

Uniwersytet Wrocławski  
Wydział Matematyki i Informatyki  
Instytut Matematyczny  
*specjalność: nauczycielska*

*Małgorzata Moc*

**Klasyfikacja parkietaży izotoksalnych  
o niesymetrycznych krawędziach**

Praca magisterska  
napisana pod kierunkiem  
prof. dr hab. Jacka Świątkowskiego

Wrocław 2019



# Spis treści

Wstęp	5
<b>1 Charakterystyka parkietaży izotoksalnych o niesymetrycznych krawędziach</b>	<b>7</b>
1.1 Podstawowe pojęcia dotyczące parkietaży . . . . .	7
1.2 Pojęcie flagi oraz typów flag . . . . .	9
1.3 Charakterystyka symboli parkietażu . . . . .	15
1.4 Charakterystyka typów wierzchołków i typów płytek parkietażu . . .	17
<b>2 Analiza typów kombinatorycznych parkietaży izotoksalnych o niesymetrycznych krawędziach</b>	<b>21</b>
2.1 Symbol, który składa się z dwóch dwuelementowych zbiorów, złożonych z flag leżących w poprzek. . . . .	22
2.2 Symbol, który składa się z jednej pary flag leżącej w poprzek oraz dwóch flag tworzących podzbiory jednoelementowe. . . . .	25
2.3 Symbol, który składa się z dwóch dwuelementowych zbiorów, złożonych z flag leżących po skosie. . . . .	27
2.4 Symbol, który składa się z jednej pary flag leżącej po skosie oraz dwóch flag tworzących podzbiory jednoelementowe. . . . .	29
2.5 Symbol, który składa się z dwóch dwuelementowych zbiorów, złożonych z flag leżących wzdłuż . . . . .	31
2.6 Symbol, który składa się z jednej pary flag leżącej wzdłuż oraz dwóch flag tworzących podzbiory jednoelementowe. . . . .	32
2.7 Symbol, który składa się z czterech flag tworzących podzbiory jednoelementowe. . . . .	34
2.8 Podsumowanie potencjalnych typów kombinatorycznych parkietaży izotoksalnych o niesymetrycznych krawędziach. . . . .	37
<b>3 Klasyfikacja izotoksalnych parkietaży o niesymetrycznych krawędziach</b>	<b>39</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>43</b>



# Wstęp

Niniejsza praca dotyczy klasyfikacji parkietaży izotoksalnych o niesymetrycznych krawędziach. Definicja tej klasy parkietaży znajduje się w Rozdziale 1 (patrz Definicje 9 i 10). W tej pracy zostały zbadane i sklasyfikowane *typy kombinatoryczne*, które występują wśród izotoksalnych parkietaży o niesymetrycznych krawędziach. Wynik ten nie jest całkiem nowy, gdyż został sformułowany w Rozdziale 6.4 książki Grunbauma i Shepharda [1]. W pracy [1] autorzy jedynie szkicują dowód tego rezultatu i odwołują się przy tym do dosyć zaawansowanych pojęć i metod opisanych w tej samej książce. Dowód przedstawiony w niniejszej pracy magisterskiej jest zupełnie inny i nowy, a jego cechą jest użycie jedynie elementarnych metod i środków.

Praca została napisana w sposób przystępny, elementarny i zrozumiały dla czytelnika, który interesuje się matematyką, ale niekoniecznie ją studiuje. Może być lekturą dla uczniów szkół ponadpodstawowych, jak również studentów kierunków ścisłych.

W pierwszym rozdziale zajmiemy się najpierw podstawowymi definicjami, które później będą mogły pomóc czytelnikowi lepiej zrozumieć kolejne omawiane zagadnienia. Później, w kolejnych podrozdziałach, będą omawiane różne pojęcia, fakty i lemmy, które będą wykorzystywane w Rozdziale 2, podczas analizy typów kombinatorycznych parkietaży izotoksalnych o niesymetrycznych krawędziach. Bardzo ważnym pojęciem będzie pojęcie *symbolu*, które będzie odgrywało główną rolę podczas klasyfikacji parkietaży izotoksalnych o niesymetrycznych krawędziach. Ta klasyfikacja sfinalizuje się w rozdziale trzecim, w którym to wcześniej rozpatrywane potencjalne *typy kombinatoryczne* zostaną poparte konkretnymi przykładami. Całość pracy zakończy twierdzenie, które okaże się być wynikiem niniejszej pracy.

Rysunki, które powstały w pierwszym rozdziale zostały w większości przygotowane samodzielnie, niektóre z nich zostały zaczerpnięte z dzieł Eschera [5]. Z kolei wszystkie przykłady parkietaży izotoksalnych o niesymetrycznych krawędziach w rozdziale trzecim w całości zostały zaczerpnięte z książki [1]. Podstawowe definicje z pierwszego rozdziału zostały zaczerpnięte z pracy magisterskiej [3], a inspiracją do znajdowania rozwiązań równań matematycznych podczas wspomnianej klasyfikacji była praca licencjacka [2].

Cała praca została napisana tak, by czytelnik nie miał potrzeby odwoływania się do innych źródeł. Wszystkie treści i dowody, które znalazły się w tej pracy są owocami pracy autorki, wspartej fachową pomocą, ogromnym doświadczeniem i cennymi radami opiekuna tej pracy, prof. dr hab. Jacka Świątkowskiego.



# 1 Charakterystyka parkietaży izotoksalnych o niesymetrycznych krawędziach

## 1.1 Podstawowe pojęcia dotyczące parkietaży

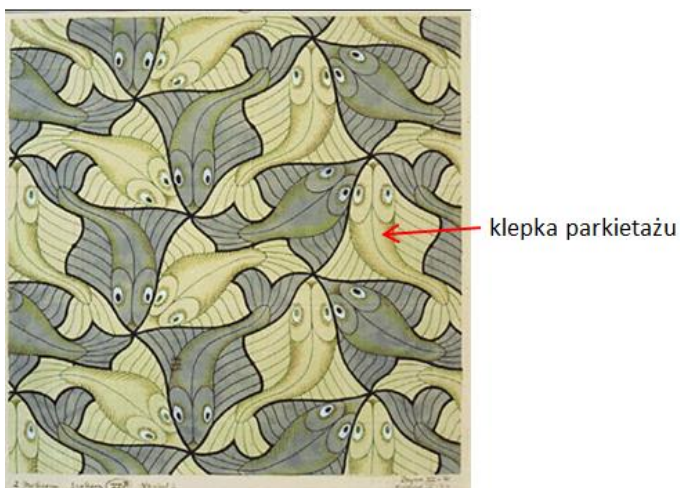
W tym podrozdziale wprowadzimy podstawowe definicje. Zostały one zaczerpnięte z pracy [3]. Z kolei Rysunki 1 – 3 są zaczerpnięte z dzieł Eschera [5].

**Definicja 1. Parkietażem** nazywamy pokrycie płaszczyzny pewnymi figurami, zwanymi klepkami, ściśle do siebie przylegającymi i nie zachodzącymi na siebie.

Definicja wyklucza możliwość powstawania dziur między klepkami.

**Definicja 2. Klepka** to figura na płaszczyźnie, ograniczona zamkniętą linią bez samoprzecięć; linię tę nazywać będziemy brzegiem klepki.

Klepki często będziemy nazywać **plytkami** parkietażu.



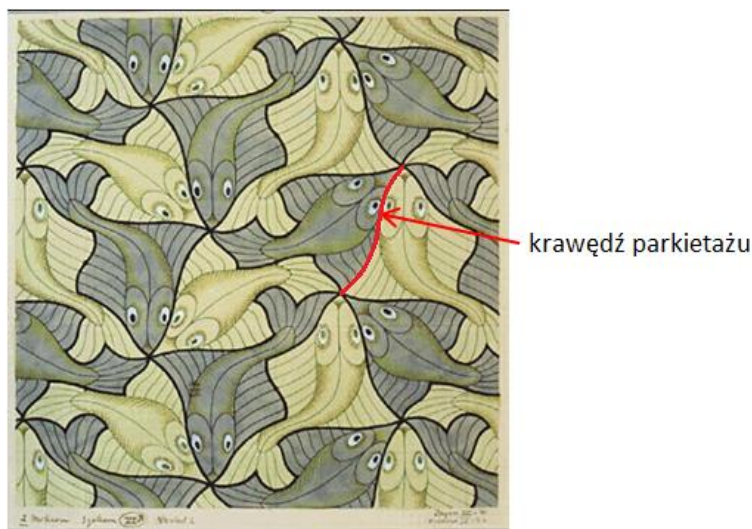
Rysunek 1: Klepka parkietażu.

**Definicja 3. Wierzchołek parkietażu** to punkt, w którym stykają się co najmniej trzy przylegające do siebie płytki.



Rysunek 2: Wierzchołek parkietażu.

**Definicja 4. Krawędź parkietażu** to fragment brzegu płytki pomiędzy dwoma kolejnymi wierzchołkami parkietażu.



Rysunek 3: Krawędź parkietażu.

**Definicja 5. Płytki przyległe** to płytki mające wspólną krawędź.

**Definicja 6. Stopień płytki** to liczba wierzchołków parkietażu należących do danej płytki.

**Definicja 7. Stopień wierzchołka** to liczba płytek występujących wokół tego wierzchołka.

**Definicja 8. Parkietaż zwyczajny** to parkietaż, w którym każda płytka ma stopień większy lub równy 3 oraz część wspólna dwóch dowolnych płytek (o ile się przecinają) to albo pojedynczy wierzchołek parkietażu, albo pojedyncza krawędź.

**Definicja 9. Izotoksalnym parkietażem** nazywamy parkietaż zwyczajny, który ma wszystkie krawędzie jednakowo położone względem całego parkietażu. Oznacza to, że symetrie parkietażu są tranzytywne na jego krawędziach.

W niniejszej pracy będziemy zajmować się izotoksalnymi parkietażami o niesymetrycznych krawędziach.

**Definicja 10. Izotoksalnym parkietażem o niesymetrycznych krawędziach** nazywamy taki parkietaż izotoksalny, że dla każdego dwóch krawędzi parkietażu istnieje dokładnie jedna symetria parkietażu przeprowadzająca jedną z tych krawędzi na drugą. W szczególności, jedyną symetrią parkietażu przeprowadzającą dowolną krawędź na samą siebie jest symetria tożsamościowa.

W dalszej części pracy wszystkie parkietaże będą parkietażami izotoksalnymi o niesymetrycznych krawędziach.



## 1.2 Pojęcie flagi oraz typów flag

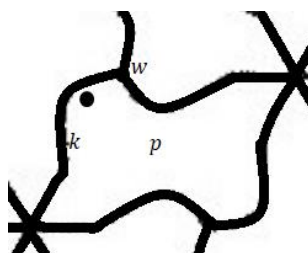
Wprowadzę teraz pojęcie flagi, aby ułatwić zrozumienie następnych pojęć.

**Definicja 11.** Flagą parkietażu nazywamy trójkę składającą się z wierzchołka, krawędzi, która zawiera ten wierzchołek i płytki, która przylega do danej krawędzi. Flagę  $F$  będziemy oznaczali:

$$F = (w, k, p),$$

gdzie  $w$  – wierzchołek,  $k$  – krawędź, która zawiera ten wierzchołek,  $p$  – płytka, która przylega do tej krawędzi.

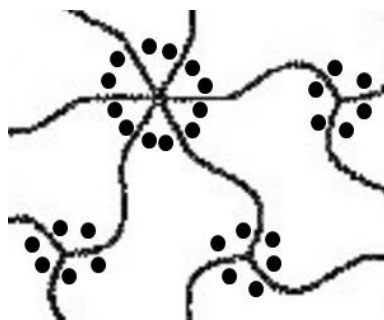
**Przykład 12.** Przykład flagi  $F = (w, k, p)$  oznaczonej symbolem  $(\bullet)$ .



Rysunek 4: Przykład flagi.

Na rysunkach, flagi można oznaczać symbolem  $(\bullet)$ , którego położenie jednoznacznie definiuje wierzchołek, krawędź, która zawiera ten wierzchołek i płytkę, która przylega do tej krawędzi.

Na Rysunku 5 pokazano wiele flag, które mogą występować w parkietażu. Każda z flag oznaczona symbolem  $(\bullet)$  leży przy zadanym wierzchołku, krawędzi, która zawiera ten wierzchołek oraz leży w płytce, która przylega do tej krawędzi.

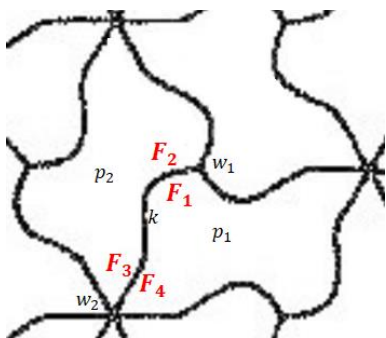


Rysunek 5: Flagi w parkietażu.

Rozróżniamy różne rodzaje flag:

- a) **flagi leżące przy krawędzi  $k$**  – są to flagi, w której występuje zadana krawędź  $k$

Przy jednej krawędzi występują 4 flagi:  $F_1 = (w_1, k, p_1)$ ,  $F_2 = (w_1, k, p_2)$ ,  $F_3 = (w_2, k, p_2)$ ,  $F_4 = (w_2, k, p_1)$ . Tę sytuację przedstawia Rysunek 6.

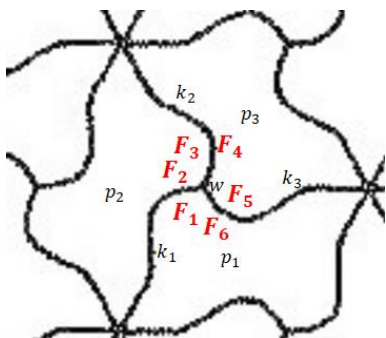


Rysunek 6: Przykład flag leżących przy krawędzi  $k$ .

- b) **flagi leżące przy wierzchołku  $w$**  – są to flagi, w których występuje ten zadany wierzchołek  $w$

Graficznie oznacza to, że symbol reprezentujący tę flagę znajduje się przy danym wierzchołku. Jeżeli stopień danego wierzchołka wynosi  $n$ , to flag występujących przy nim jest  $2n$ :  $F_1 = (w, k_1, p_1), F_2 = (w, k_1, p_2), F_3 = (w, k_2, p_2), F_4 = (w, k_2, p_3), \dots, F_{2n-1} = (w, k_n, p_n), F_{2n} = (w, k_n, p_1)$ .

Na Rysunku 7 pokazany jest wierzchołek  $w$  trzeciego stopnia, zatem flag przy wierzchołku  $w$  jest 6.

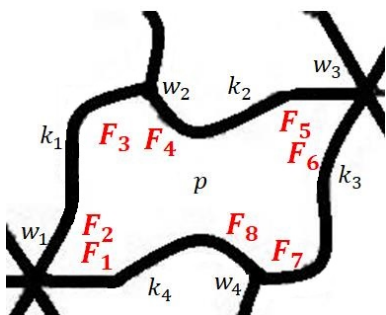


Rysunek 7: Przykład flag leżących przy wierzchołku  $w$ .

- c) **flagi zawarte w płytce  $p$**  – są to flagi, w których występuje zadana płytka  $p$

Mamy  $N$  wierzchołków w płytce, a w każdym wierzchołku płytki są dwie flagi. Zatem mamy  $2N$  takich flag.

Na Rysunku 8 pokazana jest płytka  $p$ , która ma 4 wierzchołki. Możemy zauważyć, że flag zawartych w płytce  $p$  jest 8.



Rysunek 8: Przykład flag zawartych w płytce  $p$ .

**Uwaga 13.** Możemy wyróżnić jeszcze jeden rodzaj flagi – **flaga zawarta w danej płytce  $p$ , leżąca przy ustalonym wierzchołku  $w$ , należącym do tej płytki.** Krawędź jest niezdeteminowana. W każdym ustalonym wierzchołku płytki  $w$  istnieją dwie takie flagi:  $F_1 = (w, k_1, p), F_2 = (w, k_2, p)$ . Taką sytuację przedstawia Rysunek 9.



Rysunek 9: Przykład flag zawartych w płytce  $p$ , leżące przy wierzchołku  $w$ .

**Definicja 14.** Jeśli pewna symetria  $T$  parkietażu przeprowadza wierzchołek  $w_1$  flagi  $F_1$  na wierzchołek  $w_2$  flagi  $F_2$ , krawędź  $k_1$  flagi  $F_1$  na krawędź  $k_2$  flagi  $F_2$  oraz płytkę  $p_1$  flagi  $F_1$  na płytkę  $p_2$  flagi  $F_2$ , to mówimy, że symetria  $T$  parkietażu **przeprowadza flagę  $F_1$  na flagę  $F_2$** . Gdy pewna symetria parkietażu przeprowadza jedną z flag na drugą to mówimy, że te dwie flagi parkietażu są **tego samego typu**.

**Fakt 15.** Niech  $\Omega$  będzie dowolnym parkietażem izotoksalnym o niesymetrycznych krawędziach. W parkietażu  $\Omega$  istnieją dokładnie 4 typy flag.

*Dowód.* Do ustalonej krawędzi parkietażu  $\Omega$  przylegają 4 flagi, ponieważ każda krawędź ma 2 wierzchołki oraz do każdej krawędzi przylegają 2 płytki.

Teraz pokażemy, że te 4 flagi przylegające do ustalonej krawędzi  $k$  są parami różnych typów. Niech  $F_1 = (w_1, k, p_1)$  i  $F_2 = (w_2, k, p_2)$  to flagi leżące przy krawędzi  $k$  w parkietażu  $\Omega$ , gdzie  $w_1$  i  $w_2$  to wierzchołki, które należą do krawędzi  $k$ , a  $p_1$  i  $p_2$  to płytki, które mają wspólną krawędź  $k$ . Załóżmy, że  $F_1 \neq F_2$ , a to znaczy, że  $w_1 \neq w_2$  lub  $p_1 \neq p_2$ . Załóżmy nie wprost, że istnieje symetria  $T$  parkietażu  $\Omega$ , która przeprowadza flagę  $F_1$  na flagę  $F_2$ . Z tego wynika, że symetria  $T$  parkietażu  $\Omega$  przeprowadza wierzchołek  $w_1$  na wierzchołek  $w_2$ , krawędź  $k$  na siebie oraz płytkę  $p_1$  na płytkę  $p_2$ , a to oznacza, że istnieją dwie różne symetrie parkietażu  $\Omega$  – tożsamościowa i nietożsamościowa, przeprowadzające krawędź  $k$  na siebie, co jest sprzeczne z Definicją 10.

Teraz uzasadnimy, że każda inna flaga parkietażu  $\Omega$  jest tego samego typu, co jedna z 4 flag przylegających do krawędzi  $k$ . Niech  $F'$  będzie dowolną inną flagą parkietażu  $\Omega$  i przyjmijmy oznaczenie, że  $F' = (w', k', p')$ . Z Definicji 10 wiemy, że istnieje dokładnie jedna symetria  $T$  parkietażu  $\Omega$  przeprowadzająca krawędź  $k'$  na krawędź  $k$ . Zatem ta sama symetria  $T$  przeprowadza flagę  $F'$  na jedną z 4 flag leżących przy krawędzi  $k$ . Z powyższego wynika, że flaga  $F'$  jest tego samego typu, co jedna z 4 flag leżących przy krawędzi  $k$ .  $\square$

**Fakt 16.** Niech  $\Omega$  będzie dowolnym parkietażem izotoksalnym o niesymetrycznych krawędziach. Jeśli w pewnej płytce  $p$  parkietażu  $\Omega$  flaga typu  $a$  współwystępuje z flagą typu  $b$  leżącą przy tym samym wierzchołku  $w$  zawartą w płytce  $p$ , to każda flaga typu  $a$  w parkietażu  $\Omega$  ma jako sąsiada w tym samym wierzchołku, do którego przylega, w płytce, w której jest zawarta, flagę typu  $b$ .

**Uwaga 17.** Ten fakt obejmuje zarówno przypadek, gdy typ  $b$  jest różny od typu  $a$ , jak i przypadek, gdy typ  $b$  jest tym samym typem, co typ  $a$ .

*Dowód Faktu 16.* Niech  $F_a = (w, k_1, p)$  i  $F_b = (w, k_2, p)$  będą flagami typu  $a$  i  $b$  parkietażu  $\Omega$ , leżące przy wspólnym wierzchołku  $w$  zawarte w płycie  $p$ , jak w założeniach Faktu 16.

Niech  $F'_a$  będzie dowolną inną flagą typu  $a$  parkietażu  $\Omega$ . Przyjmijmy oznaczenie, że  $F'_a = (w', k', p')$ . Zatem jest to flaga leżąca przy wierzchołku  $w'$  i zawarta w płycie  $p'$ . Niech  $F''$  będzie drugą flagą leżącą przy tym samym wierzchołku  $w'$  zawartą w płycie  $p'$ . Wtedy  $F'' = (w', k'', p')$ , gdzie  $k''$  jest inną krawędzią zawartą w płycie  $p'$  niż krawędź  $k'$ . Mamy pokazać, że flaga  $F''$  jest flagą typu  $b$ .

Korzystając z Definicji 14 wiemy, że pewna symetria  $T$  parkietażu  $\Omega$  przeprowadza flagę  $F_a$  na flagę  $F'_a$ . Zatem  $T(w) = w'$ ,  $T(k_1) = k'$  oraz  $T(p) = p'$ , czyli

$$T(w, k_1, p) = (w', k', p').$$

Zauważmy, że ta sama symetria  $T$  przeprowadza flagę  $F_b$  na flagę  $F''$ , bo

$$T(w, k_2, p) = (w', k'', p').$$

Zatem flaga  $F''$  jest flagą typu  $b$ . □

**Fakt 18.** Niech  $\Omega$  będzie dowolnym parkietażem izotoksalnym o niesymetrycznych krawędziach. Jeśli w pewnej płycie  $p$  parkietażu  $\Omega$  flaga typu  $a$  ma przy drugim końcu krawędzi  $k$ , do której przylega, flagę typu  $b$ , to każda flaga typu  $a$  w parkietażu  $\Omega$  ma przy drugim końcu krawędzi, do której przylega oraz w tej samej płycie, w której jest zawarta, flagę typu  $b$ .

**Uwaga 19.** Ten fakt obejmuje zarówno przypadek, gdy typ  $b$  jest różny od typu  $a$ , jak i przypadek, gdy typ  $b$  jest tym samym typem, co typ  $a$ .

*Dowód Faktu 18.* Niech  $F_a = (w_1, k, p)$  i  $F_b = (w_2, k, p)$  będą flagami typu  $a$  i  $b$  parkietażu  $\Omega$ , leżące przy wspólnej krawędzi  $k$  zawarte w płycie  $p$ , jak w założeniach Faktu 18.

Niech  $F'_a$  będzie dowolną inną flagą typu  $a$  parkietażu  $\Omega$  i przyjmijmy oznaczenie  $F'_a = (w', k', p')$ . Zatem jest to flaga leżąca przy wierzchołku  $w'$  i krawędzi  $k'$  zawarta w płycie  $p'$ . Niech  $F''$  będzie drugą flagą zawartą w tej samej płycie  $p'$  i leżącą przy drugim końcu krawędzi  $k'$ . Wtedy  $F'' = (w'', k', p')$ , gdzie  $w''$  jest innym wierzchołkiem krawędzi  $k'$  niż wierzchołek  $w'$ . Mamy pokazać, że flaga  $F''$  jest flagą typu  $b$ .

Korzystając z Definicji 14 wiemy, że pewna symetria  $T$  parkietażu  $\Omega$  przeprowadza flagę  $F_a$  na flagę  $F'_a$ . Zatem  $T(w_1) = w'$ ,  $T(k) = k'$  oraz  $T(p) = p'$ , czyli

$$T(w_1, k, p) = (w', k', p').$$

Zauważmy, że ta sama symetria  $T$  przeprowadza flagę  $F_b$  na flagę  $F''$ , bo

$$T(w_2, k, p) = (w'', k', p').$$

Zatem flaga  $F''$  jest flagą typu  $b$ . □

**Fakt 20.** Niech  $\Omega$  będzie dowolnym parkietazem izotoksalnym o niesymetrycznych krawędziach. Jeśli w parkietazu  $\Omega$  flaga typu  $a$  ma po drugiej stronie krawędzi  $k$ , do której przylega, przy tym samym wierzchołku  $w$ , przy którym leży, flagę typu  $b$ , to każda flaga typu  $a$  w parkietazu  $\Omega$  ma po drugiej stronie krawędzi, do której przylega oraz przy tym samym wierzchołku  $w$ , przy którym leży, flagę typu  $b$ .

**Uwaga 21.** Ten fakt obejmuje zarówno przypadek, gdy typ  $b$  jest różny od typu  $a$ , jak i przypadek, gdy typ  $b$  jest tym samym typem, co typ  $a$ .

*Dowód Faktu 20.* Niech  $F_a = (w, k, p_1)$  i  $F_b = (w, k, p_2)$  będą flagami typu  $a$  i  $b$  parkietazu  $\Omega$ , leżące przy wspólnym wierzchołku  $w$  oraz przy wspólnej krawędzi  $k$ , jak w założeniach Faktu 20.

Niech  $F'_a$  będzie dowolną inną flagą typu  $a$  parkietazu  $\Omega$  i przyjmijmy oznaczenie  $F'_a = (w', k', p')$ . Zatem jest to flaga leżąca przy wierzchołku  $w'$  i krawędzi  $k'$  zawarta w płytce  $p'$ . Niech  $F''$  będzie drugą flagą leżącą przy tym samym wierzchołku  $w'$  po drugiej stronie krawędzi  $k'$ . Wtedy  $F'' = (w', k', p'')$ , gdzie  $p''$  jest inną płytką leżącą przy krawędzi  $k'$  niż płytka  $p'$ . Mamy pokazać, że flaga  $F''$  jest flagą typu  $b$ .

Korzystając z Definicji 14 wiemy, że pewna symetria  $T$  parkietazu  $\Omega$  przeprowadza flagę  $F_a$  na flagę  $F'_a$ . Zatem  $T(w) = w'$ ,  $T(k) = k'$  oraz  $T(p_1) = p'$ , czyli

$$T(w, k, p_1) = (w', k', p').$$

Zauważmy, że ta sama symetria  $T$  przeprowadza flagę  $F_b$  na flagę  $F''$ , bo

$$T(w, k, p_2) = (w', k', p'').$$

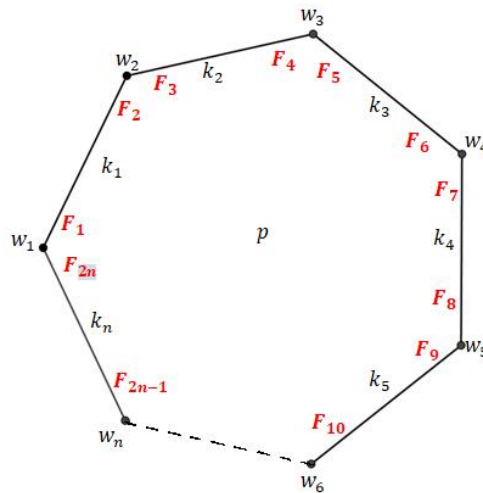
Zatem flaga  $F''$  jest flagą typu  $b$ . □

**Definicja 22.** Jeżeli  $w_1, w_2, \dots, w_n$  to kolejne wierzchołki w płytce  $p$ , to flagi, które występują w tej płytce możemy zapisać w następującym porządku:

$$(w_1, [w_1 w_2], p), (w_2, [w_1 w_2], p), (w_2, [w_2 w_3], p), (w_3, [w_2 w_3], p), \dots, \\ (w_n, [w_{n-1}, w_n], p), (w_n, [w_n, w_1], p), (w_1, [w_n, w_1], p),$$

gdzie  $[w_i, w_{i+1}]$  oznacza krawędź zawierającą wierzchołki  $w_i$  i  $w_{i+1}$  dla  $i = 1, \dots, n$ .

Takie uporządkowanie będziemy nazywali **cyklicznym porządkiem flag w płytce**. Rysunek 10 przedstawia przykład płytki, która ma  $n$  wierzchołków. Zatem flagi  $F_1, F_2, \dots, F_{2n}$  oznaczają odpowiednio flagi  $(w_1, [w_1 w_2], p)$ ,  $(w_2, [w_1 w_2], p)$ ,  $(w_2, [w_2 w_3], p)$ ,  $(w_3, [w_2 w_3], p)$ ,  $\dots$ ,  $(w_n, [w_{n-1}, w_n], p)$ ,  $(w_n, [w_n, w_1], p)$ ,  $(w_1, [w_n, w_1], p)$ .



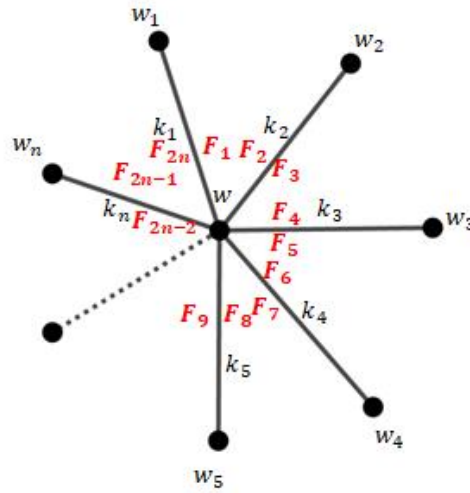
Rysunek 10: Przykład cyklicznego porządku flag w płytce  $p$ .

**Definicja 23.** Jeżeli  $k_1, k_2, \dots, k_n$  to kolejne krawędzie w wierzchołku  $w$ , to flagi, które występują przy tym wierzchołku możemy zapisać w następującym porządku:

$$(w, k_1, [k_1 k_2]), (w, k_2, [k_1 k_2]), (w, k_2, [k_2 k_3]), (w, k_3, [k_2 k_3]), \dots, \\ (w, k_n, [k_{n-1}, k_n]), (w, k_n, [k_n, k_1]), (w, k_1, [k_n, k_1]),$$

gdzie  $[k_i, k_{i+1}]$  oznacza płytkę zawierającą krawędzie  $k_i$  i  $k_{i+1}$ , położoną pomiędzy nimi, dla  $i = 1, \dots, n$ .

Takie uporządkowanie będziemy nazywali **cyklicznym porządkiem flag wokół wierzchołka**. Rysunek 11 przedstawia przykład wierzchołka, z którego wychodzi  $n$  krawędzi. Zatem flagi  $F_1, F_2, \dots, F_{2n}$  oznaczają odpowiednio flagi  $(w, k_1, [k_1 k_2]), (w, k_2, [k_1 k_2]), (w, k_2, [k_2 k_3]), (w, k_3, [k_2 k_3]), \dots, (w, k_n, [k_{n-1}, k_n]), (w, k_n, [k_n, k_1]), (w, k_1, [k_n, k_1])$ .



Rysunek 11: Przykład cyklicznego porządku flag wokół wierzchołka  $w$ .

**Fakt 24.** Jeśli przy pewnych dwóch wierzchołkach parkietażu występują flagi tego samego typu  $a$ , to stopnie tych wierzchołków są jednakowe oraz cykliczne porządki typów flag wokół tych wierzchołków też są jednakowe.

*Dowód.* Niech  $F_a$  i  $F'_a$  będą flagami typu  $a$  występującymi przy wierzchołkach odpowiednio  $w$  i  $w'$ , przy czym  $w \neq w'$ .

Korzystając z Definicji 14 wiemy, że pewna symetria  $T$  parkietażu przeprowadza flagę  $F_a$  na flagę  $F'_a$ . Zatem  $T(w) = w'$ . Z tego, że symetria  $T$  parkietażu przeprowadza wierzchołek  $w$  parkietażu na wierzchołek  $w'$  wynika, że symetria  $T$  parkietażu przeprowadza flagi leżące przy wierzchołku  $w$  na flagi leżące przy wierzchołku  $w'$ , a zatem flag przy wierzchołku  $w$  jest tyle samo, co flag przy wierzchołku  $w'$ . Liczba flag występujących przy wierzchołku  $w$  to podwojenie stopnia wierzchołka. Z tego wynika, że stopnie wierzchołków  $w$  i  $w'$  też są jednakowe.

Zauważmy, że jeśli symetria  $T$  parkietażu przeprowadza wierzchołek  $w$  parkietażu na wierzchołek  $w'$ , i jeśli  $F_1, \dots, F_n$  jest cyklicznie uporządkowanym ciągiem flag wokół wierzchołka  $w$ , to  $T(F_1), \dots, T(F_n)$  jest cyklicznie uporządkowanym ciągiem flag wokół wierzchołka  $w'$ . Zauważmy, że typy flag  $F_i$  oraz  $T(F_i)$  są jednakowe, dla  $i = 1, \dots, n$ , zatem cykliczne porządki typów flag wokół wierzchołka  $w$  i  $w'$  też są jednakowe.  $\square$

### 1.3 Charakterystyka symboli parkietażu

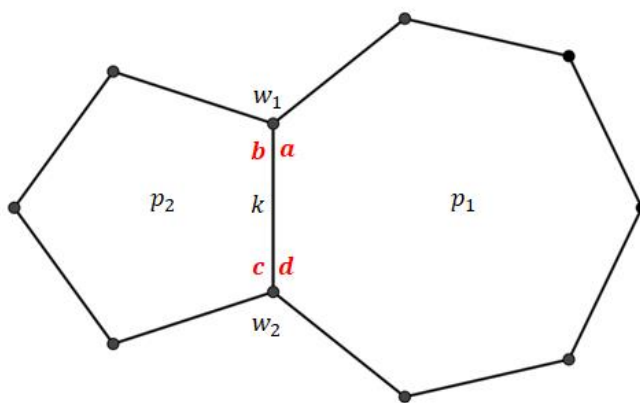
Symbol parkietażu, to informacja jakiego typu sąsiadów przy wspólnym wierzchołku we wspólnej płycie mają flagi poszczególnych typów. Dzięki Faktowi 16 wiemy, że typ sąsiada przy wspólnym wierzchołku we wspólnej płycie jest jednoznaczny dla każdego typu. Zatem mamy dwie możliwości:

- 1) sąsiad ma ten sam typ,
- 2) sąsiad ma inny typ.

Cztery typy flag możemy zatem pogrupować w podzbiory jednoelementowe lub dwuelementowe, przy czym każdy typ należy do dokładnie jednego takiego podzbioru.

**Definicja 25.** Niech  $\Omega$  będzie dowolnym parkietażem izotoksalnym o niesymetrycznych krawędziach. **Symbol parkietażu**  $\Omega$  to sposób podzielenia 4 typów występujących w nim flag na podzbiory (jednoelementowe lub dwuelementowe), takie że każdy z tych podzbiorów reprezentuje typy flag współwystępujących przy pewnym wierzchołku w pewnej płycie.

Oznaczmy przez  $a, b, c, d$  cztery różne typy flag, leżące przy krawędzi  $k$ , przy czym flaga typu  $a$  leży przy wierzchołku  $w_1$  i jest zawarta w płycie  $p_1$ , flaga typu  $b$  leży przy wierzchołku  $w_1$  i jest zawarta w płycie  $p_2$ , flaga typu  $c$  leży przy wierzchołku  $w_2$  i jest zawarta w płycie  $p_2$  oraz flaga typu  $d$  leży przy wierzchołku  $w_2$  i jest zawarta w płycie  $p_1$ . Takie oznaczenie flag ilustruje Rysunek 12.



Rysunek 12: Oznaczenie flag.

Oznaczenia flag  $a, b, c, d$  w takim porządku będziemy używali w Definicji 26.

**Definicja 26.** O parach flag  $(a, b)$  i  $(c, d)$  mówimy, że są to **parę flag leżące w poprzek**, o parach flag  $(a, c)$  i  $(b, d)$  mówimy, że są to **parę flag leżące po skosie**, a o parach flag  $(a, d)$  i  $(b, c)$  mówimy, że są to **parę flag leżące wzdłuż**.

Zastanowimy się teraz, ile rodzajów potencjalnych symboli może pojawiać się w parkietażach izotoksalnych o niesymetrycznych krawędziach. Poniżej rozpatrzemy wszystkie przypadki.

- I) W symbolu występuje dwuelementowy podzbiór złożony z flag leżących w poprzek. Wtedy pozostałe dwie flagi spełniają jeden z następujących warunków:
- 1) pozostałe 2 flagi tworzą drugi dwuelementowy podzbiór. Zatem cały symbol składa się z dwóch dwuelementowych zbiorów złożonych z flag leżących w poprzek.
  - 2) pozostałe 2 flagi tworzą w symbolu 2 podzbiory jednoelementowe.
- II) W symbolu występuje dwuelementowy podzbiór złożony z flag leżących po skosie. Wtedy pozostałe dwie flagi spełniają jeden z następujących warunków:
- 1) pozostałe 2 flagi tworzą drugi dwuelementowy podzbiór. Zatem cały symbol składa się z dwóch dwuelementowych zbiorów złożonych z flag leżących po skosie.
  - 2) pozostałe 2 flagi tworzą w symbolu 2 podzbiory jednoelementowe.
- III) W symbolu występuje dwuelementowy podzbiór złożony z flag leżących wzdłuż. Wtedy pozostałe dwie flagi spełniają jeden z następujących warunków:
- 1) pozostałe 2 flagi tworzą drugi dwuelementowy podzbiór. Zatem cały symbol składa się z dwóch dwuelementowych zbiorów złożonych z flag leżących wzdłuż.
  - 2) pozostałe 2 flagi tworzą w symbolu 2 podzbiory jednoelementowe.
- IV) W symbolu nie występuje żaden dwuelementowy podzbiór (wszystkie opcje dwuelementowego podzbioru już rozpatrywaliśmy w punktach I, II i III). Zatem mamy 4 podzbiory jednoelementowe.

**Wniosek 27.** Podsumujmy wszystkie rodzaje potencjalnych symboli, które mogą wystąpić w izotoksalnym parkietażu o niesymetrycznych krawędziach. Rozróżniamy 7 rodzajów symboli składających się z:

- 1) dwóch dwuelementowych zbiorów, złożonych z flag leżących w poprzek,
- 2) jednej pary flag leżącej w poprzek oraz dwóch flag tworzących podzbiory jednoelementowe,
- 3) dwóch dwuelementowych zbiorów, złożonych z flag leżących po skosie,
- 4) jednej pary flag leżącej po skosie oraz dwóch flag tworzących podzbiory jednoelementowe,
- 5) dwóch dwuelementowych zbiorów, złożonych z flag leżących wzdłuż,
- 6) jednej pary flag leżącej wzdłuż oraz dwóch flag tworzących podzbiory jednoelementowe,
- 7) czterech flag tworzących podzbiory jednoelementowe.



## 1.4 Charakterystyka typów wierzchołków i typów płytek parkietażu

W tym rozdziale wprowadzimy pojęcie typów wierzchołków i typów płytek parkietażu. Przeanalizujemy także ilość takich typów w parkietażach izotoksalnych o niesymetrycznych krawędziach w zależności od symbolu takiego parkietażu.

**Definicja 28.** Mówimy, że **wierzchołki parkietażu  $\Omega$  są tego samego typu**, gdy pewna symetria parkietażu  $\Omega$  przeprowadza jeden z tych wierzchołków na drugi.

**Definicja 29.** Mówimy, że **płytki parkietażu  $\Omega$  są tego samego typu**, gdy pewna symetria parkietażu  $\Omega$  przeprowadza jedną z tych płytek na drugą.

Poniższe lematy pozwolą nam scharakteryzować, ile typów wierzchołków oraz płytek może pojawić się w izotoksalnym parkietażu  $\Omega$  o niesymetrycznych krawędziach.

**Lemat 30.** *Jeśli w symbolu parkietażu  $\Omega$  pojawia się dwuelementowy podzbiór złożony z flag leżących po skosie lub wzdłuż, to wszystkie wierzchołki parkietażu  $\Omega$  są tego samego typu.*

*Dowód.* Niech  $a, b$  będą typami flag leżącymi po skosie lub wzdłuż i tworzącymi dwuelementowy podzbiór w symbolu. Niech  $F_a$  i  $F_b$  będą flagami przy krawędzi  $k$  o tych typach. Wtedy  $F_a = (w_1, k, p)$ ,  $F_b = (w_2, k, p')$ , gdzie  $w_1, w_2$  to różne wierzchołki krawędzi  $k$ , zaś płytki  $p$  i  $p'$  leżące przy krawędzi  $k$  mogą być różne lub jednakowe (nie jest to dla nas istotne).

Niech  $F$  będzie flagą współwystępującą z flagą  $F_a$  przy tym samym wierzchołku  $w_1$  w tej samej płytce  $p_1$ . Z definicji symbolu, flaga  $F$  ma typ  $b$ , czyli jest tego samego typu, co flaga  $F_b$ . Zatem istnieje symetria  $T$  parkietażu  $\Omega$  przeprowadzająca flagę  $F$  na flagę  $F_b$ . Zauważmy, że wówczas  $T(w_1) = w_2$ . Z tego wynika, że wierzchołek  $w_1$  jest tego samego typu, co wierzchołek  $w_2$ .

Teraz pokażemy, że każdy inny wierzchołek parkietażu  $\Omega$  jest tego samego typu, co wierzchołki  $w_1$  i  $w_2$ . Niech  $w'$  będzie dowolnym innym wierzchołkiem parkietażu  $\Omega$ . Niech  $k'$  będzie dowolną krawędzią zawierającą wierzchołek  $w'$ . Z izotoksalności parkietażu  $\Omega$ , istnieje symetria  $T_1$  przeprowadzająca krawędź  $k'$  na krawędź  $k$ . Zauważmy, że ta sama symetria  $T_1$  parkietażu  $\Omega$  przeprowadza wierzchołek  $w'$  na wierzchołek  $w_1$  lub  $w_2$ . Z tego wynika, że wszystkie wierzchołki parkietażu  $\Omega$  są tego samego typu.  $\square$

**Lemat 31.** *Jeśli w symbolu parkietażu  $\Omega$  nie pojawia się dwuelementowy podzbiór złożony z flag leżących po skosie lub wzdłuż, to wszystkie wierzchołki parkietażu  $\Omega$  są dwóch różnych typów oraz końcami każdej krawędzi są wierzchołki dwóch różnych typów. Typy występują "na przemian".*

*Dowód.* Niech  $F_a, F_b, F_c, F_d$  będą flagami odpowiednio typu  $a, b, c, d$  leżącymi wokół krawędzi  $k$ , takie że  $F_a = (w_1, k, p_1)$ ,  $F_b = (w_1, k, p_2)$ ,  $F_c = (w_2, k, p_2)$ ,  $F_d = (w_2, k, p_1)$ , gdzie  $w_1$  i  $w_2$  to wierzchołki krawędzi  $k$  oraz  $p_1$  i  $p_2$  to płytki leżące przy krawędzi  $k$ .

Niech  $F$  będzie flagą współwystępującą z flagą  $F_a$  przy tym samym wierzchołku  $w_1$  w tej samej płytce  $p_1$ . Z definicji symbolu, flaga  $F$  nie może być typu  $c$  lub  $d$ , ponieważ w symbolu parkietażu  $\Omega$  nie pojawia się dwuelementowy podzbiór złożony

z flag leżących po skosie lub wzdłuż. Zatem flaga  $F$  może mieć typ  $a$  lub typ  $b$ . Z Faktów 16 oraz 20 wynika, że przy wierzchołku  $w_1$  nie występuje żadna flaga typu  $c$  lub  $d$ . Wynika to z tego, że w symbolu parkietazu  $\Omega$  pojawi się dwuelementowy podzbiór złożony z flag leżących w poprzek lub/i pojawią się flagi, które tworzą podzbiory jednoelementowe. Zatem wokół wierzchołka  $w_1$  będą pojawiały się tylko typy flag  $a$  i  $b$ . Analogiczne rozumowanie możemy przeprowadzić dla wierzchołka  $w_2$ , z tym, że wokół wierzchołka  $w_2$  będą pojawiały się tylko typy flag  $c$  i  $d$ . Zatem przy wierzchołku  $w_1$  mamy inne typy flag, niż przy wierzchołku  $w_2$ , a więc symetria  $T$  parkietazu  $\Omega$  nie przeprowadza wierzchołka  $w_2$  na wierzchołek  $w_1$ . Z tego wynika, że przy krawędzi  $k$  mamy 2 różne typy wierzchołków  $w_1$  i  $w_2$ .

Teraz pokażemy, że w całym parkietazu  $\Omega$  mamy 2 różne typy wierzchołków. Niech wierzchołki  $w'_1$  oraz  $w'_2$  będą dowolnymi innymi wierzchołkami parkietazu  $\Omega$ , niż wierzchołki  $w_1$  oraz  $w_2$ , będącymi końcami wspólnej krawędzi. Niech  $k'$  będzie krawędzią parkietazu  $\Omega$  zawierającą wierzchołki  $w'_1$  oraz  $w'_2$ . Z izotoksalności parkietazu  $\Omega$ , istnieje symetria  $T_1$  przeprowadzająca krawędź  $k'$  na krawędź  $k$ . Zauważmy, że ta sama symetria  $T_1$  parkietazu przeprowadza wierzchołek  $w'_1$  na wierzchołek  $w_1$  lub na wierzchołek  $w_2$ . Bez straty ogólności, załóżmy, że symetria  $T_1$  parkietazu przeprowadza wierzchołek  $w'_1$  na wierzchołek  $w_1$ , a więc ta sama symetria  $T_1$  przeprowadza wierzchołek  $w'_2$  na wierzchołek  $w_2$ . Z tego wynika, że wierzchołek  $w'_1$  jest tego samego typu, co wierzchołek  $w_1$  oraz wierzchołek  $w'_2$  jest tego samego typu, co wierzchołek  $w_2$ . Zatem w parkietazu  $\Omega$  mamy 2 różne typy wierzchołków.

Z tego, że przy każdej krawędzi parkietazu  $\Omega$  mamy 2 różne typy wierzchołków i w całym parkietazu  $\Omega$  istnieją 2 różne typy wierzchołków wynika, że typy wierzchołków występują "na przemian".  $\square$

**Lemat 32.** *Jeśli w symbolu parkietazu  $\Omega$  pojawia się dwuelementowy podzbiór złożony z flag leżących w poprzek lub po skosie, to w tym parkietazu wszystkie płytki są tego samego typu.*

*Dowód.* Niech  $a, b$  będą typami flag leżącymi w poprzek lub po skosie i tworzącymi dwuelementowy podzbiór w symbolu. Niech  $F_a$  i  $F_b$  będą flagami przy krawędzi  $k$  o tych typach. Wtedy  $F_a = (w_1, k, p_1)$ ,  $F_b = (w', k, p_2)$ , gdzie  $w_1$  i  $w'$  to wierzchołki krawędzi  $k$ , mogą być różne lub jednakowe (nie jest to dla nas istotne), zaś  $p_1$  i  $p_2$  to różne płytki leżące przy krawędzi  $k$ .

Niech  $F$  będzie flagą współwystępującą z flagą  $F_a$  przy tym samym wierzchołku  $w_1$  w tej samej płytce  $p_1$ . Z definicji symbolu, flaga  $F$  ma typ  $b$ , czyli jest tego samego typu, co flaga  $F_b$ . Zatem istnieje symetria  $T$  parkietazu  $\Omega$  przeprowadzająca flagę  $F$  na flagę  $F_b$ . Zauważmy, że wówczas  $T(p_1) = p_2$ . Z tego wynika, że płytka  $p_1$  jest tego samego typu, co płytka  $p_2$ .

Teraz pokażemy, że każda inna płytka parkietazu  $\Omega$  jest tego samego typu, co płytki  $p_1$  i  $p_2$ . Niech  $p'$  będzie dowolną inną płytką parkietazu  $\Omega$ . Niech  $k'$  będzie dowolną krawędzią zawierającą płytkę  $p'$ . Z izotoksalności parkietazu  $\Omega$ , istnieje symetria  $T_1$  przeprowadzająca krawędź  $k'$  na krawędź  $k$ . Zauważmy, że ta sama symetria  $T_1$  parkietazu  $\Omega$  przeprowadza płytkę  $p'$  na płytki  $p_1$  lub  $p_2$ . Z tego wynika, że wszystkie płytki parkietazu  $\Omega$  są tego samego typu.  $\square$

**Lemat 33.** *Jeśli w symbolu parkietazu  $\Omega$  nie pojawia się dwuelementowy podzbiór złożony z flag leżących w poprzek lub po skosie, to w tym parkietazu występują dwa różne typy płytek. Ponadto, płytki parkietazu  $\Omega$ , leżące po dwóch stronach dowolnej krawędzi tego parkietazu, mają różne typy.*

*Dowód.* Niech  $F_a, F_b, F_c, F_d$  będą flagami odpowiednio typu  $a, b, c, d$  leżącymi wokół krawędzi  $k$ , takie że  $F_a = (w_1, k, p_1), F_b = (w_1, k, p_2), F_c = (w_2, k, p_2), F_d = (w_2, k, p_1)$ , gdzie  $w_1$  i  $w_2$  to wierzchołki krawędzi  $k$  oraz  $p_1$  i  $p_2$  to płytki leżące przy krawędzi  $k$ .

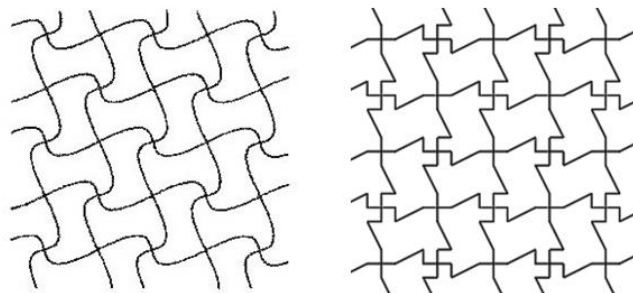
Niech  $F$  będzie flagą współwystępującą z flagą  $F_a$  przy tym samym wierzchołku  $w_1$  w tej samej płytce  $p_1$ . Z definicji symbolu, flaga  $F$  nie może być typu  $b$  lub  $c$ , ponieważ w symbolu parkietażu  $\Omega$  nie pojawia się dwuelementowy podzbiór złożony z flag leżących w poprzek lub po skosie. Zatem flaga  $F$  może mieć typ  $a$  lub typ  $d$ . Z Faktów 16 oraz 18 wynika, że w płytce  $p_1$  nie występuje żadna flaga typu  $b$  lub  $c$ . Wynika to z tego, że w symbolu parkietażu  $\Omega$  pojawi się dwuelementowy podzbiór złożony z flag leżących wzdłuż lub/i pojawią się flagi, które tworzą podzbiory jednoelementowe. Zatem w płytce  $p_1$  będą pojawiały się tylko typy flag  $a$  i  $d$ . Analogiczne rozumowanie możemy przeprowadzić dla płytki  $p_2$ , z tym, że w płytce  $p_2$  będą pojawiały się tylko typy flag  $b$  i  $c$ . Zatem w płytce  $p_1$  mamy inne typy flag, niż w płytce  $p_2$ , a więc symetria  $T$  parkietażu  $\Omega$  nie przeprowadza płytki  $p_2$  na płytkę  $p_1$ . Z tego wynika, że przy krawędzi  $k$  mamy 2 różne typy płytek  $p_1$  i  $p_2$ .

Teraz pokażemy, że w całym parkietażu  $\Omega$  mamy 2 różne typy płytek. Niech płytki  $p'_1$  oraz  $p'_2$  będą dowolnymi innymi płytkami parkietażu  $\Omega$ , niż płytki  $p_1$  oraz  $p_2$ , przylegającymi do wspólnej krawędzi. Niech  $k'$  będzie krawędzią parkietażu  $\Omega$  zawierającą płytki  $p'_1$  oraz  $p'_2$ . Z izotoksalności parkietażu  $\Omega$ , istnieje symetria  $T_1$  przeprowadzająca krawędź  $k'$  na krawędź  $k$ . Zauważmy, że ta sama symetria  $T_1$  parkietażu przeprowadza płytkę  $p'_1$  na płytkę  $p_1$  lub na płytkę  $p_2$ . Bez straty ogólności, załóżmy, że symetria  $T_1$  parkietażu przeprowadza płytkę  $p'_1$  na płytkę  $p_1$ , a więc ta sama symetria  $T_1$  przeprowadza płytkę  $p'_2$  na płytkę  $p_2$ . Z tego wynika, że płytka  $p'_1$  jest tego samego typu, co płytka  $p_1$  oraz płytka  $p'_2$  jest tego samego typu, co płytka  $p_2$ . Zatem w parkietażu  $\Omega$  mamy 2 różne typy płytek.

Z tego, że przy każdej krawędzi parkietażu  $\Omega$  mamy 2 różne typy płytek i w całym parkietażu  $\Omega$  istnieją 2 różne typy płytek wynika, że płytki parkietażu  $\Omega$ , leżące po dwóch stronach dowolnej krawędzi tego parkietażu, mają różne typy.  $\square$

**Definicja 34. Typ kombinatoryczny parkietażu izotoksalnego o niesymetrycznych krawędziach** mówi nam o tym, jaki symbol występuje w parkietażu oraz jaki jest stopień wierzchołków poszczególnych typów oraz stopień płytek poszczególnych typów.

**Przykład 35.** Na Rysunku 13 są pokazane dwa różne parkietaże, ale mające ten sam typ kombinatoryczny. Oba parkietaże mają wierzchołki i płytki stopnia 4 oraz występuje w nich symbol, który składa się z dwóch dwuelementowych zbiorów, złożonych z flag leżących w poprzek.



Rysunek 13: Przykład różnych parkietaży o tym samym typie kombinatorycznym.

Celem mojej pracy jest znalezienie wszystkich typów kombinatorycznych jakie występują wśród izotoksalnych parkietaży o niesymetrycznych krawędziach.

## 2 Analiza typów kombinatorycznych parkietaży izotoksalnych o niesymetrycznych krawędziach

W tym rozdziale wprowadzimy pomocniczy parkietaż  $\Omega^*$ , który pochodzi od parkietażu  $\Omega$ .

Niech  $\Omega$  będzie parkietażem izotoksalnym o niesymetrycznych krawędziach (potencjalnie może mieć krzywoliniowe krawędzie). Niech  $\Omega^*$  będzie powstałym z parkietażu  $\Omega$  parkietażem z "rozprostowanymi" krawędziami. To znaczy, że zbiór wierzchołków parkietażu  $\Omega^*$  jest taki sam, jak zbiór wierzchołków parkietażu  $\Omega$ , natomiast krawędzie w parkietażu  $\Omega^*$  są prostymi odcinkami między wierzchołkami, które są połączone krawędzią w parkietażu  $\Omega$ . Z kolei płytki przekształcają się w wielokąty.

Symetrie parkietażu  $\Omega$  pozostają symetrami parkietażu  $\Omega^*$ . Wierzchołki, krawędzie i płytki w parkietażu  $\Omega$  odpowiadają wzajemnie jednoznacznie wierzchołkom, krawędziom i płytkom w parkietażu  $\Omega^*$ , a zatem flagi też. Typom flag w parkietażu  $\Omega^*$  przypisujemy te same typy flag, które miały przed modyfikacją w parkietażu  $\Omega$ .

Teraz przytoczmy znany fakt, który możemy znaleźć w [4] (problem nr 22.23 na str. 398, a rozwiązanie na str. 405-406).

**Fakt 36.** *Suma miar kątów w  $M$ -kącie wynosi  $(M - 2) \cdot 180^\circ$ .*

Przytoczmy również następujący oczywisty fakt.

**Fakt 37.** *Suma miar kątów w parkietażu  $\Omega^*$  wokół dowolnego wierzchołka wynosi  $360^\circ$ .*

Teraz przytoczmy fakt, który będziemy wykorzystywali w analizie typów kombinatorycznych parkietaży izotoksalnych o niesymetrycznych krawędziach.

**Fakt 38.** *Jeśli przy kącie  $\alpha$  płytki  $p$  parkietażu  $\Omega^*$  występują flagi tych samych typów, co przy kącie  $\alpha'$  płytki  $p'$ , to miary tych kątów są jednakowe.*

*Dowód.* Niech  $F_a$  i  $F_b$  będą flagami w parkietażu  $\Omega^*$  odpowiednio typu  $a$  i  $b$  występującymi przy wierzchołku  $w$  w płytce  $p$  oraz  $F'_a$  i  $F'_b$  będą flagami w parkietażu  $\Omega^*$  odpowiednio typu  $a$  i  $b$  występującymi przy wierzchołku  $w'$  w płytce  $p'$ . Niech również kąt  $\alpha$  będzie kątem zawartym w wierzchołku  $w$  płytki  $p$ , a kąt  $\alpha'$  będzie kątem zawartym w wierzchołku  $w'$  płytki  $p'$ .

Korzystając z definicji typu flagi (Definicja 14) wiemy, że pewna symetria  $T$  parkietażu  $\Omega^*$  przeprowadza flagę  $F_a$  na flagę  $F'_a$  oraz ta sama symetria  $T$  parkietażu  $\Omega^*$  przeprowadza flagę  $F_b$  na flagę  $F'_b$ , zatem symetria  $T$  przeprowadza kąt  $\alpha$  na kąt  $\alpha'$ . Wiemy również, że symetria  $T$  parkietażu  $\Omega^*$  zachowuje kąty. Zatem miara kąta  $\alpha$  jest taka sama jak miara kąta  $\alpha'$ .  $\square$

Rozpatrzmy teraz po kolei każdy symbol, jaki może potencjalnie występować w parkietażu  $\Omega$  w celu znalezienia, jakie mogą być stopnie wierzchołków poszczególnych typów oraz stopnie płytek poszczególnych typów w parkietażu o takim symbolu.

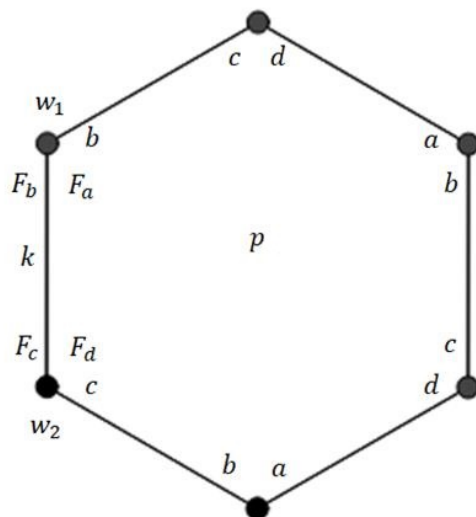
Pomysł na znajdowanie rozwiązań równań pojawiających się w podrozdziałach 2.1 – 2.7 został zaczerpnięty z pracy [2].

## 2.1 Symbol, który składa się z dwóch dwuelementowych zbiorów, złożonych z flag leżących w poprzek.

Z Lematu 32 wiemy, że w tym parkietażu wszystkie płytki są tego samego typu. Z Lematu 31 wiemy, że w tym parkietażu wszystkie wierzchołki są dwóch różnych typów oraz typy występują "na przemian".

Wprowadźmy oznaczenia:  $M$  – stopień płytki parkietażu  $\Omega$ , a  $m, n$  – stopnie wierzchołków parkietażu  $\Omega$ , gdzie  $m, n, M \in \mathbb{N}$  oraz  $m, n, M \geq 3$ .

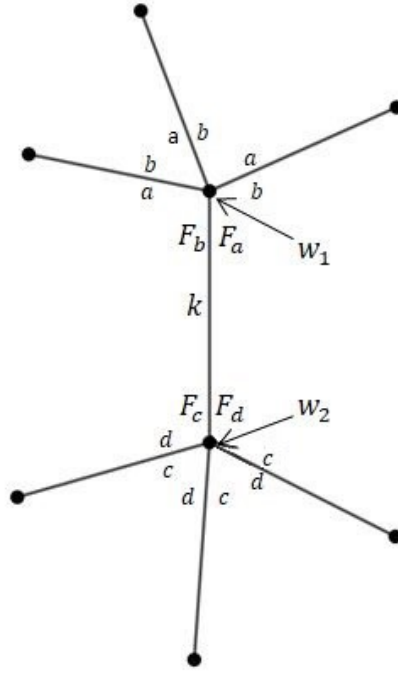
Przeanalizujmy teraz typy flag zawarte w płytce  $p$  stowarzyszonego parkietażu  $\Omega^*$  o rozprostowanych krawędziach. Ustalmy flagi o typach  $a, b, c, d$  wokół krawędzi  $k$  w odpowiedniej kolejności:  $F_a = (w_1, k, p)$ ,  $F_b = (w_1, k, p')$ ,  $F_c = (w_2, k, p)$ ,  $F_d = (w_2, k, p')$ . Przy tych oznaczeniach, rozpatrywany w tym podrozdziale symbol składa się z podzbiorów  $\{a, b\}$  oraz  $\{c, d\}$ . Następnie korzystając z definicji symbolu oraz Faktów 16 oraz 18 oznaczmy flagi o typach  $a, b, c, d$ , które będą pojawiały się w płytce  $p$ . Przedstawia to Rysunek 14.



Rysunek 14: Analiza typów flag w płytce.

Analizując Rysunek 14 oraz korzystając z Faktu 38 możemy zauważyć, że w płytce  $p$  miara co drugiego kąta się powtarza. Wynika z tego, że stopień płytki będzie parzysty. Możemy to zapisać symbolicznie:  $M = 2k$ , gdzie  $k \in \mathbb{N}$  oraz  $k \geq 2$ .

Teraz przeanalizujmy typy flag leżące przy wierzchołkach parkietażu  $\Omega^*$ . Korzystając z definicji symbolu oraz Faktów 16 oraz 20 oznaczmy flagi o typach  $a, b, c, d$ , które będą pojawiały się wokół wierzchołków  $w_1$  oraz  $w_2$ . Analizując typy flag, jakie będą się pojawiały wokół wierzchołka  $w_1$  oraz  $w_2$  możemy zauważyć, że we wszystkich kątach wokół wierzchołka  $w_1$  będą pojawiały się flagi o typach  $a$  i  $b$ . Z kolei we wszystkich kątach wokół wierzchołka  $w_2$  będą pojawiały się flagi o typach  $c$  i  $d$ . Przedstawia to Rysunek 15.



Rysunek 15: Analiza typów flag wokół wierzchołków.

Bez straty ogólności, niech  $n$  oznacza stopień wierzchołka  $w_1$ , zaś  $m$  – stopień wierzchołka  $w_2$ , gdzie  $m, n \geq 3$ .

Niech  $\alpha$  i  $\beta$  oznaczają miary kątów parkietażu  $\Omega^*$ , gdzie  $\alpha$  to kąt o typach flag  $a$  i  $b$ , zaś  $\beta$  to kąt o typach flag  $c$  i  $d$ . Korzystając z Faktu 37 możemy zapisać, że  $m \cdot \alpha = 360^\circ$  oraz  $n \cdot \beta = 360^\circ$ . Z tego wynika, że  $\alpha = \frac{360^\circ}{m}$  oraz  $\beta = \frac{360^\circ}{n}$ . Korzystając z Faktu 36 możemy zapisać równanie na sumę miar kątów w  $M$  – kącie

$$\frac{M}{2} \cdot \alpha + \frac{M}{2} \cdot \beta = (M - 2) \cdot 180^\circ.$$

Wpisując odpowiednie założenia, że  $M = 2k$  oraz  $\alpha = \frac{360^\circ}{m}$  i  $\beta = \frac{360^\circ}{n}$  uzyskujemy

$$\frac{2k}{2} \cdot \frac{360^\circ}{m} + \frac{2k}{2} \cdot \frac{360^\circ}{n} = (M - 2) \cdot 180^\circ.$$

Po przekształceniu mamy

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{k} = 1. \quad (1)$$

Znajdziemy teraz wszystkie rozwiązania równania (1) w liczbach naturalnych takich, że  $k \geq 2, m \geq 3, n \geq 3$ . Podstawmy do tego równania  $k = 2$ . Mamy równanie

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2}.$$

Wyznamy z tego równania parametr  $m$ . Po przekształceniach otrzymujemy

$$m = \frac{2n}{n - 2}.$$

Korzystamy z tego, że  $m \geq 3$  i uzyskujemy oszacowanie, że  $n \leq 6$ , pamiętając, że  $k, n, m \in \mathbb{N}$ . Zatem dla  $k = 2$  mamy rozwiązania:

$$k = 2 \quad n = 3 \quad m = 6,$$

$$k = 2 \quad n = 4 \quad m = 4,$$

$$k = 2 \quad n = 6 \quad m = 3.$$

Zauważmy, że pierwsze i trzecie rozwiązanie różni się jedynie zamianą ról parametrów  $m$  i  $n$  (stopni wierzchołków poszczególnych dwóch typów), więc będziemy je dalej traktować jak jedno rozwiązanie.

Analogicznie sprawdźmy, co uzyskamy dla  $k = 3$ . Mamy równanie

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{2}{3}.$$

Wyznaczmy z tego równania parametr  $m$ . Po przekształceniach otrzymujemy:

$$m = \frac{3n}{2n - 3}.$$

Korzystamy z tego, że  $m \geq 3$  i uzyskujemy oszacowanie, że  $n \leq 3$ , pamiętając, że  $k, n, m \in \mathbb{N}$ . Zatem dla  $k = 3$  mamy rozwiązanie:

$$k = 3 \quad n = 3 \quad m = 3.$$

Sprawdźmy teraz, co będzie się działo dla  $k \geq 4$ . Z równania (1) wyznaczamy parametr  $k$ , czyli  $k = \frac{mn}{mn - n - m}$  oraz  $k \geq 4$ . Wyznaczmy z tej nierówności parametr  $m$ . Mamy  $m \leq \frac{4n}{3n - 4}$ . Wiemy również, że  $m \geq 3$ . Zatem

$$\frac{4n}{3n - 4} \geq 3,$$

więc ostatecznie

$$n \leq \frac{12}{5},$$

co nam daje sprzeczność z  $n \geq 3$ . Zatem równanie (1) nie ma żadnych rozwiązań w przypadku, gdy  $k \geq 4$ .

Przechodząc do podsumowania, jedynymi potencjalnymi możliwościami dla wartości parametrów  $m, n, M$  (w obecności symbolu, który składa się z dwóch dwuelementowych zbiorów, złożonych z flag leżących w poprzek) są

$$M = 4 \quad n = 3 \quad m = 6,$$

$$M = 4 \quad n = 4 \quad m = 4,$$

$$M = 6 \quad n = 3 \quad m = 3.$$

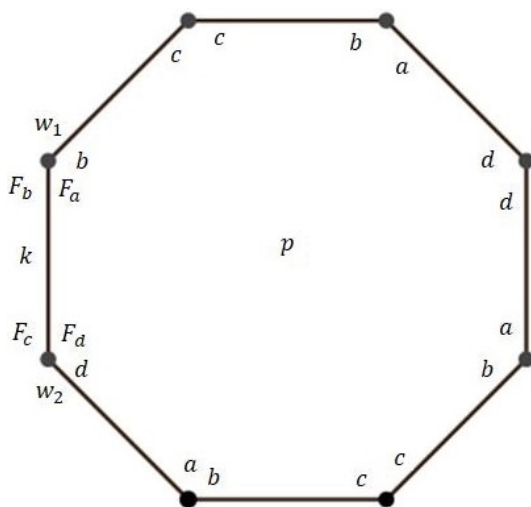


## 2.2 Symbol, który składa się z jednej pary flag leżącej w poprzek oraz dwóch flag tworzących podzbiory jednoelementowe.

Z Lematu 32 wiemy, że w tym parkietażu wszystkie płytki są tego samego typu. Z Lematu 31 wiemy, że w tym parkietażu wszystkie wierzchołki są dwóch różnych typów oraz typy występują "na przemian", zatem stopień płytki parkietażu będzie parzysty.

Wprowadźmy oznaczenia:  $M$  – stopień płytki parkietażu  $\Omega$ , a  $m, n$  – stopnie wierzchołków parkietażu  $\Omega$ , gdzie  $m, n, M \in \mathbb{N}$  oraz  $m, n \geq 3$ .

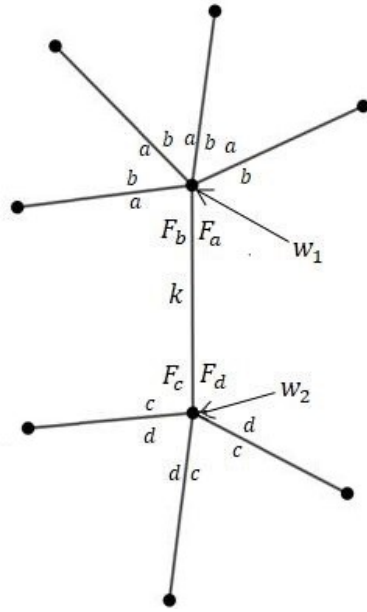
Przeanalizujmy teraz typy flag zawarte w płytce  $p$  stowarzyszonego parkietażu  $\Omega^*$  o rozprostowanych krawędziach. Ustalmy flagi o typach  $a, b, c, d$  wokół krawędzi  $k$  w odpowiedniej kolejności:  $F_a = (w_1, k, p)$ ,  $F_b = (w_1, k, p')$ ,  $F_c = (w_2, k, p)$ ,  $F_d = (w_2, k, p')$ . Bez straty ogólności, ustalmy, że flaga o typie  $a$  występuje w poprzek z flagą o typie  $b$ , z kolei flagi o typie  $c$  i  $d$  tworzą podzbiory jednoelementowe. Przy tych oznaczeniach, rozpatrywany w tym podrozdziale symbol składa się z podzbiorów  $\{a, b\}$ ,  $\{c\}$  oraz  $\{d\}$ . Następnie korzystając z definicji symbolu oraz Faktów 16 oraz 18 oznaczmy flagi o typach  $a, b, c, d$ , które będą pojawiały się w płytce  $p$ . Przedstawia to Rysunek 16.



Rysunek 16: Analiza typów flag w płytce.

Analizując Rysunek 16 oraz korzystając z Faktu 38 możemy zauważyć, że w płytce  $p$  miary kątów o typach  $a, b$  powtarzają się cyklicznie co 2, zaś miary kątów o typach  $c$  i  $d$  powtarzają się cyklicznie co 4, a zatem możemy zapisać, że  $M = 4k$ , gdzie  $k \in \mathbb{N}$  oraz  $k \geq 1$ .

Teraz przeanalizujmy typy flag leżące przy wierzchołkach parkietażu  $\Omega^*$ . Wokół wierzchołków  $w_1$  oraz  $w_2$  pojawiają się flagi o typach  $a, b, c$  i  $d$ , które tworzą podzbiory  $\{a, b\}$ ,  $\{c\}$  i  $\{d\}$ . Następnie korzystając z definicji symbolu oraz Faktów 16 oraz 20 oznaczmy flagi o typach  $a, b, c$  i  $d$ , które będą pojawiały się wokół wierzchołków  $w_1$  oraz  $w_2$ . Przedstawia to Rysunek 17.



Rysunek 17: Analiza typów flag wokół wierzchołków.

Analizując Rysunek 17 możemy zauważyć, że stopień wierzchołka  $w_2$  jest parzysty. Bez straty ogólności, niech  $m$  oznacza stopień wierzchołka  $w_1$ , zaś  $n$  – stopień wierzchołka  $w_2$ , zatem  $n = 2l$ , gdzie  $l \in \mathbb{N}$  oraz  $l \geq 2$ , czyli  $n \geq 4$ , a ponadto  $m \geq 3$ .

Niech  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$  oznaczają miary kątów wewnętrznych płytki, gdzie  $\alpha$  to kąt o typach flag  $a$  i  $b$ , zaś  $\beta$  to kąt o typach flag  $c$ , a  $\gamma$  to kąt o typach flag  $d$ . Korzystając z Faktu 37 możemy zapisać, że  $m \cdot \alpha = 360^\circ$  oraz  $\frac{n}{2} \cdot \beta + \frac{n}{2} \cdot \gamma = 360^\circ$ . Z tego wynika, że  $\alpha = \frac{360^\circ}{m}$  oraz  $\beta + \gamma = \frac{360^\circ \cdot 2}{n}$ .

Korzystając z Faktu 36 możemy zapisać równanie na sumę miar kątów w  $M$  – kącie

$$\frac{M}{2} \cdot \alpha + \frac{M}{2} \cdot (\beta + \gamma) = (M - 2) \cdot 180^\circ.$$

Wpisując odpowiednie założenia, że  $M = 4k$ ,  $n = 2l$  oraz  $\alpha = \frac{360^\circ}{m}$  i  $\beta + \gamma = \frac{360^\circ \cdot 2}{n}$  uzyskujemy

$$\frac{4k}{2} \cdot \frac{360^\circ}{m} + \frac{4k}{2} \cdot \frac{360^\circ \cdot 2}{2l} = (4k - 2) \cdot 180^\circ.$$

Po przekształceniu mamy

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{2l} + \frac{1}{2k} = 1. \quad (2)$$

Znajdziemy teraz wszystkie rozwiązania równania (2) w liczbach naturalnych takich, że  $m \geq 3$ ,  $l \geq 2$ ,  $k \geq 1$ . Podstawmy do tego równania  $k = 1$ . Mamy równanie

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{2l} = \frac{1}{2}.$$

Wyznamy z tego równania parametr  $l$ . Po przekształceniach otrzymujemy

$$l = \frac{m}{m - 2}.$$

Korzystamy z tego, że  $l \geq 2$  i uzyskujemy oszacowanie, że  $m \leq 4$ , pamiętając, że  $k, l, m \in \mathbb{N}$ . Zatem dla  $k = 1$  mamy rozwiązania:

$$\begin{array}{ccccc} k = 1 & m = 3 & l = 3 & n = 6 & M = 4, \\ k = 1 & m = 4 & l = 2 & n = 4 & M = 4. \end{array}$$

Sprawdźmy teraz, co będzie się działo dla  $k \geq 2$ . Z równania (2) wyznaczamy parametr  $k$ , czyli  $k = \frac{ml}{2lm-2l-m}$  oraz  $k \geq 2$ . Wyznaczmy z tej nierówności parametr  $l$ . Mamy  $l \leq \frac{2m}{3m-4}$ . Wiemy również, że  $l \geq 2$ . Zatem

$$\frac{2m}{3m-4} \geq 2,$$

więc ostatecznie

$$m \leq 2,$$

co nam daje sprzeczność z  $m \geq 3$ . Zatem równanie (2) nie ma żadnych rozwiązań w przypadku, gdy  $m \geq 3$ .

Przechodząc do podsumowania, jedynymi potencjalnymi możliwościami dla wartości parametrów  $m, n, M$  (w obecności symbolu, który składa się z jednej pary flag leżącej w poprzek oraz dwóch flag tworzących podzbiory jednoelementowe) są

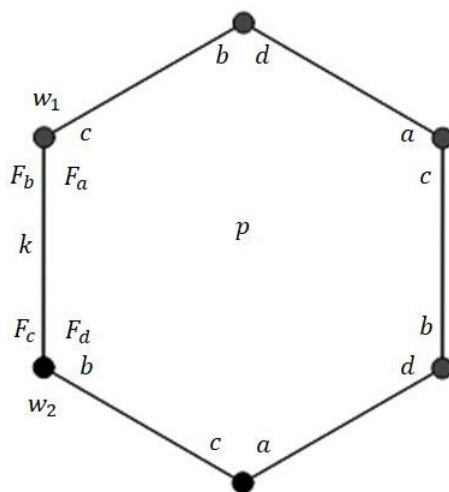
$$\begin{array}{lll} M = 4 & n = 3 & m = 6, \\ M = 4 & n = 4 & m = 4. \end{array}$$

### 2.3 Symbol, który składa się z dwóch dwuelementowych zbiorów, złożonych z flag leżących po skosie.

Z Lematu 32 wiemy, że w tym parkietażu wszystkie płytki są tego samego typu. Z Lematu 30 wiemy, że w tym parkietażu wszystkie wierzchołki są tego samego typu.

Wprowadźmy oznaczenia:  $M$  – stopień płytki parkietażu  $\Omega$ , a  $m$  – stopień wierzchołka parkietażu  $\Omega$ , gdzie  $m, M \in \mathbb{N}$  oraz  $m, M \geq 3$ .

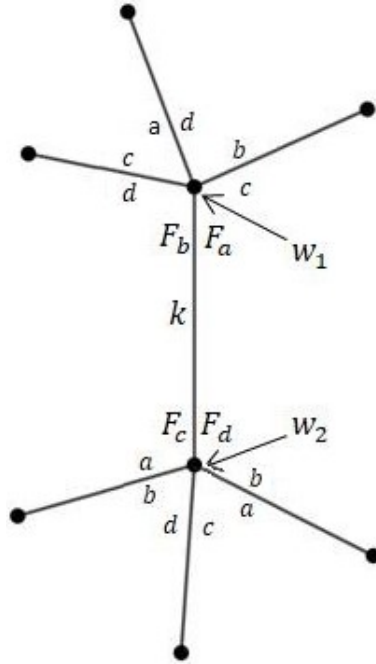
Przeanalizujmy teraz typy flag zawarte w płytce  $p$  stowarzyszonego parkietażu  $\Omega^*$  o rozprostowanych krawędziach. Ustalmy flagi o typach  $a, b, c, d$  wokół krawędzi  $k$  w odpowiedniej kolejności:  $F_a = (w_1, k, p)$ ,  $F_b = (w_1, k, p')$ ,  $F_c = (w_2, k, p)$ ,  $F_d = (w_2, k, p')$ . Przy tych oznaczeniach, rozpatrywany w tym podrozdziale symbol składa się z podzbiorów  $\{a, c\}$  oraz  $\{b, d\}$ . Następnie korzystając z definicji symbolu oraz Faktów 16 oraz 18 oznaczymy flagi o typach  $a, b, c, d$ , które będą pojawiały się w płytce  $p$ . Przedstawia to Rysunek 18.



Rysunek 18: Analiza typów flag w płytce.

Analizując Rysunek 18 oraz korzystając z Faktu 38 możemy zauważyć, że w płytce  $p$  miara co drugiego kąta się powtarza. Zatem z tego wynika, że płytka jest parzystokątem. Możemy to zapisać symbolicznie:  $M = 2k$ , gdzie  $k \in \mathbb{N}$  oraz  $k \geq 2$ , czyli  $M \geq 4$ .

Teraz przeanalizujemy typy flag leżące przy wierzchołkach parkietażu  $\Omega^*$ . Korzystając z Faktów 16 oraz 20 oraz z definicji symbolu możemy zauważyć, że wokół wierzchołków  $w_1$  oraz  $w_2$  pojawiają się pary flag leżące po skosie, czyli tworzą podzbiory  $\{a, c\}$  oraz  $\{b, d\}$ . Przedstawia to Rysunek 19.



Rysunek 19: Analiza typów flag wokół wierzchołków.

Analizując Rysunek 19 możemy zauważyć, że stopień wierzchołków w tym parkietażu jest parzysty. Możemy to zapisać następująco  $m = 2l$ , gdzie  $l \in \mathbb{N}$  oraz  $l \geq 2$ , czyli  $m \geq 4$ .

Niech  $\alpha$  i  $\beta$  oznaczają miary kątów wewnętrznych płytki, gdzie  $\alpha$  to kąt o typach flag  $a$  i  $c$ , zaś  $\beta$  to kąt o typach flag  $b$  i  $d$ . Korzystając z Faktu 37 możemy zapisać, że  $\frac{m}{2} \cdot \alpha + \frac{m}{2} \cdot \beta = 360^\circ$ . Z tego wynika, że  $\alpha + \beta = \frac{360^\circ \cdot 2}{m}$ .

Korzystając z Faktu 36 możemy zapisać równanie na sumę miar kątów w  $M$  – kącie

$$\frac{M}{2} \cdot \alpha + \frac{M}{2} \cdot \beta = (M - 2) \cdot 180^\circ.$$

Wpisując odpowiednie założenia, że  $M = 2k$  oraz  $\alpha + \beta = \frac{360^\circ \cdot 2}{m}$  uzyskujemy

$$\frac{2k}{2} \cdot \frac{360^\circ \cdot 2}{m} = (2k - 2) \cdot 180^\circ.$$

Po przekształceniu mamy

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{2k} = \frac{1}{2}. \quad (3)$$

Znajdziemy teraz wszystkie rozwiązania równania (3) w liczbach naturalnych takich, że  $m \geq 4, k \geq 2$ . Wyznamy z tego równania parametr  $k$ . Po przekształceniach

otrzymujemy

$$k = \frac{m}{m-2}.$$

Korzystamy z tego, że  $k \geq 2$  i uzyskujemy oszacowanie, że  $m \leq 4$ . Wiemy również, że  $m \geq 4$ . Zatem mamy jedno rozwiązanie dla parametru  $m$ , czyli  $m = 4$ , a z tego wynika, że  $k = 2$ , a zatem  $M = 4$ .

Przechodząc do podsumowania, jedynym potencjalnym rozwiązaniem dla wartości parametrów  $m, M$  (w obecności symbolu, który składa się z dwóch dwuelementowych zbiorów, złożonych z flag leżących po skosie) jest

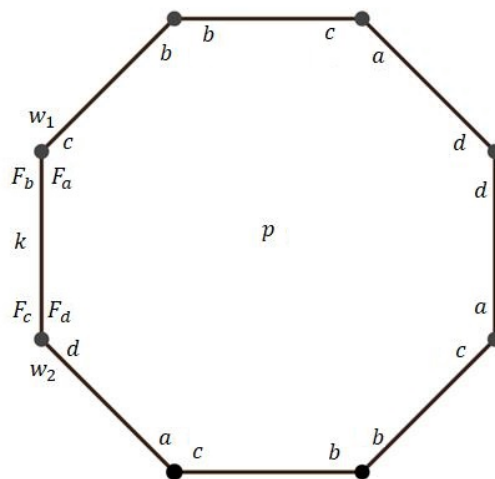
$$M = 4 \quad m = 4.$$

## 2.4 Symbol, który składa się z jednej pary flag leżącej po skosie oraz dwóch flag tworzących podzbiory jednoelementowe.

Z Lematu 32 wiemy, że w tym parkietażu wszystkie płytki są tego samego typu. Z Lematu 30 wiemy, że w tym parkietażu wszystkie wierzchołki są tego samego typu.

Wprowadźmy oznaczenia:  $M$  – stopień płytki parkietażu  $\Omega$ , a  $m$  – stopień wierzchołka parkietażu  $\Omega$ , gdzie  $m, M \in \mathbb{N}$  oraz  $m, M \geq 3$ .

Przeanalizujmy teraz typy flag zawarte w płytce  $p$  stowarzyszonego parkietażu  $\Omega^*$  o rozprostowanych krawędziach. Ustalmy flagi o typach  $a, b, c, d$  wokół krawędzi  $k$  w odpowiedniej kolejności:  $F_a = (w_1, k, p)$ ,  $F_b = (w_1, k, p_2)$ ,  $F_c = (w_2, k, p)$ ,  $F_d = (w_2, k, p_2)$ . Bez straty ogólności, ustalmy, że flaga o typie  $a$  występuje po skosie z flagą o typie  $c$ , z kolei flagi o typie  $b$  i  $d$  tworzą podzbiory jednoelementowe. Przy tych oznaczeniach, rozpatrywany w tym podrozdziale symbol składa się z podzbiorów  $\{a, c\}$ ,  $\{b\}$  oraz  $\{d\}$ . Następnie korzystając z definicji symbolu oraz Faktów 16 oraz 18 oznaczmy flagi o typach  $a, b, c, d$ , które będą pojawiały się w płytce  $p$ . Przedstawia to Rysunek 20.

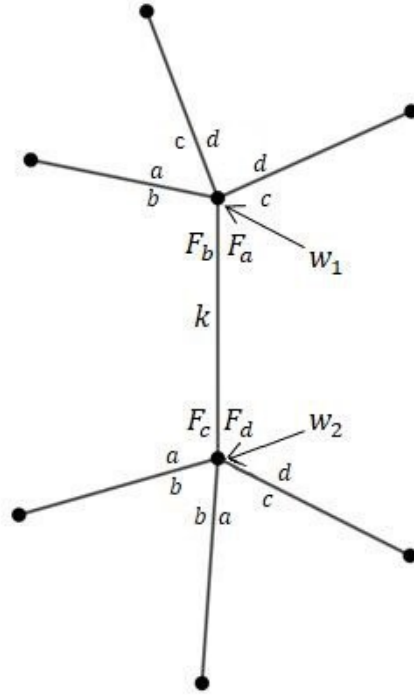


Rysunek 20: Analiza typów flag w płytce.

Analizując Rysunek 20 oraz korzystając z Faktu 38 możemy zauważyć, że w płytce  $p$  miary kątów o typach  $a, c$  powtarzają się cyklicznie co 2, zaś miary kątów o ty-

pach  $b$  i  $d$  powtarzają się cyklicznie co 4, a zatem możemy zapisać, że  $M = 4k$ , gdzie  $k \in \mathbb{N}$  oraz  $k \geq 1$ .

Teraz przeanalizujemy typy flag leżące przy wierzchołkach parkietażu  $\Omega^*$ . Wokół wierzchołków  $w_1$  oraz  $w_2$  pojawiają się flagi o typach  $a, b, c$  i  $d$ , które tworzą podzbiory  $\{a, c\}, \{b\}, \{d\}$ . Następnie korzystając z definicji symbolu oraz Faktów 16 oraz 20 oznaczymy flagi o typach  $a, b, c, d$ , które będą pojawiały się wokół wierzchołków  $w_1$  oraz  $w_2$ . Przedstawia to Rysunek 21.



Rysunek 21: Analiza typów flag wokół wierzchołków.

Analizując Rysunek 21 możemy zauważyć, że pary symboli występujące w kolejnych kątach wokół wierzchołków powtarzają się cyklicznie co 4. Wynika stąd, że stopień  $m$  wierzchołka jest podzielny przez 4. Możemy to zapisać następująco  $m = 4l$ , gdzie  $l \in \mathbb{N}$  oraz  $l \geq 1$ , czyli  $m \geq 4$ .

Niech  $\alpha, \beta$  i  $\gamma$  oznaczają miary kątów wewnętrznych płytki, gdzie  $\alpha$  to kąt o typach flag  $a$  i  $c$ , zaś  $\beta$  to kąt o typach flag  $b$ , a  $\gamma$  to kąt o typach flag  $d$ . Korzystając z Faktu 37 możemy zapisać, że  $\frac{m}{2} \cdot \alpha + \frac{m}{4} \cdot (\beta + \gamma) = 360^\circ$ . Z tego wynika, że  $\beta + \gamma = \frac{4}{m}(360^\circ - \frac{m}{2} \cdot \alpha)$ .

Korzystając z Faktu 36 możemy zapisać równanie na sumę miar kątów w  $M$ -kącie

$$\frac{M}{2} \cdot \alpha + \frac{M}{4} \cdot (\beta + \gamma) = (M - 2) \cdot 180^\circ.$$

Wpisując odpowiednie założenia, że  $M = 4k$ ,  $m = 4l$  oraz  $\beta + \gamma = \frac{4}{m}(360^\circ - \frac{m}{2} \cdot \alpha)$  uzyskujemy

$$\frac{4k}{2} \cdot \alpha + \frac{4k}{4} \cdot \frac{4}{4l} \left( 360^\circ - \frac{4l}{2} \cdot \alpha \right) = (4k - 2) \cdot 180^\circ.$$

Po przekształceniu mamy

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{l} = 2. \quad (4)$$

Znajdziemy teraz wszystkie rozwiązania równania (4) w liczbach naturalnych takich, że  $k \geq 1, l \geq 1$ . Wyznaczamy teraz z równania (4) parametr  $l$ , czyli  $l = \frac{k}{2k-1}$  oraz wiemy, że  $l \geq 1$ . Zatem możemy zapisać

$$\frac{k}{2k-1} \geq 1.$$

Wyznaczmy z tej nierówności parametr  $k$ . Mamy  $k \leq 1$ . Wiemy również, że  $k \geq 1$ . Zatem jedynym rozwiązaniem jest  $k = 1$ . Dla tego parametru otrzymujemy  $m = 4$  oraz  $M = 4$ .

Przechodząc do podsumowania, jedynym potencjalnym rozwiązaniem dla wartości parametrów  $m, M$  (w obecności symbolu, który składa się z jednej pary flag leżącej po skosie oraz dwóch flag tworzących podzbiory jednoelementowe) jest

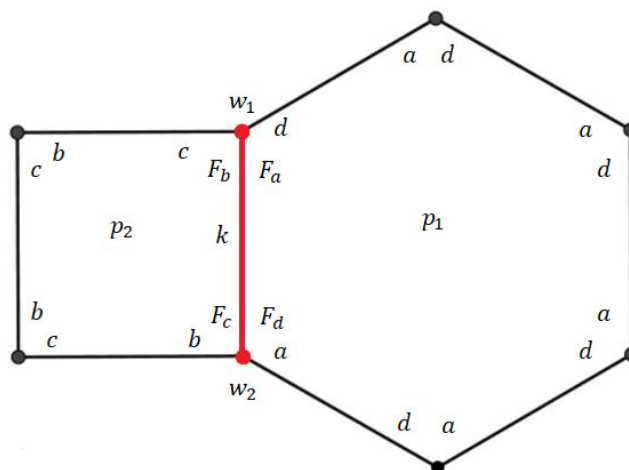
$$M = 4 \quad m = 4.$$

## 2.5 Symbol, który składa się z dwóch dwuelementowych zbiorów, złożonych z flag leżących wzdłuż

Z Lematu 33 wiemy, że w tym parkietażu płytki są dwóch różnych typów oraz płytki parkietażu leżące po dwóch stronach dowolnej krawędzi mają różne typy. Z Lematu 30 wiemy, że w tym parkietażu wszystkie wierzchołki są tego samego typu.

Wprowadźmy oznaczenia:  $M, N$  – stopnie płytek parkietażu  $\Omega$ , a  $m$  – stopień wierzchołka parkietażu  $\Omega$ , gdzie  $m, M, N \in \mathbb{N}$  oraz  $m, M, N \geq 3$ .

Przeanalizujmy teraz typy flag zawarte w płytkach  $p_1$  i  $p_2$  stowarzyszonego parkietażu  $\Omega^*$  o rozprostowanych krawędziach. Ustalmy flagi o typach  $a, b, c, d$  wokół krawędzi  $k$  w odpowiedniej kolejności:  $F_a = (w_1, k, p_1)$ ,  $F_b = (w_1, k, p_2)$ ,  $F_c = (w_2, k, p_1)$ ,  $F_d = (w_2, k, p_2)$ . Przy tych oznaczeniach, rozpatrywany w tym podrozdziale symbol składa się z podzbiorów  $\{a, d\}$  oraz  $\{b, c\}$ . Następnie korzystając z definicji symbolu oraz Faktów 16 oraz 18 oznaczmy flagi o typach  $a, b, c, d$ , które będą pojawiały się w płytkach  $p_1$  i  $p_2$ . Przedstawia to Rysunek 22.



Rysunek 22: Analiza typów flag w płytkach.

Analizując Rysunek 22 oraz korzystając z Faktu 38 możemy zauważyć, że w płytce  $p_1$  wszystkie miary kątów są takie same, podobnie jak w płytce  $p_2$ .

Niech  $\alpha$  i  $\beta$  oznaczają miary kątów wewnętrznych płytki, gdzie  $\alpha$  to kąt o typach flag  $a$  i  $d$ , zaś  $\beta$  to kąt o typach flag  $b$  i  $c$ . Niech  $M$  oznacza stopień płytki  $p_1$ , zaś  $N$  – stopień płytki  $p_2$ , gdzie  $M, N \geq 3$ .

Korzystając z Faktu 36 możemy zapisać równanie na sumę miar kątów w  $M$  – kącie

$$M \cdot \alpha = (M - 2) \cdot 180^\circ$$

oraz w  $N$  – kącie

$$N \cdot \beta = (N - 2) \cdot 180^\circ.$$

Z tego wynika, że  $\alpha = \frac{M-2}{M} \cdot 180^\circ$  oraz  $\beta = \frac{N-2}{N} \cdot 180^\circ$ .

Przeanalizujmy teraz typy flag zawarte wokół wierzchołków  $w_1$  i  $w_2$ . Korzystając z definicji symbolu oraz Faktów 16 oraz 20 wokół tych wierzchołków będą naprzemiennie występowały kąty  $\alpha$  i  $\beta$ , zatem stopień wierzchołka  $m$  będzie parzysty, możemy to zapisać następująco:  $m = 2k$ , gdzie  $k \in \mathbb{N}$  i  $k \geq 2$ .

Korzystając z Faktu 37 możemy zapisać, że

$$\frac{m}{2} \cdot \alpha + \frac{m}{2} \cdot \beta = 360^\circ.$$

Wpisując odpowiednie założenia, że  $m = 2k$  oraz  $\alpha = \frac{M-2}{M} \cdot 180^\circ$  i  $\beta = \frac{N-2}{N} \cdot 180^\circ$  uzyskujemy

$$\frac{2k}{2} \cdot \frac{M-2}{M} \cdot 180^\circ + \frac{2k}{2} \cdot \frac{N-2}{N} \cdot 180^\circ = 360^\circ.$$

Po przekształceniu otrzymujemy

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{M} + \frac{1}{N} = 1. \quad (5)$$

Podobne równanie wystąpiło w podrozdziale 2.1. Parametr  $m$  z równania (1) zastąpimy parametrem  $M$  z równania (5). Analogicznie, parametr  $n$  zastąpimy parametrem  $N$ . Oszacowania dla parametrów  $k, N, M$  pozostają takie same jak oszacowania dla parametrów  $k, n, m$ . Zatem możemy przytoczyć rozwiązania.

Jedynymi potencjalnymi możliwościami dla wartości parametrów  $m, M, N$  (w obecności symbolu, który składa się z dwóch dwuelementowych zbiorów, złożonych z flag leżących wzdłuż) są

$$\begin{array}{lll} m = 4 & M = 3 & N = 6, \\ m = 4 & M = 4 & N = 4, \\ m = 6 & M = 3 & N = 3. \end{array}$$

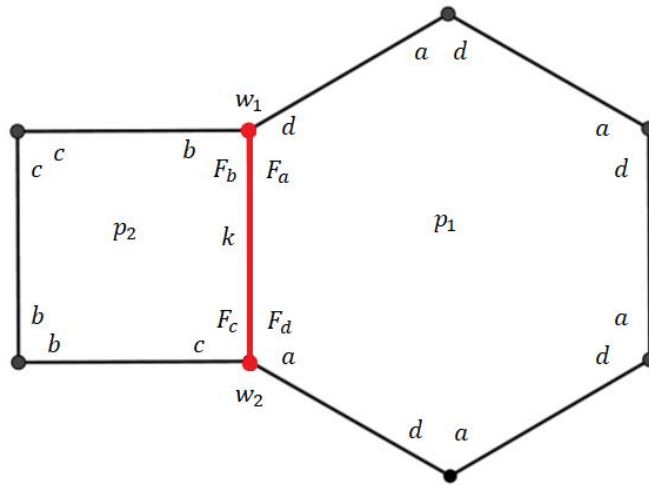
## 2.6 Symbol, który składa się z jednej pary flag leżącej wzdłuż oraz dwóch flag tworzących podzbiory jednoelementowe.

Z Lematu 33 wiemy, że w tym parkietażu płytki są dwóch różnych typów oraz płytki parkietażu leżące po dwóch stronach dowolnej krawędzi mają różne typy. Z Lematu 30 wiemy, że w tym parkietażu wszystkie wierzchołki są tego samego typu.



Wprowadźmy oznaczenia:  $M, N$  – stopnie płytek parkietazu  $\Omega$ , a  $m$  – stopień wierzchołka parkietazu  $\Omega$ , gdzie  $m, M, N \in \mathbb{N}$  oraz  $m, M, N \geq 3$ . Bez straty ogólności, niech  $M$  oznacza stopień płytki  $p_1$ , zaś  $N$  – stopień płytki  $p_2$ , gdzie  $M, N \geq 3$ .

Przeanalizujemy teraz typy flag zawarte w płytkach  $p_1$  i  $p_2$  stowarzyszonego parkietazu  $\Omega^*$  o rozprostowanych krawędziach. Ustalmy flagi o typach  $a, b, c, d$  wokół krawędzi  $k$  w odpowiedniej kolejności:  $F_a = (w_1, k, p_1)$ ,  $F_b = (w_1, k, p_2)$ ,  $F_c = (w_2, k, p_1)$ ,  $F_d = (w_2, k, p_2)$ . Bez straty ogólności, ustalmy, że flaga typu  $a$  występuje w parze z flagą typu  $d$ , tworząc parę flag leżącą wzdłuż, a flagi typu  $b$  i  $c$  tworzą podzbiory jednoelementowe. Przy tych oznaczeniach, rozpatrywany w tym podrozdziale symbol składa się z podzbiorów  $\{a, d\}$ ,  $\{b\}$ ,  $\{c\}$ . Następnie korzystając z definicji symbolu oraz Faktów 16 oraz 18 oznaczmy flagi o typach  $a, b, c, d$ , które będą pojawiały się w płytkach  $p_1$  i  $p_2$ . Przedstawia to Rysunek 23.



Rysunek 23: Analiza typów flag w płytkach.

Analizując Rysunek 23 oraz korzystając z Faktu 38 możemy zauważyć, że w płytce  $p_1$  wszystkie miary kątów o typie  $a, d$  są takie same, zaś w płytce  $p_2$  miary kątów o typach  $b$  i  $c$  powtarzają się cyklicznie co 2, a zatem możemy zapisać, że  $N = 2l$ , gdzie  $l \in \mathbb{N}$  oraz  $l \geq 2$ .

Niech  $\alpha, \beta$  i  $\gamma$  oznaczają miary kątów wewnętrznych płytki, gdzie  $\alpha$  to kąt o typach flag  $a$  i  $d$ ,  $\beta$  to kąt o typach flag  $b$ , zaś  $\gamma$  to kąt o typach flag  $c$ .

Korzystając z Faktu 36 możemy zapisać równanie na sumę miar kątów w  $M$  – kącie

$$M \cdot \alpha = (M - 2) \cdot 180^\circ$$

oraz w  $N$  – kącie

$$\frac{N}{2} \cdot \beta + \frac{N}{2} \cdot \gamma = (N - 2) \cdot 180^\circ.$$

Z tego wynika, że  $\alpha = \frac{M-2}{M} \cdot 180^\circ$  oraz  $\beta + \gamma = \frac{N-2}{N} \cdot 360^\circ$ .

Przeanalizujemy teraz typy flag zawarte wokół wierzchołków  $w_1$  i  $w_2$ . Korzystając z Faktów 16 oraz 20 możemy zauważyć, że wokół tych wierzchołków będą cyklicznie występowały kąty w kolejności  $\alpha, \beta, \alpha, \gamma$  zatem stopień wierzchołka  $m$  będziemy mogli zapisać jako  $m = 4k$ , gdzie  $k \in \mathbb{N}$  i  $k \geq 1$ . Kąt  $\alpha$  występuje cyklicznie co 2, zaś kąty  $\beta$  i  $\gamma$  występują cyklicznie co 4.

Korzystając z Faktu 37 możemy zapisać, że

$$\frac{m}{2} \cdot \alpha + \frac{m}{4} \cdot (\beta + \gamma) = 360^\circ.$$

Wpisując odpowiednie założenia do powyższego równania, że  $N = 2l$ ,  $m = 4k$  oraz  $\alpha = \frac{M-2}{M} \cdot 180^\circ$  i  $\beta + \gamma = \frac{N-2}{N} \cdot 360^\circ$  uzyskujemy

$$\frac{4k}{2} \cdot \frac{M-2}{M} + \frac{4k}{4} \cdot \frac{2l-2}{2l} \cdot 360^\circ = 360^\circ.$$

Po przekształceniu otrzymujemy

$$\frac{1}{M} + \frac{1}{2l} + \frac{1}{2k} = 1. \quad (6)$$

Podobne równanie wystąpiło w podrozdziale 2.2. Parametr  $m$  z równania (2) zastąpimy parametrem  $M$  z równania (6). Oszacowania dla parametrów  $m, k, l$  pozostają takie same jak oszacowania dla parametrów  $M, k, l$ . Zatem możemy przytoczyć rozwiązania.

Jedynymi potencjalnymi możliwościami dla wartości parametrów  $M, N, m$  (w obecności symbolu, który składa się z jednej pary flag leżącej wzdłuż oraz dwóch flag tworzących podzbiory jednoelementowe) są

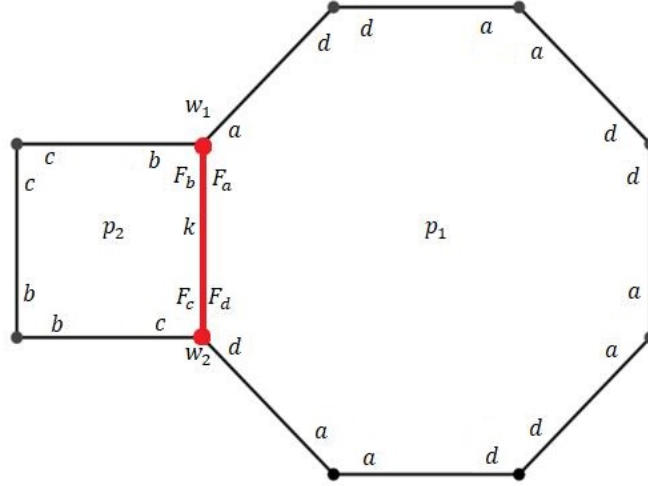
$$\begin{array}{lll} m = 4 & N = 3 & M = 6, \\ m = 4 & N = 4 & M = 4. \end{array}$$

## 2.7 Symbol, który składa się z czterech flag tworzących podzbiory jednoelementowe.

Z Lematu 33 wiemy, że w tym parkietażu płytki są dwóch różnych typów oraz płytki parkietażu leżące po dwóch stronach dowolnej krawędzi mają różne typy. Z Lematu 31 wiemy, że w tym parkietażu wszystkie wierzchołki są dwóch różnych typów oraz typy występują "na przemian".

Wprowadźmy oznaczenia:  $M, N$  – stopnie płytek parkietażu  $\Omega$ , a  $m, n$  – stopnie wierzchołków parkietażu  $\Omega$ , gdzie  $m, n, M, N \in \mathbb{N}$  oraz  $m, n, M, N \geq 3$ .

Przeanalizujmy teraz typy flag zawarte w płytkach  $p_1$  i  $p_2$  stowarzyszonego parkietażu  $\Omega^*$  o rozprostowanych krawędziach.. Ustalmy flagi o typach  $a, b, c, d$  wokół krawędzi  $k$  w odpowiedniej kolejności:  $F_a = (w_1, k, p_1)$ ,  $F_b = (w_1, k, p_2)$ ,  $F_c = (w_2, k, p_1)$ ,  $F_d = (w_2, k, p_2)$ . Przy tych oznaczeniach, rozpatrywany w tym podrozdziale symbol składa się z podzbiorów jednoelementowych  $\{a\}$ ,  $\{b\}$ ,  $\{c\}$ ,  $\{d\}$ . Następnie korzystając z definicji symbolu oraz Faktów 16 oraz 18 oznaczmy flagi o typach  $a, b, c, d$ , które będą pojawiały się w płytkach  $p_1$  i  $p_2$ . Przedstawia to Rysunek 24.



Rysunek 24: Analiza typów flag w płytkach.

Bez straty ogólności, niech  $M$  oznacza stopień płytki  $p_1$ , zaś  $N$  – stopień płytki  $p_2$ , gdzie  $M, N \geq 3$ .

Analizując Rysunek 24 oraz korzystając z Faktu 38 możemy zauważyć, że w płytce  $p_1$  miary kątów o typach  $a$  i  $d$  powtarzają się cyklicznie co 2. Zaś w płytce  $p_2$  miary kątów o typach  $b$  i  $c$  występują cyklicznie co 2. Możemy zapisać, że  $M = 2j$  oraz  $N = 2k$ , gdzie  $j, k \in \mathbb{N}$  oraz  $j, k \geq 2$ .

Niech  $\alpha, \beta, \gamma$  i  $\delta$  oznaczają miary kątów wewnętrznych płytki, gdzie  $\alpha$  to kąt o typach flag  $a$ ,  $\beta$  to kąt o typach flag  $b$ ,  $\gamma$  to kąt o typach flag  $c$ , zaś  $\delta$  to kąt o typach flag  $d$ .

Korzystając z Faktu 36 możemy zapisać równanie na sumę miar kątów w  $M$  – kącie

$$\frac{M}{2} \cdot \alpha + \frac{M}{2} \cdot \delta = (M - 2) \cdot 180^\circ$$

oraz w  $N$  – kącie

$$\frac{N}{2} \cdot \beta + \frac{N}{2} \cdot \gamma = (N - 2) \cdot 180^\circ.$$

Z tego wynika, że  $\alpha + \delta = \frac{M-2}{M} \cdot 360^\circ$  oraz  $\beta + \gamma = \frac{N-2}{N} \cdot 360^\circ$ .

Teraz przeanalizujemy typy flag leżące przy wierzchołkach  $w_1$  i  $w_2$  parkietażu  $\Omega^*$ . Wokół wierzchołka  $w_1$  pojawiają się flagi o typach  $a$  i  $b$ , które tworzą podzbiory jednoelementowe  $\{a\}$  i  $\{b\}$ . Z kolei wokół wierzchołka  $w_2$  pojawiają się flagi o typach  $c$  i  $d$ , które tworzą podzbiory jednoelementowe  $\{c\}$  i  $\{d\}$ .

Zatem możemy zauważyć, że stopień wierzchołka  $w_1$  i  $w_2$  parkietażu  $\Omega^*$  jest parzysty. Możemy to zapisać następująco  $m = 2l$ ,  $n = 2f$ , gdzie  $l, f \in \mathbb{N}$  oraz  $l, f \geq 2$ , czyli  $m, n \geq 4$ .

Korzystając z Faktu 37 możemy zapisać, że

$$\frac{m}{2} \cdot \alpha + \frac{m}{2} \cdot \beta = 360^\circ$$

oraz

$$\frac{n}{2} \cdot \gamma + \frac{m}{2} \cdot \delta = 360^\circ.$$

Z tego wynika, że  $\alpha + \beta = \frac{360^\circ \cdot 2}{m}$  oraz  $\gamma + \delta = \frac{360^\circ \cdot 2}{n}$ .

Z poniższych równań

$$\begin{aligned}\alpha + \delta &= \frac{M-2}{M} \cdot 360^\circ \\ \beta + \gamma &= \frac{N-2}{N} \cdot 360^\circ \\ \alpha + \beta &= \frac{360^\circ \cdot 2}{m} \\ \gamma + \delta &= \frac{360^\circ \cdot 2}{n}\end{aligned}$$

możemy zapisać równanie zależne od parametrów  $M, N, m, n$ :

$$\frac{M-2}{M} \cdot 360^\circ + \frac{N-2}{N} \cdot 360^\circ = \frac{360^\circ \cdot 2}{m} + \frac{360^\circ \cdot 2}{n}.$$

Upraszczając otrzymujemy

$$\frac{1}{M} + \frac{1}{N} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1.$$

Z tego, że  $M, N, m, n \geq 4$  wynika, że każda z odwrotności jest mniejsza lub równa od  $\frac{1}{4}$ , czyli  $\frac{1}{M}, \frac{1}{N}, \frac{1}{m}, \frac{1}{n} \leq \frac{1}{4}$ .

Zatem

$$\frac{1}{M} + \frac{1}{N} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq 1.$$

Aby w powyższej nierówności zaszła równość, żadna z tych odwrotności nie może być mniejsza niż  $\frac{1}{4}$ , czyli z tego wynika, że

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{N} = \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{m} = \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{n} = \frac{1}{4},$$

a więc ostatecznie

$$M = 4 \quad N = 4 \quad m = 4 \quad n = 4.$$

Podsumowując, jedynymi potencjalnymi możliwościami dla wartości parametrów  $m, n, M, N$  (w obecności symbolu, który składa się z czterech flag tworzących podzbiory jednoelementowych są

$$M = 4 \quad N = 4 \quad m = 4 \quad n = 4.$$

## 2.8 Podsumowanie potencjalnych typów kombinatorycznych parkietaży izotoksalnych o niesymetrycznych krawędziach.

Podsumujmy teraz wszystkie potencjalne typy kombinatoryczne parkietaży izotoksalnych o niesymetrycznych krawędziach. Rozróżniamy 13 typów kombinatorycznych jakie mogą wystąpić wśród izotoksalnych parkietaży o niesymetrycznych krawędziach.

Typy kombinatoryczne o symbolu, który składa się z:

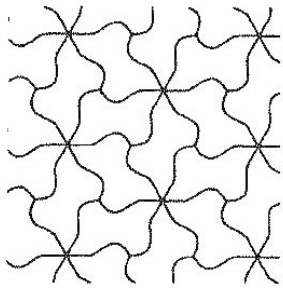
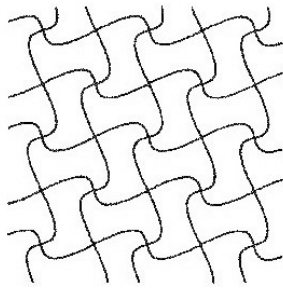
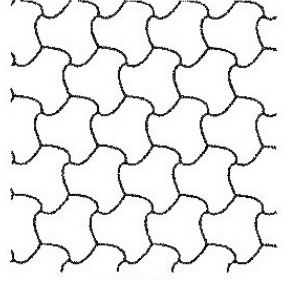
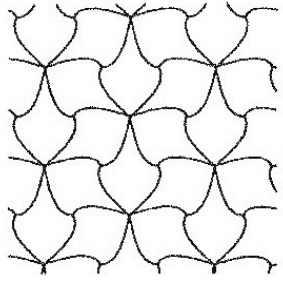
- dwóch dwuelementowych zbiorów, złożonych z flag leżących w poprzek o:
  - 1) stopniu wierzchołków:  $\{3, 6\}$ ,  
stopniu płytek:  $\{4\}$ ,
  - 2) stopniu wierzchołków:  $\{4\}$ ,  
stopniu płytek:  $\{4\}$ ,
  - 3) stopniu wierzchołków:  $\{3\}$ ,  
stopniu płytek:  $\{6\}$ ;
- jednej pary flag leżących w poprzek oraz dwóch flag tworzących podzbiory jednoelementowe o:
  - 4) stopniu wierzchołków:  $\{3, 6\}$ ,  
stopniu płytek:  $\{4\}$ ,
  - 5) stopniu wierzchołków:  $\{4\}$ ,  
stopniu płytek:  $\{4\}$ ;
- dwóch dwuelementowych zbiorów, złożonych z flag leżących po skosie o:
  - 6) stopniu wierzchołków:  $\{4\}$ ,  
stopniu płytek:  $\{4\}$ ;
- jednej pary flag leżącej po skosie oraz dwóch flag tworzących podzbiory jednoelementowe o:
  - 7) stopniu wierzchołków:  $\{4\}$ ,  
stopniu płytek:  $\{4\}$ ;
- dwóch dwuelementowych zbiorów, złożonych z flag leżących wzdłuż o:
  - 8) stopniu wierzchołków:  $\{4\}$ ,  
stopniu płytek:  $\{3, 6\}$ ,

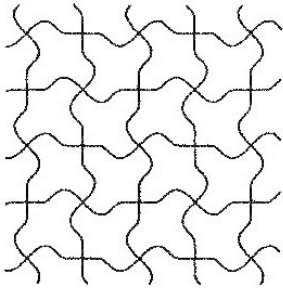
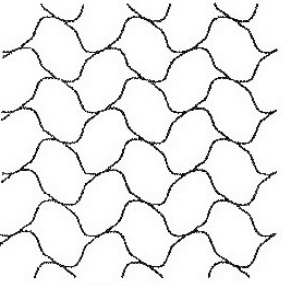
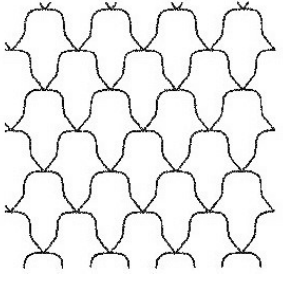
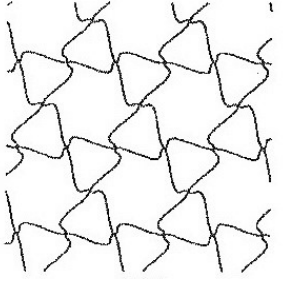
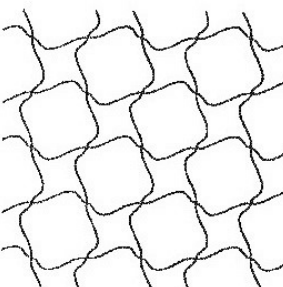
- 9) stopniu wierzchołków:  $\{4\}$ ,  
stopniu płytek:  $\{4\}$ ,
- 10) stopniu wierzchołków:  $\{6\}$ ,  
stopniu płytek:  $\{3\}$ ;
- jednej pary flag leżącej wzdłuż oraz dwóch flag tworzących podzbiory jednoelementowe o:
    - 11) stopniu wierzchołków:  $\{4\}$ ,  
stopniu płytek:  $\{3, 6\}$ ,
    - 12) stopniu wierzchołków:  $\{4\}$ ,  
stopniu płytek:  $\{4\}$ ;
  - czterech flag tworzących podzbiory jednoelementowe o:
    - 13) stopniu wierzchołków:  $\{4\}$ ,  
stopniu płytek:  $\{4\}$ .

### 3 Klasyfikacja izotoksalnych parkietaży o niesymetrycznych krawędziach

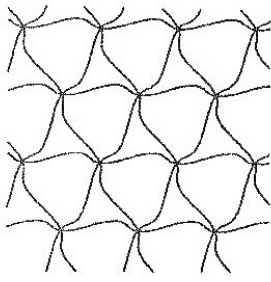
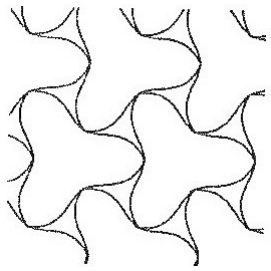
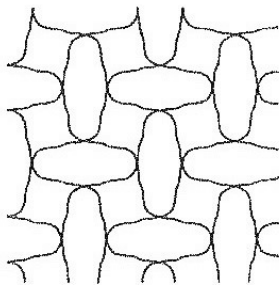
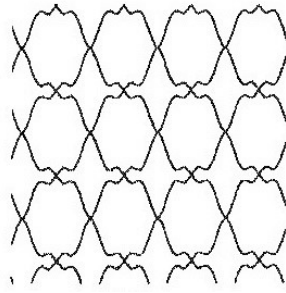
W poprzednim rozdziale znaleźliśmy 13 potencjalnych typów kombinatorycznych dla parkietaży izotoksalnych o niesymetrycznych krawędziach. W tym rozdziale pokażemy, że każdy z tych 13 potencjalnych typów kombinatorycznych rzeczywiście jest typem kombinatorycznym pewnego parkietażu izotoksalnego o niesymetrycznych krawędziach. Przykłady te pokazuje poniższa Tabela 1. Rysunki, które występują w Tabeli 1 są zaczerpnięte z książki [1].

Tabela 1: Przykłady parkietaży izotoksalnych o niesymetrycznych krawędziach.

lp	symbol	stopień	przykład
1.	Symbol, który składa się z dwóch dwuelementowych zbiorów, złożonych z flag leżących w poprzek.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• wierzchołków: <math>\{3, 6\}</math></li> <li>• płytek: <math>\{4\}</math></li> </ul>	
2.		<ul style="list-style-type: none"> <li>• wierzchołków: <math>\{4\}</math></li> <li>• płytek: <math>\{4\}</math></li> </ul>	
3.		<ul style="list-style-type: none"> <li>• wierzchołków: <math>\{3\}</math></li> <li>• płytek: <math>\{6\}</math></li> </ul>	
4.	Symbol, który składa się z jednej pary flag leżących w poprzek oraz dwóch flag tworzących podzbiory jednoelementowe.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• wierzchołków: <math>\{3, 6\}</math></li> <li>• płytek: <math>\{4\}</math></li> </ul>	

lp	symbol	stopień	przykład
5.		<ul style="list-style-type: none"> <li>• wierzchołków: {4}</li> <li>• płytek: {4}</li> </ul>	
6.	Symbol, który składa się z dwóch dwuelementowych zbiorów, złożonych z flag leżących po skosie.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• wierzchołków: {4}</li> <li>• płytek: {4}</li> </ul>	
7.	Symbol, który składa się z jednej pary flag leżącej po skosie oraz dwóch flag tworzących podzbiory jednoelementowe.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• wierzchołków: {4}</li> <li>• płytek: {4}</li> </ul>	
8.	Symbol, który składa się z dwóch dwuelementowych zbiorów, złożonych z flag leżących wzdłuż.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• wierzchołków: {4}</li> <li>• płytek: {3, 6}</li> </ul>	
9.		<ul style="list-style-type: none"> <li>• wierzchołków: {4}</li> <li>• płytek: {4}</li> </ul>	



lp	symbol	stopień	przykład
10.		<ul style="list-style-type: none"> <li>• wierzchołków: {6}</li> <li>• płytek: {3}</li> </ul>	
11.	Symbol, który składa się z jednej pary flag leżącej wzdłuż oraz dwóch flag tworzących podzbiory jednoelementowe.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• wierzchołków: {4}</li> <li>• płytek: {3, 6}</li> </ul>	
12.		<ul style="list-style-type: none"> <li>• wierzchołków: {4}</li> <li>• płytek: {4}</li> </ul>	
13.	Symbol, który składa się z czterech flag tworzących podzbiory jednoelementowe.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• wierzchołków: {4}</li> <li>• płytek: {4}</li> </ul>	

Ostatecznym podsumowaniem całej pracy jest następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 39.** *Istnieje dokładnie 13 typów kombinatorycznych izotoksalnych parkietaży o niesymetrycznych krawędziach.*

Opis tych typów znajduje się w Tabeli 1.



## Literatura

- [1] B. Grünbaum, G. C. Shephard: *Tilings and Patterns*, Dover Publications, Inc., New York, 2016.
- [2] Kumaszcza Patrycja, *O kilku rodzajach regularnych parkietaczy płaszczyzny*, praca licencjacka, Uniwersytet Wrocławski, Wrocław 2015.
- [3] Krawczyńska Diana, *O pewnej klasie regularnych parkietaczy z dwoma rodzajami płytek*, praca magisterska, Uniwersytet Wrocławski, Wrocław 2019.
- [4] Prasolov Viktor, *Problems in a plane and solid geometry, v.1 Plane Geometry*. <http://e.math.hr/old/afine/planegeo.pdf> (dostęp 04.06.2019).
- [5] Oficjalna strona fundacji Eschera, <https://www.mcescher.com/gallery/back-in-holland/no-41-two-fish/> (dostęp 04.06.2019).