_1, \dots, i_k)_\sigma}$ dla $\sigma \in \{BC, AC\}$.



Rysunek 1:

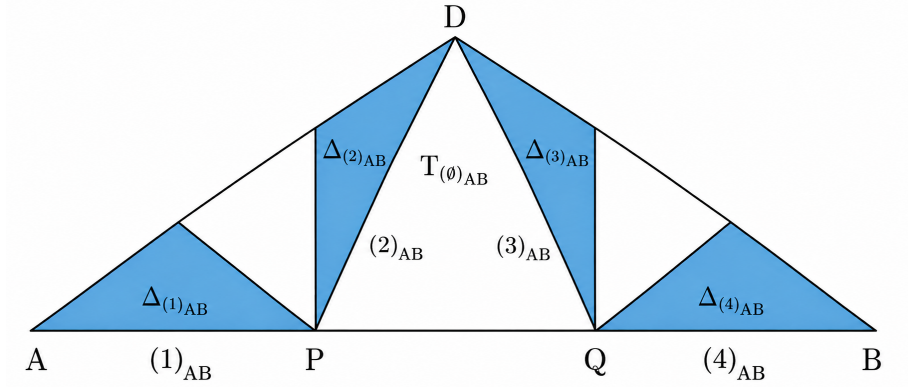
Definicja 2.3. Płatek Kocha P to suma mnogościowa trójkąta bazowego $\Omega_0 = \triangle ABC$ oraz wszystkich trójkątów nadbudowanych w nieskończonym procesie iteracji:

$$P = \Omega_0 \cup \bigcup_{\sigma \in \{AB, BC, AC\}} \left(T_{(\emptyset)_\sigma} \cup \bigcup_{\substack{(i_1, \dots, i_k) \in I^* \\ k \geq 1}} T_{(i_1, \dots, i_k)_\sigma} \right).$$

2.3 Rodzina trójkątów równoramiennych i własności obu rodzin trójkątów.

Niech D będzie punktem takim, że trójkąt $\triangle ABC$ jest równoramienny o podstawie AB , $\angle ADB = 120^\circ$ oraz D leży na zewnątrz wyjściowego trójkąta równobocznego $\triangle ABC$. Zauważmy, że punkt D jest wtedy wierzchołkiem trójkąta $T_{(\emptyset)_{AB}}$ (patrz Rysunek 2).

W Twierdzeniu 2.9 pokażemy, że dla każdego $k \in \mathbb{Z}^+$ oraz każdego ciągu $(i_1, \dots, i_k)_{AB} \in I_{AB}^k$ zachodzi $T_{(i_1, \dots, i_k)_{AB}} \subset \triangle ABD$.



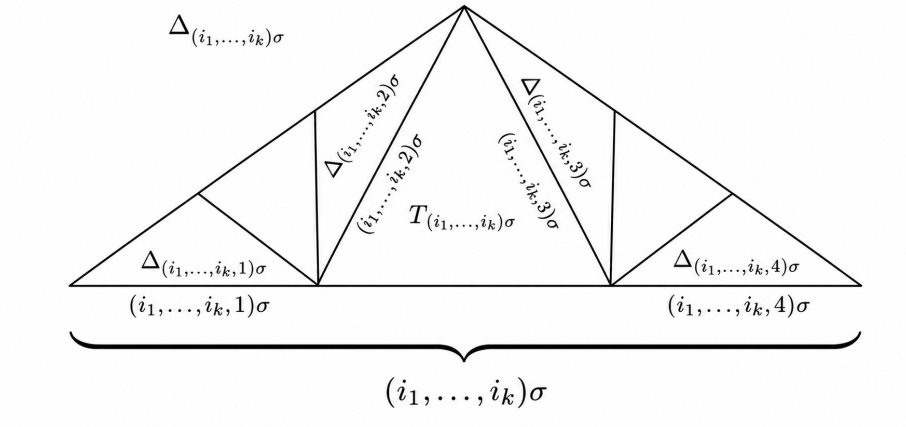
Rysunek 2:

Definicja 2.4. Niech AB będzie bokiem trójkąta początkowego. Definiujemy rodzinę trójkątów $\Delta_{(i_1, \dots, i_k)_{AB}}$ dla $(i_1, \dots, i_k)_{AB} \in I_{AB}^k$, $k \geq 1$. Dla każdego $(i_1, \dots, i_k)_{AB} \in I_{AB}^k$, trójkąt $\Delta_{(i_1, \dots, i_k)_{AB}}$ jest trójkątem równoramiennym podobnym do $\triangle ABD$, którego podstawa jest odcinkiem $(i_1, \dots, i_k)_{AB}$ oraz który zawiera trójkąt $\Delta_{(i_1, \dots, i_k)_{AB}}$, mając z nim wspólny wierzchołek (patrz Rysunek 3).

W szczególnym przypadku gdy $k = 1$ trójkąty postaci: $\Delta_{(j)_{AB}}$: $j \in I$ są pokazane na Rysunku 2.

Uwaga 2.5. Dla każdego ciągu $(i_1, \dots, i_k)_{AB}$ zachodzi $T_{(i_1, \dots, i_k)_{AB}} \subset \Delta_{(i_1, \dots, i_k)_{AB}}$.

Jest to własność analogiczna do faktu, że $\triangle PQD$ na Rysunku 2 zawiera się w trójkącie $\triangle ABD$ (patrz też Rysunek 3).



Rysunek 3: trójkąt $\Delta_{(i_1, \dots, i_k)\sigma}$ i zawarte w nim trójkąty $T_{(i_1, \dots, i_k)\sigma}$ oraz $\Delta_{(i_1, \dots, i_k, j)\sigma}$.

Lemat 2.6. Dla każdego $(i_1, \dots, i_k)_{AB} \in I_{AB}^k$ oraz dla każdego $(i_1, \dots, i_k, i_{k+1})_{AB} \in I_{AB}^{k+1}$ zachodzi $\Delta_{(i_1, \dots, i_k, i_{k+1})_{AB}} \subset \Delta_{(i_1, \dots, i_k)_{AB}}$. Analogiczna własność zachodzi też dla boków AC i BC .

Dowód. Patrz Rysunek 3. □

Lemat 2.7. Dla każdego $(i_1, \dots, i_k)_{AB} \in I_{AB}^k$ zachodzi $\Delta_{(i_1, \dots, i_k)_{AB}} \subset \triangle ABD$. Analogiczna własność zachodzi też dla boków BC i AC .

Dowód. **Krok bazowy.** Dla $k = 1$ z konstrukcji mamy (patrz Rysunek 2), że

$$\Delta_{(i)_{AB}} \subset \triangle ABD \quad \text{dla } i \in I.$$

Krok indukcyjny. Załóżmy, że dla pewnego $k \in \mathbb{N}$ oraz każdego $(i_1, \dots, i_k)_{AB} \in I_{AB}^k$ zachodzi

$$\Delta_{(i_1, \dots, i_k)_{AB}} \subset \triangle ABD.$$

Weźmy dowolny ciąg $(i_1, \dots, i_k, i_{k+1})_{AB} \in I_{AB}^{k+1}$. Z Lematu 2.6 mamy

$$\Delta_{(i_1, \dots, i_k, i_{k+1})_{AB}} \subset \Delta_{(i_1, \dots, i_k)_{AB}}.$$

Z założenia indukcyjnego otrzymujemy

$$\Delta_{(i_1, \dots, i_k)_{AB}} \subset \triangle ABD,$$

a więc $\Delta_{(i_1, \dots, i_k, i_{k+1})_{AB}} \subset \triangle ABD$.

Na mocy zasady indukcji matematycznej $\Delta_{(i_1, \dots, i_k)_{AB}} \subset \triangle ABD$ dla wszystkich k . □

Lemat 2.8. Dla każdego $(i_1, \dots, i_k)_{AB} \in I_{AB}^k$ oraz dla każdego $m \leq k$ zachodzi $\Delta_{(i_1, \dots, i_k)_{AB}} \subset \Delta_{(i_1, \dots, i_m)_{AB}}$. Analogiczna własność zachodzi też dla boków BC i AC .

Dowód. Krok bazowy. Dla $k = 1$ mamy tylko $m = 1$, więc

$$\Delta_{(i_1)AB} \subset \Delta_{(i_1)AB},$$

co jest oczywiste.

Krok indukcyjny. Załóżmy, że dla pewnego $k \in \mathbb{N}$ oraz każdego $(i_1, \dots, i_k)_{AB} \in I^k$ i każdego $m \leq k$ zachodzi

$$\Delta_{(i_1, \dots, i_k)_{AB}} \subset \Delta_{(i_1, \dots, i_m)_{AB}}.$$

Weźmy dowolny ciąg $(i_1, \dots, i_k, i_{k+1})_{AB} \in I_{AB}^{k+1}$ oraz $m \leq k + 1$.

Przypadek I. $m = k + 1$. Wtedy

$$\Delta_{(i_1, \dots, i_k, i_{k+1})_{AB}} \subset \Delta_{(i_1, \dots, i_{k+1})_{AB}},$$

co jest oczywiste.

Przypadek II. $m \leq k$. Z Lematu 2.6 mamy

$$\Delta_{(i_1, \dots, i_k, i_{k+1})_{AB}} \subset \Delta_{(i_1, \dots, i_k)_{AB}}.$$

Z założenia indukcyjnego otrzymujemy

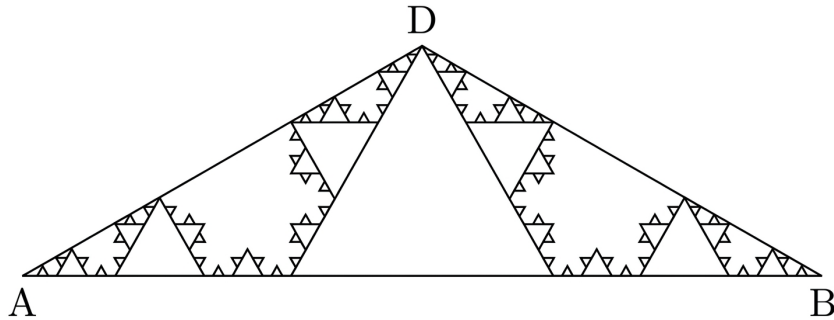
$$\Delta_{(i_1, \dots, i_k)_{AB}} \subset \Delta_{(i_1, \dots, i_m)_{AB}}.$$

Z przechodniości inkluzji dostajemy

$$\Delta_{(i_1, \dots, i_k, i_{k+1})_{AB}} \subset \Delta_{(i_1, \dots, i_m)_{AB}}.$$

Na mocy zasady indukcji matematycznej teza zachodzi dla wszystkich k oraz wszystkich $m \leq k$. $\square$

Twierdzenie 2.9. Dla każdego $k \in \mathbb{N}$ oraz dla każdego ciągu indeksów $(i_1, \dots, i_k)_{AB} \in I_{AB}^k$ trójkąt równoboczny $T_{(i_1, \dots, i_k)_{AB}}$ jest zawarty w trójkącie $\triangle ABD$, tzn. $T_{(i_1, \dots, i_k)_{AB}} \subset \triangle ABD$ (patrz Rysunek 4).



Rysunek 4:

Dowód. Na mocy Uwagi 2.5 dla każdego ciągu indeksów $(i_1, \dots, i_k)_{AB}$ zachodzi

$$T_{(i_1, \dots, i_k)_{AB}} \subset \Delta_{(i_1, \dots, i_k)_{AB}},$$

oraz na mocy Lematu 2.7 otrzymujemy

$$T_{(i_1, \dots, i_k)_{AB}} \subset \Delta_{(i_1, \dots, i_k)_{AB}} \subset \Delta ABD.$$

□

Twierdzenie 2.10. *Dla dowolnego $(i_1, \dots, i_k)_{AB}$ oraz dowolnego przedłużenia $(i_1, \dots, i_k, \dots, i_m)$ dla $m \geq k$ zachodzi $T_{(i_1, \dots, i_m)_{AB}} \subset \Delta_{(i_1, \dots, i_k)_{AB}}$.*

Dowód. Niech $(i_1, \dots, i_k) \in I^k$ oraz $(i_1, \dots, i_m) \in I^m$ będzie jego przedłużeniem, gdzie $m \geq k$.

Z Uwagi 2.5 wynika, że dla każdego ciągu $(i_1, \dots, i_m)$ trójkąt $T_{(i_1, \dots, i_m)_{AB}}$ jest zawarty w trójkącie $\Delta_{(i_1, \dots, i_m)_{AB}}$, tzn.

$$T_{(i_1, \dots, i_m)_{AB}} \subset \Delta_{(i_1, \dots, i_m)_{AB}}.$$

Ponadto, na mocy Lematu 2.8, dla $m \geq k$ zachodzi inkluzja

$$\Delta_{(i_1, \dots, i_m)_{AB}} \subset \Delta_{(i_1, \dots, i_k)_{AB}}.$$

Łącząc powyższe zależności oraz korzystając z przechodniości relacji zawierania, otrzymujemy

$$T_{(i_1, \dots, i_m)_{AB}} \subset \Delta_{(i_1, \dots, i_m)_{AB}} \subset \Delta_{(i_1, \dots, i_k)_{AB}}.$$

Zatem

$$T_{(i_1, \dots, i_m)_{AB}} \subset \Delta_{(i_1, \dots, i_k)_{AB}}.$$

□

2.4 Rozłączność wewnątrz trójkątów z definicji płatka Kocha.

W tym podrozdziale pokażemy, że trójkąty równoboczne sumujące się zgodnie z Definicją 2.3 do płatka Kocha mają parami rozłączne wnętrza tzn. parami na siebie nie zachodzą. Zaczniemy od następującej wstępnej prostej obserwacji, której dowód pomijamy.

Lemat 2.11. *Trójkąty $\Delta_{(1)_{AB}}, \Delta_{(2)_{AB}}, \Delta_{(3)_{AB}}, \Delta_{(4)_{AB}}$ mają parami rozłączne wnętrza, czyli nie zachodzą na siebie (patrz Rysunek 2). Podobnie, dla każdego $(i_1, \dots, i_k)$ trójkąty $\Delta_{(i_1, \dots, i_k, 1)_{AB}}, \Delta_{(i_1, \dots, i_k, 2)_{AB}}, \Delta_{(i_1, \dots, i_k, 3)_{AB}}, \Delta_{(i_1, \dots, i_k, 4)_{AB}}$ parami na siebie nie zachodzą (patrz Rysunek 3). Analogiczne własności zachodzą dla boków BC i AC trójkąta $\triangle ABC$.*

Definicja 2.12. Powiemy, że ciąg $(i_1, \dots, i_k)$ jest prefiksem ciągu $(i_1, \dots, i_k, i_{k+1}, \dots, i_m)$ gdy $k < m$.

Twierdzenie 2.13. *Dla dowolnych dwóch różnych ciągów indeksów z I_{AB}^* , długości $k, m \geq 1$*

$$(i_1, \dots, i_k)_{AB} \neq (j_1, \dots, j_m)_{AB}$$

zachodzi

$$\text{int}(T_{(i_1, \dots, i_k)_{AB}}) \cap \text{int}(T_{(j_1, \dots, j_m)_{AB}}) = \emptyset.$$

Analogiczna własność zachodzi też dla boków BC i AC .

Dowód. Rozważmy dwa przypadki.

Przypadek I. Ciągi $(i_1, \dots, i_k)_{AB}$ oraz $(j_1, \dots, j_m)_{AB}$ różnią się na pewnej pozycji, tzn. istnieje najmniejsze r takie, że

$$i_r \neq j_r.$$

Wówczas $(i_1, \dots, i_{r-1})_{AB} = (j_1, \dots, j_{r-1})_{AB}$. Wtedy trójkąty $\Delta_{(i_1, \dots, i_r)_{AB}}$ oraz $\Delta_{(j_1, \dots, j_r)_{AB}}$ są nadbudowane na różnych spośród czterech odcinków powstałych w wyniku konstrukcji z odcinka $(i_1, \dots, i_{r-1})_{AB}$, a więc na mocy Lematu 2.11 ich wnętrza są rozłączne:

$$\text{int}(\Delta_{(i_1, \dots, i_r)_{AB}}) \cap \text{int}(\Delta_{(j_1, \dots, j_r)_{AB}}) = \emptyset.$$

Ponieważ na mocy Twierdzenia 2.10

$$T_{(i_1, \dots, i_k)_{AB}} \subset \Delta_{(i_1, \dots, i_r)_{AB}} \quad \text{oraz} \quad T_{(j_1, \dots, j_m)_{AB}} \subset \Delta_{(j_1, \dots, j_r)_{AB}},$$

otrzymujemy

$$\text{int}(T_{(i_1, \dots, i_k)_{AB}}) \cap \text{int}(T_{(j_1, \dots, j_m)_{AB}}) = \emptyset.$$

Przypadek II. Ciągi nie różnią się na żadnej wspólnej pozycji, tzn. jeden z nich jest prefiksem drugiego. Bez straty ogólności założmy, że $(i_1, \dots, i_k)_{AB} = (j_1, \dots, j_m)_{AB}$, $k < m$.

Na mocy Twierdzenia 2.10 oba trójkąty $T_{(i_1, \dots, i_k)_{AB}}$ oraz $T_{(j_1, \dots, j_m)_{AB}}$ są zawarte w tym samym trójkącie $\Delta_{(i_1, \dots, i_k)_{AB}}$.

Z konstrukcji wynika, że w kolejnym kroku odcinek $(i_1, \dots, i_k)_{AB}$ jest zastąpiony łamaną składającą się z czterech odcinków $(i_1, \dots, i_k, j)_{AB} : j \in \{1, 2, 3, 4\}$, a na tych odcinkach nadbudowane są trójkąty $\Delta_{(i_1, \dots, i_k, j)_{AB}} : j \in \{1, 2, 3, 4\}$. W szczególności trójkąt $T_{(j_1, \dots, j_m)_{AB}}$ jest zawarty w jednym z trójkątów $\Delta_{(i_1, \dots, i_k, 1)_{AB}}$, $\Delta_{(i_1, \dots, i_k, 2)_{AB}}$, $\Delta_{(i_1, \dots, i_k, 3)_{AB}}$, $\Delta_{(i_1, \dots, i_k, 4)_{AB}}$, a ten jest rozłączny z wnętrzem trójkąta $T_{(i_1, \dots, i_k)_{AB}}$ (patrz Rysunek 3).

$$\text{Zatem } \text{int}(T_{(i_1, \dots, i_k)_{AB}}) \cap \text{int}(T_{(j_1, \dots, j_m)_{AB}}) = \emptyset.$$

W obu przypadkach otrzymujemy tezę. $\square$

Twierdzenie 2.14. *Każde dwa trójkąty występujące w Definicji 2.3 mają rozłączne wnętrza.*

Do udowodnienia powyższego Twierdzenia 2.14 będziemy potrzebować kilka uwag znajdujących się poniżej.

Uwaga 2.15. Argument z powyższego przypadku II w dowodzie Twierdzenia 2.13 obejmuje także zależność $\text{int}(T_{(\emptyset)_{AB}}) \cap \text{int}(T_{(i_1, \dots, i_k)_{AB}}) = \emptyset$.

Uwaga 2.16. Wszystkie trójkąty $T_{(i_1, \dots, i_k)_{AB}}$, gdzie $k \geq 0$, nie zachodzą na trójkąt $\triangle ABC = \Omega_0$. Analogiczna własność zachodzi też dla boków BC i AC .

Dowód. Na mocy Uwagi 2.5 każdy trójkąt $T_{(i_1, \dots, i_k)_{AB}}$ jest zawarty w pewnym trójkącie $\Delta_{(i_1, \dots, i_k)_{AB}}$. Na mocy Twierdzenia 2.9 mamy

$$T_{(i_1, \dots, i_k)_{AB}} \subset \Delta_{(i_1, \dots, i_k)_{AB}} \subset \triangle ABD.$$

Trójkąty $\triangle ABC$ oraz $\triangle ABD$ mają rozłączne wnętrza, zatem również

$$\text{int}(T_{(i_1, \dots, i_k)_{AB}}) \cap \text{int}(\triangle ABC) = \emptyset.$$

□

Uwaga 2.17. Trójkąty typu Δ powstające na różnych spośród boków AB , BC i AC trójkąta $\triangle ABC$ mają parami rozłączne wnętrza. Dokładniej dla dowolnych $(i_1, \dots, i_k) \in I^*$, $(j_1, \dots, j_m) \in I^*$ oraz $(l_1, \dots, l_n) \in I^*$ trójkąty $\Delta_{(i_1, \dots, i_k)_{AB}}$, $\Delta_{(j_1, \dots, j_m)_{BC}}$ oraz $\Delta_{(l_1, \dots, l_n)_{AC}}$ mają parami rozłączne wnętrza.

Dowód. (patrz Rysunek 5 poniżej).

Wnętrza trójkątów $\triangle ABD$ oraz $\triangle BEC$ są rozłączne:

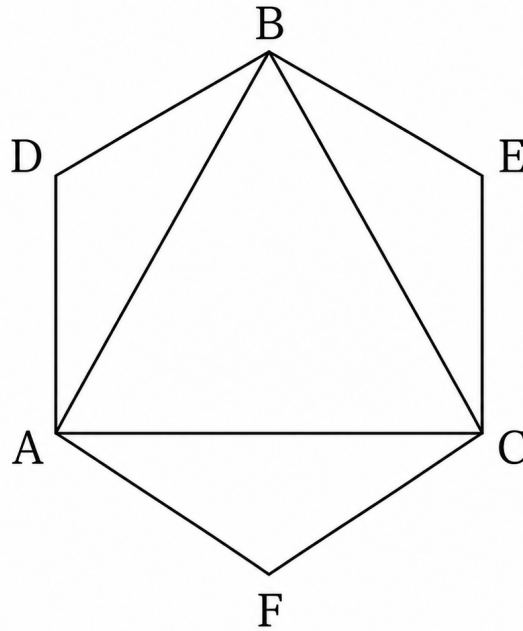
$$\text{int}(\triangle ABD) \cap \text{int}(\triangle BEC) = \emptyset.$$

Wnętrza trójkątów $\triangle BEC$ oraz $\triangle AFC$ są rozłączne:

$$\text{int}(\triangle BEC) \cap \text{int}(\triangle AFC) = \emptyset.$$

Wnętrza trójkątów $\triangle ABD$ oraz $\triangle AFC$ są rozłączne:

$$\text{int}(\triangle ABD) \cap \text{int}(\triangle AFC) = \emptyset.$$



Rysunek 5:

Na mocy Lematu 2.7 mamy $\Delta_{(i_1, \dots, i_k)AB} \subset \triangle ABD$, $\Delta_{(i_1, \dots, i_k)BC} \subset \triangle BCE$ i $\Delta_{(i_1, \dots, i_k)AC} \subset \triangle ACF$. Wiemy, że wnętrza trójkątów $\triangle ABD$, $\triangle BCE$, $\triangle ACF$ są parami rozłączne. Stąd trójkąty $\Delta_{(i_1, \dots, i_k)AB}$, $\Delta_{(i_1, \dots, i_k)BC}$, $\Delta_{(i_1, \dots, i_k)AC}$ mają parami rozłączne wnętrza. $\square$

Dowód Twierdzenia 2.14. Na mocy Twierdzenia 2.13 oraz Uwag 2.15, 2.16 i 2.17, dowolne dwa trójkąty występujące w Definicji 2.3 mają rozłączne wnętrza. $\square$

3 Miara Jordana

W niniejszym rozdziale wprowadzamy pojęcie miary Jordana dla zbiorów ograniczonych w $\mathbb{R}^2$ oraz zastosujemy miarę Jordana do obliczenia pola płatką Kocha.

3.1 Definicja miary Jordana

Definicja miary Jordana jest w podobny sposób opisana w książce [4] w Rozdziale 22.1 (str.336-338).

Definicja 3.1. Figurą ograniczoną na płaszczyźnie nazywamy zbiór $F \subset \mathbb{R}^2$, który jest zawarty w pewnym prostokącie.

Definicja 3.2. Figurą wielokątną nazywamy skończoną sumę wielokątów domkniętych.

Definicja 3.3. Polem figury wielokątnej W nazywamy liczbę $P(W)$ otrzymaną przez rozkład W na skończoną sumę trójkątów o parami rozłącznych wnętrzach i zsumowanie ich pól.

Definicja 3.4. Niech A będzie dowolnym ograniczonym podzbiorem płaszczyzny. Miara wewnętrzna Jordana zbioru A to supremum pól figur wielokątnych zawartych w A natomiast miara zewnętrzna Jordana zbioru A to infimum pól figur wielokątnych zawierających A .

Dla rozstrzygnięcia mierzalności zbioru, oraz dla wyliczenia jego miary, będziemy posługiwać się następującym twierdzeniem zaczerpniętym z wykładu [1].

Twierdzenie 3.5. *Niech A będzie ograniczonym zbiorem na płaszczyźnie. Niech Z_n będzie ciągiem figur wielokątnych zawierających A , zaś W_n będzie ciągiem figur wielokątnych zawartych w A , i załóżmy, że zachodzi warunek*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [P(Z_n) - P(W_n)] = 0.$$

Wówczas zbiór A jest mierzalny, a jego miara Jordana to

$$m_J(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(W_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n)$$

(obie granice istnieją i są równe).

3.2 Przybliżenia wielokątne płatką Kocha

Zdefiniujmy ciąg przybliżeń wielokątnych płatką Kocha od wewnątrz. W tym podrozdziale będziemy korzystać z literatury [2].

Definicja 3.6. Figura Ω_n jest figurą wielokątną powstałą po n krokach konstrukcji płatką Kocha składająca się z sumy trójkąta początkowego $\triangle ABC = \Omega_0$ oraz wszystkich trójkątów równobocznych nadbudowanych nad

odcinkami kolejnych łamanych Ω_k na etapach konstrukcji od kroku 1 do kroku n włącznie:

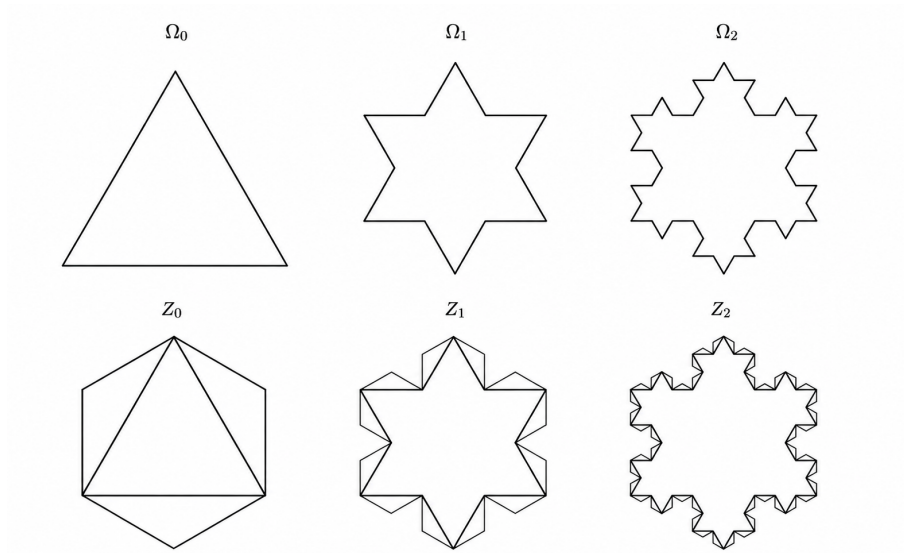
$$\Omega_n = \Omega_0 \cup \bigcup_{\sigma \in \{AB, BC, AC\}} \left(T_{(\emptyset)\sigma} \cup \bigcup_{\substack{(i_1, \dots, i_k) \in I^n \\ 1 \leq k \leq n}} T_{(i_1, \dots, i_k)\sigma} \right).$$

Zdefiniujmy teraz ciąg przybliżeń wielokątnych płatka Kocha od zewnątrz.

Definicja 3.7. Figura Z_n jest sumą Ω_n oraz trójkątów równoramiennych Δ zbudowanych nad wszystkimi odcinkami łamanej ograniczającej Ω_n :

$$Z_n = \Omega_n \cup \left(\bigcup_{\sigma \in \{AB, BC, AC\}} \bigcup_{(i_1, \dots, i_n) \in I^n} \Delta_{(i_1, \dots, i_n)\sigma} \right).$$

Będziemy stosować przybliżenia wielokątne płatka Kocha P od wewnątrz: $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \dots$, a od zewnątrz: $Z_0, Z_1, Z_2, \dots$ (patrz Rysunek 6 poniżej).



Rysunek 6: Przybliżenia wewnętrzne i zewnętrzne płatka Kocha.

Lemat 3.8. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$\Omega_n \subset P \subset Z_n$$

Dowód. Na mocy Definicji 3.7 zbiór Z_n otrzymujemy przez sumę figury Ω_n oraz trójkątów równoramiennych $\Delta_{(i_1, \dots, i_n)\sigma}$, gdzie $\sigma \in \{AB, BC, AC\}$. Na mocy Twierdzenia 2.10, dla każdego ciągu indeksów $(i_1, \dots, i_n)_\sigma$ oraz każdego jego przedłużenia $(i_1, \dots, i_m)_\sigma$, gdzie $m \geq n$, zachodzi

$$T_{(i_1, \dots, i_m)\sigma} \subset \Delta_{(i_1, \dots, i_n)\sigma}.$$

Wynika stąd, że każdy trójkąt nadbudowany w dalszych krokach konstrukcji płata Kocha jest zawarty w odpowiednim trójkacie $\Delta_{(i_1, \dots, i_n)_\sigma}$ należącym do figury Z_n . Stąd wynika, że $\mathbf{P} \subset Z_n$. Na mocy Definicji 3.6 oraz na mocy Definicji 2.3 mamy, że wszystkie trójkąty składające się na Ω_n zawierają się w płatku Kocha $\mathbf{P}$. Stąd mamy $\Omega_n \subset \mathbf{P}$. Zatem otrzymujemy $\Omega_n \subset \mathbf{P} \subset Z_n$. $\square$

Zastosujemy Twierdzenie 3.5 do zbioru $\mathbf{P}$, ciągu przybliżeń wewnętrznych Ω_n oraz ciągu przybliżeń zewnętrznych Z_n . Zgodnie z tym twierdzeniem, jeśli wykażemy, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (P(Z_n) - P(\Omega_n)) = 0,$$

to płatek Kocha $\mathbf{P}$ będzie mierzalny w sensie Jordana oraz będą zachodzić równości

$$m_J(\mathbf{P}) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(\Omega_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n).$$

Różnica $Z_n \setminus \Omega_n$ jest zawarta w sumie trójkątów równoramiennych $\Delta_{(i_1, \dots, i_n)_\sigma}$ nad odcinkami brzegu figury Ω_n (patrz Rysunek 6). Korzystając z Faktu 2.1 wiemy, że liczba odcinków wynosi $3 \cdot 4^n$. Każdy z tych trójkątów równoramiennych jest podobny do trójkąta $\Delta_{(\emptyset)_\sigma}$, w skali $\frac{1}{3^n}$. Jeżeli R oznacza pole takiego trójkąta nad boki trójkąta $\triangle ABC = \Omega_0$, to pole każdego trójkąta $\Delta_{(i_1, \dots, i_n)_\sigma}$ wynosi $R \cdot \frac{1}{9^n}$. Otrzymujemy

$$0 \leq P(Z_n) - P(\Omega_n) \leq 3 \cdot 4^n \cdot R \cdot \frac{1}{9^n} = 3R \left(\frac{4}{9}\right)^n.$$

Ponieważ $\left(\frac{4}{9}\right)^n \rightarrow 0$, gdy $n \rightarrow \infty$ stąd mamy $3R \left(\frac{4}{9}\right)^n \rightarrow 0$. Z twierdzenia o trzech ciągach dostajemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (P(Z_n) - P(\Omega_n)) = 0.$$

Z Twierdzenia 3.5 wynika, że płatek Kocha $\mathbf{P}$ jest mierzalny w sensie Jordana. Teraz wyliczymy miarę Jordana płata Kocha $\mathbf{P}$.

Twierdzenie 3.9. *Jeśli pole trójkąta $\triangle ABC = \Omega_0$ oznaczymy przez S_0 , to*

$$m_J(\mathbf{P}) = \frac{8}{5} S_0.$$

W szczególności, jeżeli bok trójkąta $\triangle ABC = \Omega_0$ ma długość a , to $S_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$, więc

$$m_J(\mathbf{P}) = \frac{8}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{2\sqrt{3}}{5} a^2.$$

Dowód. Niech $S_0 := P(\Omega_0)$. Korzystając z Faktu 2.1 wiemy, że w każdym kroku $k \in \mathbb{Z}^+$, czyli przechodząc od Ω_k do Ω_{k+1} , nadbudowujemy na bokach Ω_k $3 \cdot 4^{k-1}$ trójkątów równobocznych. Każdy z nich ma bok równy $\frac{1}{3^k}$ boku trójkąta początkowego, więc jego pole wynosi $\frac{S_0}{9^k}$. Na mocy Twierdzenia 2.14 składowe trójkąty mają parami rozłączne wnętrza stąd pole całości jest równe sumie pól części. Więc

$$P(\Omega_n) = S_0 + \sum_{k=1}^n 3 \cdot 4^{k-1} \cdot \frac{S_0}{9^k}.$$

Zatem

$$P(\Omega_n) = S_0 + \frac{S_0}{3} \sum_{k=1}^n \left(\frac{4}{9}\right)^{k-1} = S_0 + \frac{S_0}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n}{1 - \frac{4}{9}} = S_0 + \frac{3S_0}{5} \left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right).$$

W konsekwencji

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\Omega_n) = S_0 + \frac{3S_0}{5} = \frac{8}{5}S_0.$$

Jeżeli bok trójkąta $\triangle ABC = \Omega_0$ ma długość a , to $S_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, więc

$$m_J(\mathbf{P}) = \frac{8}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{2\sqrt{3}}{5}a^2.$$

□

Wniosek 3.10. Dla płatką Kocha $\mathbf{P}$ zbudowanego na trójkącie Ω_0 o boku długości $a = 1$, mamy $m_J(P) = \frac{2\sqrt{3}}{5}$.

Literatura

- [1] J. Świątkowski (2020), *Wykład "Pole figur innych niż wielokaty"*, [Dostęp 27.04.2026]. Dostępny w: https://www.math.uni.wroc.pl/~swiatkow/_dydaktyka/geom-elem/wykl_miara_jordana.pdf
- [2] J. Świątkowski (2020), *Wykład uzupełniający "Krzywa Kocha i platek Kocha"*, [Dostęp 27.04.2026]. Dostępny w: https://www.math.uni.wroc.pl/~swiatkow/_dydaktyka/geom-elem/wykl_koch.pdf
- [3] Larry Riddle, *Koch Snowflake* [online], [Dostęp 24.05.2026]. Dostępny w: [#_https://larryriddle.agnesscott.org/ifs/ksnow/ksnow.htm](https://larryriddle.agnesscott.org/ifs/ksnow/ksnow.htm)
- [4] Edwin E. Moise, *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint*, Addison Wesley, 1990.
- [5] Lan Stewart, *Stąd do nieskończoności*, Prószyński i S-ka, Warszawa, 2012.