

Uniwersytet Wrocławski  
Wydział Matematyki i Informatyki  
Instytut Matematyczny

*Daria Przybylak*

# Odbiciowe parkietaże przestrzeni o klepkach będących ostrosłupami

Praca magisterska  
napisana pod kierunkiem  
prof. dr hab. Jacka Świątkowskiego

Wrocław 2021



# Spis treści

<b>1</b>	<b>Wstęp</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Parkietaże</b>	<b>7</b>
<b>3</b>	<b>Odbiciowe parkietaże sfery n-kątami (<math>n &gt; 3</math>)</b>	<b>10</b>
3.1	Uwagi wstępne	10
3.2	Ograniczenia na odbiciowe czworokąty sferyczne	11
3.3	Ograniczenia na odbiciowe pięciokąty sferyczne	17
3.4	Ograniczenia na odbiciowe n-kąty sferyczne, gdzie $n \geq 6$	19
3.5	Jednoznaczność kształtu potencjalnych płytek odbiciowych parkietaży	20
3.6	Konstrukcja odbiciowych parkietaży sferycznych	24
3.7	Klasyfikacja odbiciowych parkietaży sfery n-kątami, $n > 3$	30
3.8	Odbiciowe trójkąty sferyczne	31
<b>4</b>	<b>Parkietaże odbiciowe przestrzeni ostrosłupami</b>	<b>31</b>
4.1	Uwagi wstępne	32
4.2	Ograniczenia na typy kątowe ostrosłupów odbiciowych o podstawie czworokąta	32
4.3	Ograniczenia na typy kątowe ostrosłupów odbiciowych o podstawie pięciokąta	43
4.4	Dalsze wykluczenia oraz konstrukcje potencjalnych ostrosłupów odbiciowych oraz ich jednoznaczność	46
4.5	Parkietaże odbiciowe przestrzeni ostrosłupami i dowód Twierdzenia 1.1	67

# 1 Wstęp

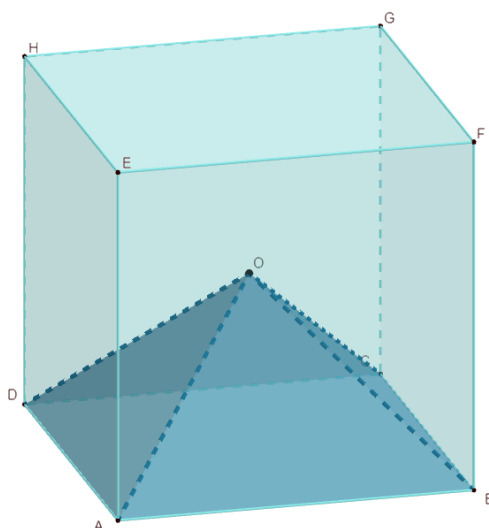
Wytłumaczmy najpierw czym jest parkietaż przestrzeni. Jest to wypełnienie przestrzeni bryłami, które ściśle do siebie przylegają, ale również nie zachodzą na siebie. Parkietaż ten nazywamy odbiciowym, gdy jego płytki są bryłami wielościennymi oraz gdy, każde dwie płytki mające wspólną ścianę są do siebie symetryczne względem płaszczyzny zawierającej tę ścianę. Praca dotyczy problemu klasyfikacji odbiciowych parkietaży przestrzeni, to znaczy znalezienia wszystkich wielościanów, które są płytkami takich parkietaży. Częściowe rozwiązanie tego zagadnienia zostało przedstawione w pracy magisterskiej Pauliny Górskiej [2], gdzie opisane zostały wszystkie parkietaże odbiciowe, których płytkami są czworościany.

W tej pracy znajdziemy i opiszemy wszystkie parkietaże odbiciowe przestrzeni, których płytki są ostrosłupami  $n$ -kątnymi dla  $n > 3$ .

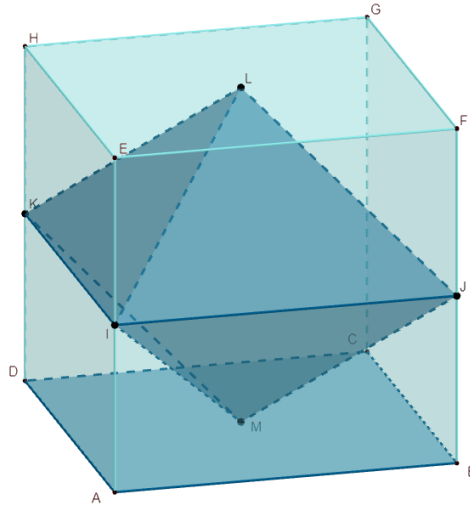
Główny wynik pracy można sformułować w postaci następującej.

**Twierdzenie 1.1.** *Istnieją, z dokładnością do przystawania i ewentualnie przeskalowania, trzy parkietaże odbiciowe o płytkach będących ostrosłupami  $n$ -kątnymi, dla  $n > 3$ . Płytki tych trzech parkietaży są ostrosłupami czworokątnymi przedstawionymi na Rysunkach 1.1, 1.2 oraz 1.3.*

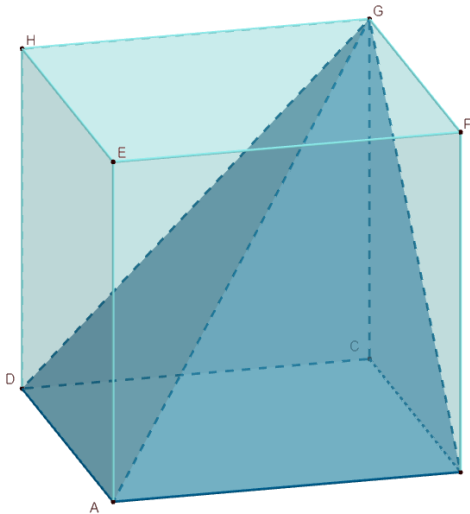
Ostrosłupy na rysunkach poniżej zostały umieszczone w sześcianach, aby ułatwić zrozumienie ich wyglądu i kształtu.



Rysunek 1.1: Pierwszy odbiciowy ostrosłup z Twierdzenia 1.1. Krawędzie podstawy tego ostrosłupa pokrywają się z krawędziami podstawy sześcianu zaś wierzchołek  $O$  jest punktem przecięcia przekątnych sześcianu. Kąty dwuścienne pomiędzy ścianami bocznymi wynoszą  $120^\circ$ , zaś pomiędzy podstawą a ścianami bocznymi kąty dwuścienne mają miarę  $45^\circ$ .



Rysunek 1.2: Drugi odbiciowy ostrosłup z Twierdzenia 1.1. Wierzchołki podstawy  $M$  oraz  $L$  to środki ścian sześcianu odpowiednio  $ABCD$  i  $EFGH$ . Zaś wierzchołki  $J$  oraz  $K$  są odpowiednio środkami krawędzi  $FB$  oraz  $HD$ . Wierzchołkiem ostrosłupa jest punkt  $I$  odpowiadający środkowi krawędzi  $AE$ . Kąty dwuścienne pomiędzy podstawą a ścianami bocznymi wynoszą  $60^\circ$ , pomiędzy ścianami  $JIL$  i  $IKL$  jest kąt dwuścienny miary  $120^\circ$ , tak samo jak dla ścian  $IJM$  oraz  $IKM$ . Pomędzy ścianami  $IJM$  i  $LIJ$  znajduje się kąt miary  $90^\circ$  i tak samo w przypadku kąta dwuściennego między  $IKL$  oraz  $IKM$ .



Rysunek 1.3: Trzeci odbiciowy ostrosłup z Twierdzenia 1.1. Wierzchołek  $G$  ostrosłupa to też wierzchołek sześcianu, zaś pozostałe wierzchołki pokrywają się z wierzchołkami podstawy sześcianu. Pomędzy ścianami  $DAG$  oraz  $ABG$  jest kąt dwuścienny miary  $120^\circ$ . Pomędzy ścianami  $DAG$  oraz  $DCG$ , tak jak pomędzy  $ABG$  i  $BCG$  kąt dwuścienny wynosi  $90^\circ$ . Pomędzy podstawą ostrosłupa a ścianami  $DCG$  oraz  $BCG$  są kąty miary  $90^\circ$ , zaś pomędzy podstawą a ścianami  $ABG$  oraz  $DAG$  są kąty dwuścienne miary  $45^\circ$ .

**Plan i organizacja pracy są następujące.**

W Rozdziale 2 zdefiniowane zostaną pojęcia przydatne w dalszych częściach pracy.

W Rozdziale 3 omówione zostaną pomocnicze rezultaty, wykorzystywane potem w głównej części pracy, dotyczące odbiciowych parkietaży sfery. Dokładniej przeprowadzona zostanie pełna klasyfikacja odbiciowych parkietaży sferycznych, w których płytki są  $n$ -kątaami sferycznymi dla  $n \geq 4$ .

Rozdział 4, jak wcześniej już zostało wspomniane, będzie główną częścią pracy. Mianowicie będzie przeprowadzona klasyfikacja odbiciowych ostrosłupów jako płytek odbiciowych parkietaży przestrzeni.

## 2 Parkietaże

W tym rozdziale przytoczymy niezbędne definicje dotyczące parkietaży płaszczyzny, sfery i przestrzeni, w tym kluczowego dla pracy pojęcia parkietażu odbiciowego przestrzeni.

**Definicja 2.1. Parkietaż płaszczyzny** to pokrycie płaszczyzny płytkami/klepkami ściśle do siebie przylegającymi i niezachodzącymi na siebie.

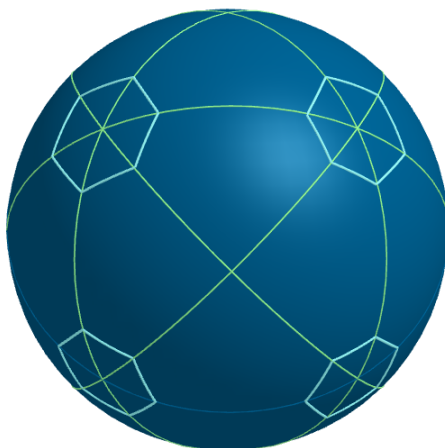
**Definicja 2.2. Płytką/klepką parkietażu** to pojedynczy element tworzący parkietaż.

**Definicja 2.3. Parkietaż wielokątowy** to rodzaj parkietażu, który powstaje z płytek wielokątowych przylegających do siebie ściśle bokami.

**Definicja 2.4. Wierzchołek parkietażu** to punkt styku wierzchołków płytek wielokątowych tworzących dany parkietaż.

**Definicja 2.5. Parkietaż sfery** to pokrycie sfery płytkami ściśle do siebie przylegającymi i niezachodzącymi na siebie.

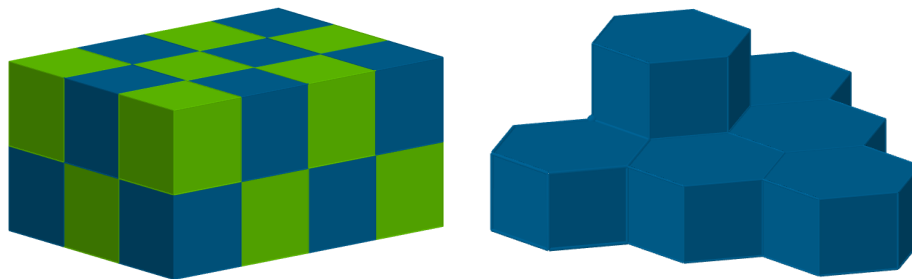
Przykład parkietażu sfery przedstawiony został na Rysunku 2.1. Płytkami tego parkietażu są trójkąty oraz pięciokąty sferyczne.



Rysunek 2.1

**Definicja 2.6. Parkietaż przestrzeni** to wypełnienie przestrzeni bryłami ściśle do siebie przylegającymi. Bryły te będziemy nazywać **płytkami** parkietażu przestrzeni. Parkietaż przestrzeni nazywamy **wielościenne**, gdy tworzące go płytki są wielościanami przylegającymi do siebie całymimi ścianami.

Mamy do czynienia z różnymi parkietażami przestrzeni. Pierwszym nasuwającym się przykładem jest parkietaż sześcianami. Innym przykładem jest parkietaż graniastosłupami o podstawie sześciokąta foremego. Oba te parkietaże przestrzeni zostały zilustrowane na Rysunku 2.2.

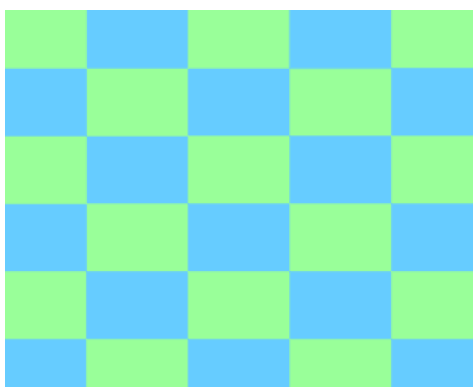


Rysunek 2.2

Zajmijmy się teraz parkietami odbiciowymi.

**Definicja 2.7. Parkietaż odbiciowy płaszczyzny** to parkietaż wielokątowy, w którym każde dwie płytki mające wspólny bok są do siebie symetryczne względem prostej zawierającej ten bok.

Jedną płytkę odbijamy względem prostych, które zawierają jej boki. Powtarzamy proces aż wypełnimy całą płaszczyznę. Przykład parkietu odbiciowego płaszczyzny, w którym płytki są prostokątami, przedstawiony został na Rysunku 2.3.

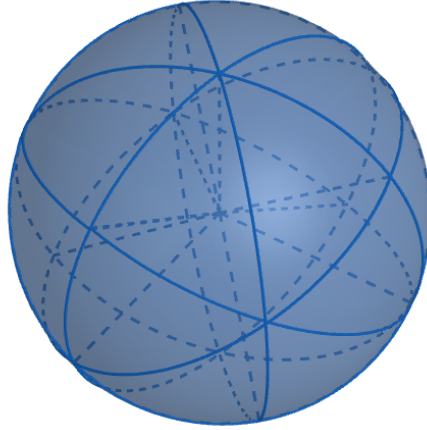


Rysunek 2.3

**Definicja 2.8. Parkietaż odbiciowy sfery** to parkietaż wielokątowy sfery, w którym każde dwie płytki mające wspólny bok są do siebie symetryczne względem okręgu wielkiego zawierającego ten bok, tzn. względem płaszczyzny przechodzącej przez środek sfery i zawierającej ten okrąg wielki.

Rysunek 2.4 poniżej przedstawia przykład odbiciowego parkietu sfery, gdzie płytkami są sferyczne trójkąty równoramienne. Z drugiej strony, parkietaż z Rysunku 2.1 nie jest parkietem odbiciowym. W pracy Rozdział 3 zostanie poświęcony odbiciowym parkietom sferycznym  $n$ -kątami, gdzie  $n \geq 4$ .





Rysunek 2.4: Parkietaż odbiciowy sferyczny sferycznymi trójkątami równoramiennymi.

**Definicja 2.9. Parkietaż odbiciowy przestrzeni** to parkietaż, którego klepki to wielościany, w którym każde dwie płytki mające wspólną ścianę są do siebie symetryczne względem płaszczyzny zawierającej tę ścianę.

Oba parkietaże przedstawiona na Rysunku 2.2 są odbiciowymi parkietażami przestrzeni.

Głównym celem tej pracy jest znalezienie wszystkich odbiciowych parkietaży przestrzeni, w których płytki są ostrosłupami  $n$ -kątymi dla  $n \geq 4$ .

### 3 Odbiciowe parkietaże sfery $n$ -kątaami ( $n > 3$ )

Celem tego rozdziału jest klasyfikacja  $n$ -kąatów sferycznych, gdzie  $n$  jest większe od trzech, którymi można wykonać parkietaż odbiciowy sfery. Klasyfikacja ta będzie wykorzystana w kolejnym rozdziale jako fakt pomocniczy służący znalezieniu wszystkich odbiciowych parkietaży przestrzeni za pomocą ostrosłupów.

Przypomnijmy czym jest parkietaż sfery :

**Parkietaż sfery** to pokrycie sfery płytkami ściśle do siebie przylegającymi i niezachodzącymi na siebie.

Przypomnijmy również, że klepki odbiciowego parkietażu sferycznego są wielokątami sferycznymi. Rozpatrzone zostaną  $n$ -kąaty, gdzie  $n \geq 4$ , ponieważ problem odbiciowych trójkątów sferycznych został przedstawiony w pracy magisterskiej Pauliny Górskiej [2]. W tym rozdziale przyjmujemy następujący plan działania:

1. Szukamy typów kąatowych  $n$ -kąatów będących kandydatami na wielokąaty sferyczne parkietujące odbiciowo sferę. Pojęcie typu kąatowego opisane jest w Definicji 3.5;
2. Dla każdego z powyższych typów kąatowych pokazujemy, że kształt wielokąata nim opisanego jest jednoznaczny.
3. Przeprowadzimy konstrukcje parkietażu odbiciowego sfery wielokątami sferycznymi o tym typie kąatowym.

#### 3.1 Uwagi wstępne

Przytoczmy kilka pomocniczych informacji o  $n$ -kąatach sferycznych oraz odbiciowych  $n$ -kąatach sferycznych.

Na początek użyteczny fakt dotyczący płytek odbiciowych, który został udowodniony w pracy Patrycji Kumaszkii [1].

**Fakt 3.1.** *W parkietażu odbiciowym, w którym występuje wierzchołek z nieparzystą liczbą płytek, dwusieczna kąata płytki przyległej do tego wierzchołka jest jej osią symetrii [1].*

W pracy [1] powyższy fakt został udowodniony dla parkietaży płaszczyzny zwykłymi wielokątami euklidesowymi, ale dokładnie ten sam dowód działa w przypadku parkietaży sfery wielokątami sferycznymi.

**Wniosek 3.2.** Z Faktu 3.1 wynika, że w szczególności w dowolnej odbiciowej płytce kąaty sąsiednie do kąata przy wierzchołku o nieparzystej liczbie płytek muszą być równe.

**Fakt 3.3.** *Suma miar kąatów wewnętrznych w wielokąacie euklidesowym wynosi  $(n - 2) \cdot \pi$ , gdzie  $n$  to ilość kąatów. Na sferze kąaty są o wyższej wartości niżeli na płaszczyźnie.*

*Jeśli kąaty wewnętrzne w  $n$ -kąacie sferycznym oznaczymy przez  $\alpha_i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , wtedy zachodzi nierówność:*

$$(n - 2) \cdot \pi < \sum_{i=1}^n \alpha_i. \quad (3.1)$$

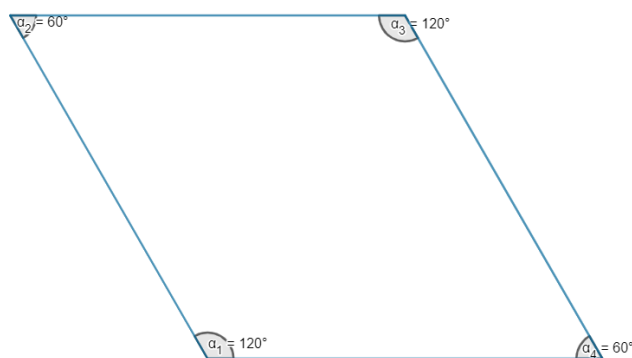
**Obserwacja 3.4.** *Aby wielokąt sferyczny był odbiciowy, każdy z jego kąatów wewnętrznych musi być postaci  $\alpha_i = \frac{2\pi}{k_i}$ , gdzie  $k_i$  jest liczbą naturalną większą od 2 opisującą liczbę płytek spotykających się w tym wierzchołku parkietażu, w którym płytki mają kąat  $\alpha_i$ .*

Odbiciowość zapewnia, że przy jednym wierzchołku parkietażu znajdują się płytki przylegające kątami o tej samej mierze. Możemy wykluczyć  $k_i = 1$  oraz  $k_i = 2$ , ponieważ jeden kąt miałby miarę  $360^\circ$ , zaś gdy przy jednym wierzchołku parkietażu spotkają się dwie płytki kąty przy nim byłyby miary równej  $\pi$ , co jest niemożliwe.

**Definicja 3.5.** Typ kątowy płytki parkietażu odbiciowego to ciąg liczb reprezentujących kolejne kąty z uwzględnieniem cyklicznego porządku występowania, czyli  $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ , gdzie kolejne kąty mają miarę  $\frac{2\pi}{k_1}, \frac{2\pi}{k_1}, \frac{2\pi}{k_2}, \dots, \frac{2\pi}{k_n}$ .

**Obserwacja 3.6.** Jeden typ kątowy można przedstawić na kilka sposobów, w zależności od kąta od którego zaczynamy wymieniać.

**Przykład 3.7.** Zaczniemy od narysowania pewnego czworokąta euklidesowego:



Rysunek 3.1

Kąty zapiszemy w postaci  $\alpha_i = \frac{2\pi}{k_i}$ , gdzie  $\alpha_i$  to kąty tego czworokąta,  $k_i$  to liczba całkowita, przez którą dzielimy miarę kąta pełnego by uzyskać  $\alpha_i$ , zaś  $i$  należy do zbioru  $\{1, 2, 3, 4\}$ . Zaczynając zapis typu kąтового tej figury rozpoczynając od kąta  $\alpha_1 = 120^\circ$  otrzymamy  $(3, 6, 3, 6)$ , gdybyśmy rozpoczęli od  $\alpha_2$  otrzymamy  $(6, 3, 6, 3)$ . Ostatecznie mamy dwie czwórki reprezentujące ten sam czworokąt.

Wszystkie rysunki wielokątów sferycznych w dalszej części tego rozdziału są rysunkami schematycznymi.

## 3.2 Ograniczenia na odbiciowe czworokąty sferyczne

Korzystając z wyżej wymienionych informacji zostaną wyliczone i przedstawione typy kątowe czworokątów, które mogą tworzyć parkietaż odbiciowy sfery. Rozpocznijmy od wzoru opisującego nam zależność między sumą kątów a kątem pełnym, będącego szczególnym przypadkiem nierówności z Faktu 3.3 :

$$2\pi < \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \quad (3.2)$$

gdzie  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  to miary kątów w czworokącie.

Każdy z kątów może zostać przedstawiony jako iloraz  $\frac{2\pi}{k_i}$ ,  $k_i \in \mathbb{Z}$ ,  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ , z Obserwacji

3.4 . Stąd po wstawieniu tych wielkości do nierówności 3.2 i podzieleniu obu stron przez  $2\pi$ , otrzymujemy:

$$1 < \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \frac{1}{k_4} = \sum_{i=1}^4 \frac{1}{k_i}. \quad (3.3)$$

Każde z  $k_i \geq 3$ ,  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ , Każdy czworokąt będzie przedstawiany za pomocą czwórki  $(k_1, k_2, k_3, k_4)$ .

**Dla czterech niewiadomych  $k_i$  rozpatrujemy pięć możliwości :**

1. Wszystkie  $k_i$  równe;
2. Trzy  $k_i$  równe;
3. Dwie pary równych kątów;
4. Para równa, pozostałe różne;
5. Wszystkie kąty różne.

Ad 1. Wszystkie  $k_i$  równe.

Przyjmijmy, że  $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k$ , gdzie  $k \geq 3$ . Rozpocznijmy od zastosowania Wzoru 3.3 dla powyższego założenia:

$$1 < \frac{1}{k} + \frac{1}{k} + \frac{1}{k} + \frac{1}{k}.$$

Sumując prawą stronę nierówności otrzymujemy:

$$1 < 4 \cdot \frac{1}{k}.$$

Podzielmy, więc obustronnie przez cztery:

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{k}.$$

Nierówność tą spełnia jedynie  $k = 3$ , stąd  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \frac{2\pi}{3} = 120^\circ$ .

Jedyna możliwość na odbiciowy czworokąt sferyczny o wszystkich kątach równych, to czworokąt o typie kątowym  $(3, 3, 3, 3)$ .

Ad 2. Trzy  $k_i$  równe

Bez straty ogólności przyjmijmy, że :  $k_1 = k_2 = k_3 = k$ ,  $k_4 = l$ , gdzie  $k, l \geq 3$  oraz  $k \neq l$ . Po podstawieniu niewiadomych do nierówności 3.3 otrzymujemy:

$$1 < 3 \cdot \frac{1}{k} + \frac{1}{l}. \quad (3.4)$$

Rozpatrzmy teraz podprzypadki ze względu na różne wartości parametru  $k$ .

Niech  $k = 3$ .

Z nierówności 3.4 wynika, że dowolne  $l > 3$  ją spełnia. Z Faktu 3.1, wszystkie możliwości zostają odrzucone z powodu braku symetrii względem dwóch dwusiecznych kątów o mierze równej  $\frac{2\pi}{3} = 120^\circ$ , bo kąty sąsiednie do tych kątów mają różne miary.

Niech  $k = 4$ .

Poniższa równość:

$$1 < 3 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{l}, \text{ czyli } \frac{1}{l} > \frac{1}{4}$$

pokazuje, że jedynie  $l = 3$  spełnia założenie.

Stąd jedynym możliwym typem kątowym w ramach tego podprzypadku jest  $(4, 4, 4, 3)$ . Zgodnie z Obserwacją 3.6 jest on równoważny z typem  $(3, 4, 4, 4)$ .

Niech  $k = 5$ .

Wtedy nierówność 3.4 jest postaci:

$$1 < 3 \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{l}.$$

Przekształcamy aby uzyskać informację o  $l$ :

$$1 - 3 \cdot \frac{1}{5} < \frac{1}{l}.$$

Po wykonaniu różnicy otrzymujemy:

$$\frac{2}{5} < \frac{1}{l},$$

czyli

$$l < \frac{5}{2} = 2.5.$$

Wniosek: Nie ma możliwości aby  $l < 2.5$ , gdyż jest to sprzeczne z założeniem  $l \geq 3$ . Zatem w ramach tego podprzypadku nie ma żadnych odbiciowych wielokątów sferycznych.

Ad 3. Dwie pary równych kątów.

Przyjmijmy, bez straty ogólności oraz nie biorąc na razie pod uwagę porządku występowania kątów w czworokącie, że  $k_1 = k_2 = k$ ,  $k_4 = k_3 = l$ , gdzie  $k, l \geq 3$ ,  $k \neq l$ . Podstawiamy powyższe założenia do nierówności 3.3 i otrzymujemy:

$$1 < \frac{2}{k} + \frac{2}{l}. \tag{3.5}$$

Ponownie zajmiemy się podprzypadkami ze względu na wartość parametru  $k$ :

Niech  $k = 3$ .

Nierówność 3.3 przyjmuje postać:

$$1 < \frac{2}{3} + \frac{2}{l}.$$

Stąd  $l < 6$ , mamy więc dwie możliwości  $l = 4$  lub  $l = 5$ . W ten sposób otrzymaliśmy cztery potencjalne czwórki na typy kątowe:  $(3, 3, 4, 4)$ ,  $(3, 3, 5, 5)$ ,  $(3, 4, 3, 4)$  oraz  $(3, 5, 3, 5)$ . W związku z Faktem 3.1 oraz biorąc pod uwagę kolejność występowania kątów w wyżej wymienionych typach kątowych, musimy odrzucić pierwszą oraz drugą możliwość. Jedynymi potencjalnymi typami kątowymi odbiciowego czworokąta w ramach tego podprzypadku będą  $(3, 4, 3, 4)$  oraz  $(3, 5, 3, 5)$ .

Niech  $k = 4$

Jak w powyższym podprzypadku chcemy dojść do opisanego liczby  $l$ . Rozpocznijmy więc od przytoczenia nierówności i podstawienia do niej liczby  $k$ :

$$1 < \frac{2}{4} + \frac{2}{l}.$$

Po odjęciu obustronnie  $\frac{2}{4}$ :

$$\frac{2}{4} < \frac{2}{l}.$$

Podzielmy, więc przez  $\frac{2}{l}$ . Otrzymujemy nierówność:

$$l < 4.$$

Jedyna możliwość to  $l = 3$ , więc typy kątowe są postaci  $(4, 4, 3, 3)$ ,  $(3, 4, 3, 4)$ . Biorąc pod uwagę kolejność występowania kątów oraz symetrię typem kątowym przedstawiającym potencjalny czworokąt sferyczny będzie  $(3, 4, 3, 4)$ .

Niech  $k = 5$ .

Podstawmy ponownie liczbę 5 w miejscu niewiadomej  $k$ :

$$1 < \frac{2}{5} + \frac{2}{l}.$$

Po przekształceniach uzyskujemy nierówność opisującą liczbę  $l$ :

$$l < \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$$

Otrzymujemy czwórkę  $(5, 5, 3, 3)$  i po zastosowaniu kolejności kątów ze względu na symetrię z Faktu 3.1, mamy typ kątowy  $(5, 3, 5, 3)$ , na podstawie Obserwacji 3.6 jest on równoważny z  $(3, 5, 3, 5)$ . Został on pokazany wyżej, więc jest to powtórzenie.

Niech  $k \geq 6$ .

Powróćmy do ogólnej nierówności z niewiadomymi  $k$  oraz  $l$ , w rozważanym przez nas przypadku 3:

$$1 < \frac{2}{k} + \frac{2}{l}.$$

Staramy się wyznaczyć  $l$  z równoważnej nierówności:

$$k < \frac{2}{1 - \frac{2}{l}}.$$

Z założenia, że  $k \geq 6$  otrzymujemy:

$$6 \leq k < \frac{2}{1 - \frac{2}{l}}.$$

Po przekształceniach mamy:

$$6 \cdot 1 - \frac{2}{l} < 2.$$

W związku z tym otrzymaliśmy:

$$l < 3,$$

a to nie spełnia założenia, że  $l \geq 3$ . W takim razie nie otrzymujemy już innych potencjalnych przykładów dla dwóch par równych kątów.

Ad 4. Para kątów równej miary, pozostałe różne.

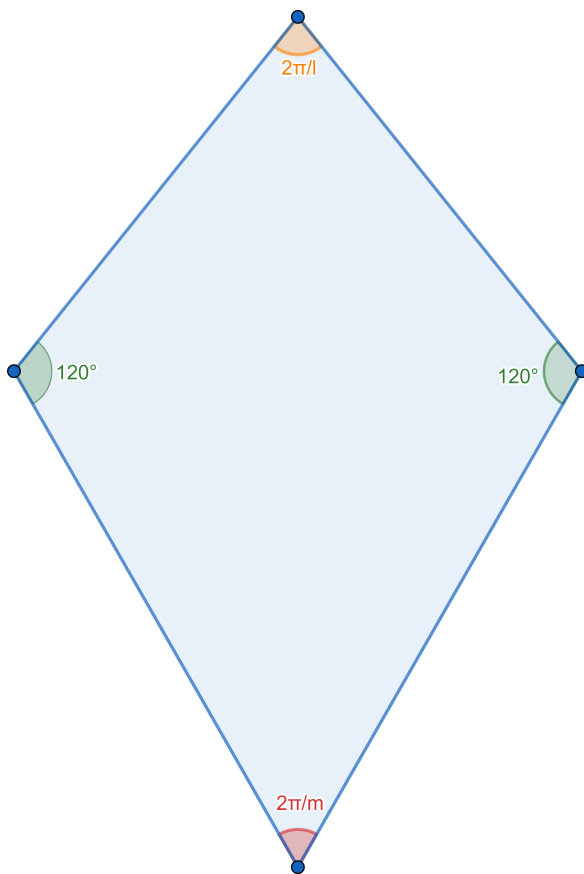
Bez straty ogólności oraz nie biorąc na razie pod uwagę porządku występowania kątów, przyjmijmy, że  $k_1 = k_2 = k, k_3 = l, k_4 = m$ , gdzie  $k, l, m \geq 3$  i  $k \neq l, l \neq m, k \neq m$ . Nierówność 3.3 przyjmuje postać:

$$1 < \frac{2}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m}. \quad (3.6)$$

Rozpatrujemy podprzypadki zakładając wartości liczby  $k$ .

Niech  $k = 3$ .

W związku z Faktem 3.1, dwusieczna każdego z kątów o mierze  $\frac{2\pi}{3}$  musi być osią symetrii czworokąta. Wszelkie przypadki, gdzie  $k$  jest liczbą nieparzystą, zostają odrzucone. Pokażemy teraz dlaczego się tak dzieje. Kąty sąsiednie do kąta  $\frac{2\pi}{3}$  muszą być parą kątów równych z Wniosku 3.2. Reprezentuje to Rysunek 3.2.



Rysunek 3.2

Z Rysunku 3.2 obserwujemy, że aby dwusieczna kątów zielonych była osią symetrii to kąt pomarańczowy oraz czerwony musiałyby być takiej samej miary a to jest sprzeczne z  $l \neq m$ . Zatem nie ma żadnych potencjalnych czwórek z  $k = 3$ .

Niech  $k = 4$ .

Wtedy nierówność przedstawia się następująco:

$$1 < \frac{2}{4} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m}$$

Chcemy dostać warunek na liczbę  $m$ , w związku z tym po kilku przekształceniach mamy:

$$m < \frac{2l}{l-2} \quad (3.7)$$

*i)* Niech  $l = 3$  wtedy  $m < 6$ , czyli jedyną możliwością jest czwórka liczb 4, 4, 3, 5. Stosując Fakt 3.1 ustawiamy te liczby w typ kątowny, tak aby kolejno wymieniane kąty spełniały symetrię, (4, 3, 4, 5). Z Obserwacji 3.6 wiemy, że dwa typy kątowne mogą opisywać jeden czworokąt, stąd jest on równoważny z typem kątownym (3, 4, 5, 4).

*ii)* Niech  $l = 5$ . Podstawiamy więc dane do Nierówności 3.7 i otrzymujemy:

$$m < \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}.$$

Także jest tylko jedna możliwość (4, 4, 5, 3), która równoważnie, korzystając z Obserwacji 3.6, została pokazana powyżej, więc otrzymaliśmy powtórzenie.

*iii)* A co się stanie gdy  $l \geq 6$ ? Ponownie przywołujemy Nierówność 3.7 i korzystając z założenia otrzymujemy:

$$\frac{m-2}{2m} < \frac{1}{l}.$$

Przekształcamy powyższą nierówność tak, aby uzyskać warunek na liczbę  $m$  gdy  $l > 6$ :

$$6 \leq l < \frac{2m}{m-2}.$$

Stąd:

$$m < 3$$

Otrzymujemy sprzeczną z założeniem nierówność. Zatem nie ma potencjalnych typów kątownych, gdy przyjmujemy, że  $l > 6$ .

Niech  $k = 5$ . Przy tym założeniu Nierówność 3.6 wygląda następująco:

$$\frac{3}{5} < \frac{1}{l} + \frac{1}{m}.$$

Sprawdźmy różne możliwości na liczbę  $l$ :

*i)* Niech  $l = 3$ . Uzupełniamy powyższą nierówność o założenie:

$$\frac{3}{5} < \frac{1}{3} + \frac{1}{m}.$$

Po przekształceniach otrzymujemy nierówność opisującą liczbę  $m$ :

$$m < \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}.$$

Czyli jedyną możliwością jest  $m = 3$ , ale jest to sprzeczne z  $l \neq m$ . Wnioskujemy stąd, że nie ma więcej możliwości dla tego podpunktu.

Ad 5. Każdy z kątów jest innej miary.

$k_1 \neq k_2$ ,  $k_1 = k_3$ ,  $k_1 \neq k_4$ ,  $k_2 \neq k_3$ ,  $k_2 \neq k_4$ ,  $k_3 \neq k_4$ . Nierówność 3.3 przyjmuje postać

$$1 < \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \frac{1}{k_4}.$$



Bez straty ogólności i bez ustalenia kolejności występowania kątów w czworokącie, załóżmy, że  $k_1 = 3$ ,  $k_2 = 4$ ,  $k_3 = 5$ ,  $k_4 = 6$ . Wtedy:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{20}{60} + \frac{15}{60} + \frac{12}{60} + \frac{10}{60} = \frac{57}{60}.$$

Otrzymana wartość jest mniejsza niż 1. W takim przypadku odrzucamy możliwość, że wszystkie kąty są różnej miary.

### Podsumowanie

Poniżej znajduje się lista typów kątowych potencjalnych czworokątów sferycznych:

- |                 |                 |
|-----------------|-----------------|
| 1. (3, 3, 3, 3) | 4. (3, 4, 5, 4) |
| 2. (3, 4, 3, 4) | 5. (3, 4, 4, 4) |
| 3. (3, 5, 3, 5) |                 |

### 3.3 Ograniczenia na odbiciowe pięciokąty sferyczne

W tym podrozdziale zajmiemy się klasyfikacją odbiciowych pięciokątów sferycznych. Rozpoczniemy od zapisania nierówności reprezentującej zależność między miarami kątów w pięciokącie:

$$3\pi < \sum_{i=1}^5 \alpha_i,$$

gdzie  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$  to kąty w pięciokącie.

Ponownie, jak poprzednio, możemy zapisać nierówność za pomocą ilorazów przedstawiających miary kątów:

$$\begin{aligned} 3\pi &< \frac{2\pi}{k_1} + \frac{2\pi}{k_2} + \frac{2\pi}{k_3} + \frac{2\pi}{k_4} + \frac{2\pi}{k_5} \\ 3 &< \frac{2}{k_1} + \frac{2}{k_2} + \frac{2}{k_3} + \frac{2}{k_4} + \frac{2}{k_5} \end{aligned} \tag{3.8}$$

każde  $k_i$  odpowiada mierze kąta na podstawie Obserwacji 3.4.

Dla pięciu niewiadomych wnioskujemy siedem możliwości:

1. Wszystkie  $k_i$  równe;
2. Cztery  $k_i$  równe;
3. Trzy równe, pozostała para równa sobie;
4. Trzy równe, pozostała para nie jest równa sobie;
5. Parami równe;
6. Para równa, pozostałe  $k_i$  różne;
7. Wszystkie różne.

Ad 1. Wszystkie kąty równej miary.

Przyjmijmy, że  $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k_5 = k$ , gdzie  $k \geq 3$ . Nierówność 3.8 przyjmuje postać:

$$3 < 5 \cdot \frac{2}{k}.$$

Stąd  $k < 3\frac{1}{3}$ . Jediną możliwością jest  $k = 3$ . Wtedy typem kątowym potencjalnego pięciokąta sferycznego jest  $(3, 3, 3, 3, 3)$ .

Ad 2. Cztery kąty są równej miary, piąty inny.

Bez straty ogólności, niech  $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k$ ,  $k_5 = l$ , gdzie  $k \neq l$  i  $k, l \geq 3$ .

Założmy, że  $k = 3$ .

Wszystkie piątki, gdzie  $k = 3$  zostają odrzucone przez brak symetrii (Fakt 3.1) wzdłuż dwusiecznej jednego z kątów o mierze  $120^\circ$ .

Niech  $k \geq 4$ :

$$k < \frac{8}{3 - \frac{2}{l}}$$

Stąd chcielibyśmy wyliczyć warunek na liczbę  $l$ :

$$4 \cdot \left(3 - \frac{2}{l}\right) < 8$$

$$12 - 8 < \frac{8}{l}$$

Z nierówności wynika, że  $l < 2$ , co jest sprzeczne z założeniem  $l \geq 3$ .

W takim razie, są to wszystkie możliwości dla czwórki  $k_i$  o równych wartościach.

Ad 3. Trzy kąty równej miary, para spoza tej trójki równej miary.

Przyjmujemy, bez straty ogólności, że  $k_1 = k_2 = k_3 = k$ ,  $k_4 = k_5 = l$ , gdzie  $l \neq k$  oraz  $k, l \geq 3$ . Nierówność 3.8 dla tego przypadku wygląda następująco:

$$3 < 3 \cdot \frac{2}{k} + 2 \cdot \frac{2}{l}$$

Jak w przypadku powyżej, dla każdego  $k$  będącego liczbą nieparzystą nie otrzymamy symetrii względem dwusiecznej kąta odpowiadającego mierze  $\frac{2\pi}{k}$ .

Niech  $k \geq 4$  i nie będzie liczbą nieparzystą, wtedy nierówność opisująca ten przypadek przekształca się w następujący sposób:

$$4 \leq k < \frac{6}{3 - \frac{4}{l}}.$$

Wyliczamy warunek na  $l$ :

$$6 < \frac{16}{l}.$$

Stąd  $l < 2\frac{4}{6}$ , co jest sprzeczne z założeniem  $l \geq 3$ .

Ad 4. Trzy kąty równej miary, pozostała para o różnych wartościach.

Bez straty ogólności zakładamy, że  $k_1 = k_2 = k_3 = k$ ,  $k_4 = l$ ,  $k_5 = m$ , gdzie  $k \neq l$ ,  $k \neq m$ ,  $m \neq l$  i  $k, l, m \geq 3$ .

Zgodnie z założeniem  $k \geq 3$ , więc nierówność 3.8 przedstawia się następująco:

$$3 < \frac{6}{k} + \frac{2}{l} + \frac{2}{m}.$$

Po pewnych przekształceniach:

$$3 < \frac{6}{3 - \frac{2}{l} - \frac{2}{m}}.$$

Skorzystaliśmy z  $k \geq 3$ , w następnych przekształceniach użyjemy założenia  $l \geq 3$ . Wykluczmy  $l = 3 = k$ , więc założenie przyjmuje, że  $l \geq 4$ .

Po przekształceniach otrzymaliśmy nierówność :

$$4 \leq l < \frac{2}{1 - \frac{2}{m}}.$$

Ponownie musi zostać przekształcone założenie, gdyż  $m \neq l$ ,  $m \neq k$ . Sprawdźmy czy  $m \geq 5$  spełnia tą nierówność:

$$4 - \frac{8}{m} < 2,$$

$$m < \frac{8}{2} = 4.$$

Otrzymaliśmy sprzeczność. Dążąc do największej wartości po prawej stronie nierówności początkowej, wywnioskowaliśmy brak rozwiązań.

Rozpatrywanie przypadków 5, 6 oraz 7 nie jest konieczne, gdyż prawa strona nierówności 3.8 będzie zawsze mniejsza od osiąganey wartości w przypadku 4. Uzyskana sprzeczność informuje nas o braku rozwiązań w innych możliwościach na piątki prezentujące typ kątowny pięciokąta sferycznego.

### Podsumowanie

W przypadku pięciokątów otrzymaliśmy jedną możliwość typu kątownego odbiciowej płytki (3, 3, 3, 3, 3).

## 3.4 Ograniczenia na odbiciowe n-kąty sferyczne, gdzie $n \geq 6$

Sześciokąty sferyczne są reprezentowane przez szóstkę  $(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6)$ . Nierówność przedstawiająca zależność sumy kątów :

$$4\pi < \frac{2\pi}{k_1} + \frac{2\pi}{k_2} + \frac{2\pi}{k_3} + \frac{2\pi}{k_4} + \frac{2\pi}{k_5} + \frac{2\pi}{k_6}.$$

Po przekształceniach:

$$2 < \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \frac{1}{k_4} + \frac{1}{k_5} + \frac{1}{k_6}.$$

Największą wartość prawej strony tej nierówności otrzymamy, gdy wszystkie  $k_i$  będą równe 3.

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 6 \cdot \frac{1}{3} = 2.$$

**Obserwacja 3.8.** *Otrzymane równanie pokazuje nam, że nierówność nie zachodzi dla żadnej szóstki liczb, a zatem nie ma odbiciowych sześciokątów sferycznych.*

*Analogicznie można wykazać, że  $n$ -kąty, gdzie  $n \geq 7$ , nie będą parkietować sfery odbiciowo, co pozostawiamy czytelnikowi.*

### 3.5 Jednoznaczność kształtu potencjalnych płytek odbiciowych parkietaży

W tym podrozdziale zajmiemy się pokazaniem, że potencjalny odbiciowy  $n$ -kąć sferyczny parkietuje sferę w jedyny sposób. Przyda nam się do tego kilka faktów, obserwacji oraz innych informacji.

Wielokąty o danym rozmieszczeniu kątów mogą mieć różne kształty. Jednak jeśli taki wielokąt ma być klepką odbiciowego parkietażu, to okazuje się, że jego kształt jednoznacznie zależy od kątów.

Przytoczymy kilka faktów pomocniczych, dzięki którym będzie można uzasadnić jednoznaczność kształtów.

**Fakt 3.9.** *Jeżeli trójkąt sferyczny ma ustalone kąty to wtedy ma on jednoznaczny kształt. [2]*

Jest to znana w geometrii sferycznej cecha przystawiania trójkątów kąt-kąt-kąt.

**Fakt 3.10.** *Jeżeli czworokąt sferyczny ma wyznaczone kąty i ustalona przekątna jest jego osią symetrii dzieląc go na dwa jednakowe trójkąty sferyczne, wtedy kształt tego czworokąta jest jednoznaczny.*

**Dowód Faktu 3.10.**

Trójkąty na które przekątna dzieli ten czworokąt mają wspólne kąty, więc na podstawie Faktu 3.9 ich kształty są jednoznaczne. Zatem również kształt całego czworokąta złożonego z tych dwóch trójkątów będzie jednoznaczny.

**Fakt 3.11.** *Jeżeli pięciokąt sferyczny o wszystkich kątach równych  $120^\circ$  można podzielić na przystające trójkąty wtedy jego kształt jest jednoznaczny.*

Dowód Faktu 3.11 jest analogiczny do dowodu Fakt 3.9, dlatego można go pominąć.

**Fakt 3.12.** *Jeżeli jednym z kątów odbiciowego pięciokąta sferycznego jest kąt o mierze  $\frac{2\pi}{3}$  wtedy boki będące ramionami tego kąta są równej miary.*

**Dowód Faktu 3.12.**

Załóżmy, że jeden kąt w odbiciowym pięciokącie sferycznym jest równy  $\frac{2\pi}{3}$ . Na podstawie Obserwacji 3.4 wiemy, że kąty w odbiciowym pięciokącie sferycznym są postaci  $\frac{2\pi}{k_i}$ , gdzie  $k_i$  jest liczbą naturalną większą od 2 opisującą liczbę płytek spotykających się w wierzchołku tego kąta. W związku z tym i w oparciu o Fakt 3.1, wiemy, że zachodzi symetria względem dwusiecznej tego kąta. Na podstawie powyższych informacji możemy wywnioskować, że boki będące ramionami tego kąta są równej miary.

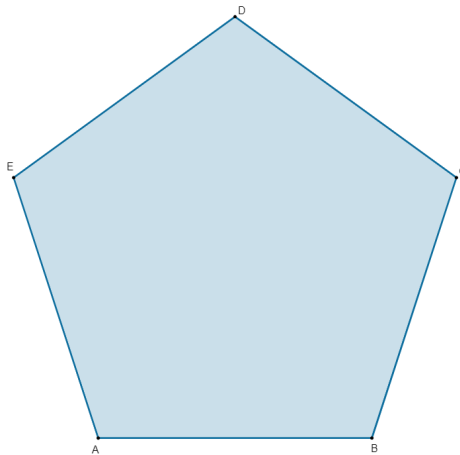
■

**Fakt 3.13.** Niech pięciokąt  $\Delta$  będzie odbiciowym pięciokątem sferycznym, którego wszystkie kąty są miary  $\frac{2\pi}{3}$ , wtedy wielokąt ten jest wielokątem foremnym.

**Dowód Faktu 3.13.**

Możemy powołać się na Fakt 3.12. W związku z nim możemy powiedzieć, że przy każdym wierzchołku odbiciowego pięciokąta sferycznego o wszystkich kątach miary  $\frac{2\pi}{3}$  boki będą równej długości. W oparciu o Rysunek 3.3, rozważmy kąt  $\angle ABC = \frac{2\pi}{3}$ , wtedy  $AB$  jest równy bokowi  $BC$ . Jeżeli przejdziemy teraz do kąta  $\angle BCD$ , wiemy na podstawie Faktu 3.12, że  $BC = CD$ . Kontynuując rozważanie dojdziemy do konkluzji, że wszystkie boki są równej długości.

■



Rysunek 3.3

**Fakt 3.14.** W foremnym pięciokącie sferycznym, będącym płytką parkietazu odbiciowego, dwusieczne kątów postaci  $\frac{2\pi}{3}$  przecinają się one w jednym punkcie.

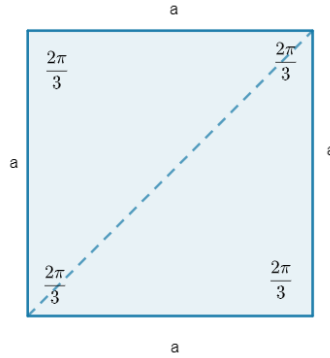
**Dowód Faktu 3.14.**

Zarówno kąty i boki są jednakowej długości, więc jest to wielokąt foremny. własność przecinania się dwusiecznych w jednym punkcie jest bardzo dobrze znaną własnością wielokątów sferycznych.

Dowód jednoznaczności kształtu odbiciowych płytek o zadanym typie kątowym rozpoczniemy od potencjalnych odbiciowych czworokątów sferycznych.

1.  $(3, 3, 3, 3)$

Na podstawie Faktu 3.1, potencjalny czworokąt sferyczny o typie kątowym  $(3, 3, 3, 3)$  możemy podzielić na dwa trójkąty przystające. Niezależnie który kąt wybierzemy, możemy z niego poprowadzić dwusieczną, która będzie osią symetrii tego czworokąta.

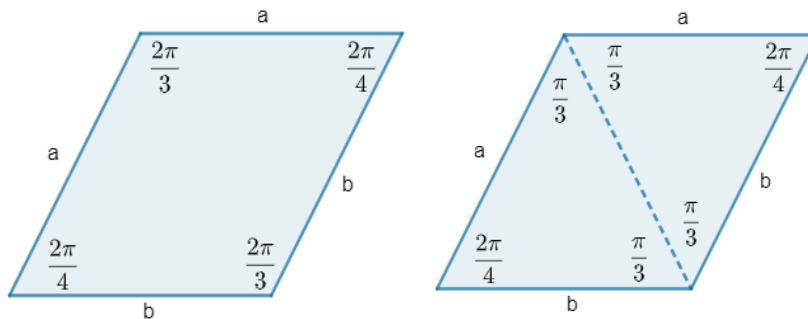


Rysunek 3.4

Powstały dwa trójkąty o kątach miary  $\{\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\}$ . Na podstawie Faktu 3.9, trójkąty te mają jednoznaczny kształt. Korzystając z kolei z Faktu 3.10, potencjalny czworokąt odbiciowy o tym typie kątowym będzie miał jednoznaczny kształt.

2. (3, 4, 3, 4)

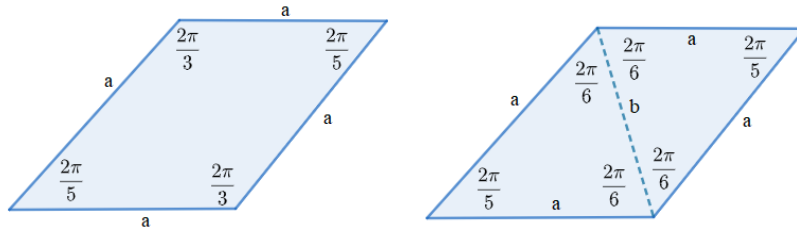
Potencjalny czworokąt sferyczny dzielimy, zgodnie z Faktem 3.1, na trójkąty przystające o kątach miary :  $\{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\}$ . Sytuację przedstawia Rysunek 3.5. Mają one wspólny bok, ten który łączy wierzchołki o kątach  $\frac{2\pi}{3}$ . W związku z tym są one przystające, zaś korzystając z Faktu 3.9 ich kształt jest jednoznaczny. Na podstawie Faktu 3.10 możemy stwierdzić, że kształt potencjalnego odbiciowego czworokąta o typie kątowym (3, 4, 3, 4) będzie jednoznaczny.



Rysunek 3.5

3. (3, 5, 3, 5)

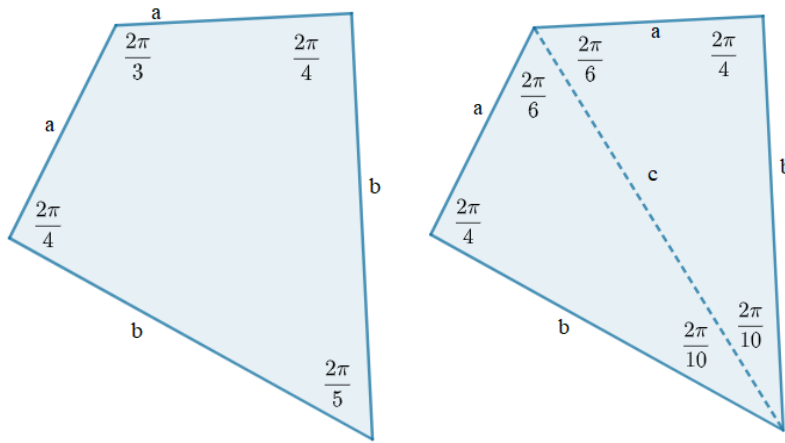
Bazując na Fakcie 3.1 możemy dokonać podziału tego potencjalnego czworokąta sferycznego wzdłuż dwusiecznej kąta o mierze  $\frac{2\pi}{3}$ , co zostało przedstawione na Rysunku 3.6. W związku z tym otrzymujemy symetrię i podział na dwa przystające trójkąty sferyczne o kątach  $\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{3}\}$  oraz o jednoznacznym kształcie na podstawie Faktu 3.9. Korzystając z Faktu 3.10 możemy stwierdzić, że potencjalny czworokąt sferyczny o tak zadanym typie kątowym ma jednoznaczny kształt.



Rysunek 3.6

4. (3, 4, 5, 4)

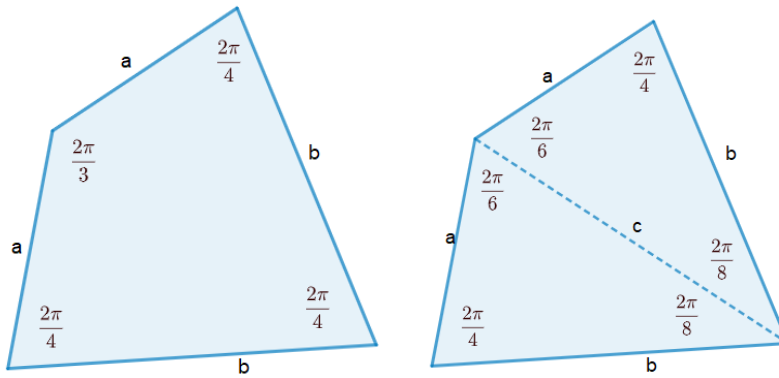
Potencjalny czworokąt sferyczny można podzielić, z Faktu 3.1, na dwa przystające trójkąty (4, 6, 10) względem dwusiecznej kąta  $\frac{2\pi}{3}$ , co zostało pokazane na Rysunku 3.7. Wiemy również, że kształt tych trójkątów sferycznych jest jednoznaczny bazując na Fakcie 3.9. Możemy więc stwierdzić, że kształt tego potencjalnego czworokąta sferycznego jest jednoznaczny na podstawie Faktu 3.10.



Rysunek 3.7

5. (3, 4, 4, 4)

Ponownie można uzyskać dwa przystające trójkąty sferyczne z podziału potencjalnego czworokąta sferycznego wzdłuż dwusiecznej kąta będącego nieparzystym podziałem kąta pełnego. Jak w poprzednim przypadku skorzystaliśmy z Faktu 3.1 i otrzymaliśmy dwa trójkąty przystające o jednoznacznym kształcie z Faktu 3.9. Skorzystajmy z Faktu 3.10 i stwierdźmy, że kształt potencjalnego czworokąta sferycznego jest jednoznaczny.

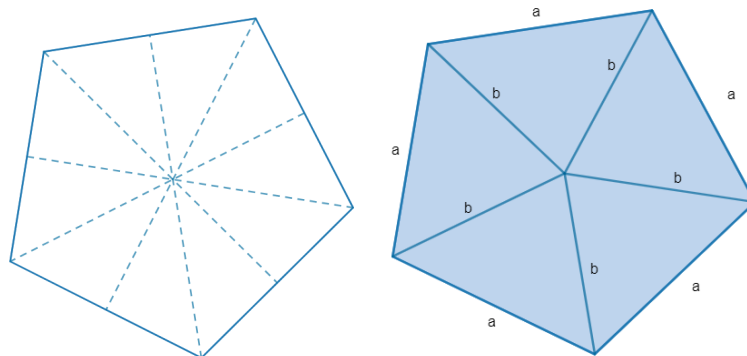


Rysunek 3.8

6.  $(3, 3, 3, 3, 3)$

Rozpocznijmy od podziału pięciokąta o typie kątowym  $(3, 3, 3, 3, 3)$  na trójkąty.

Z każdego wierzchołka poprowadzona zostanie dwusieczna kąta, na podstawie Faktu 3.14 przecinają się one w jednym punkcie. Uzyskaliśmy pięć trójkątów, które z Faktu 3.13 są trójkątami o dwóch kątach miary  $60^\circ$  oraz jednym o mierze  $72^\circ$ . Mają one jednoznaczny kształt na podstawie Faktu 3.9. Zaś korzystając z Faktu 3.11, możemy stwierdzić, że ten pięciokąt będzie miał jednoznaczny kształt.



Rysunek 3.9

### 3.6 Konstrukcja odbiciowych parkietaży sferycznych

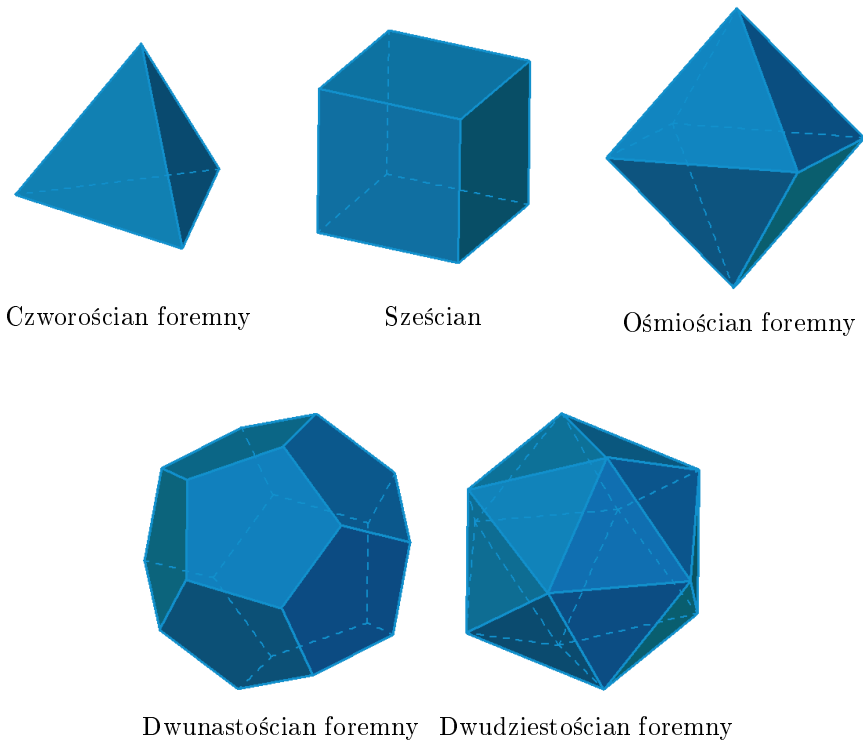
Odpowiedzmy sobie na pytania:

Czy odbiciowe parkietaże na sferze o takich n-kątach istnieją?

**Bryły platońskie.**

Bryły platońskie to bryły, których ścianami są przystające wielokąty foremne tego samego rodzaju oraz ich naroża są jednakowymi kątami bryłowymi. Mamy pięć brył platońskich, które ukazane są na Rysunku 3.11.





Rysunek 3.11

Podczas późniejszych rozważań przydatne będą dwa fakty:

**Fakt 3.15.** *Na każdej z brył platońskich można opisać sferę.*

**Fakt 3.16.** *Każde z naroży bryły platońskiej powstaje ze złączenia takiej samej liczby ścian oraz krawędzi.*

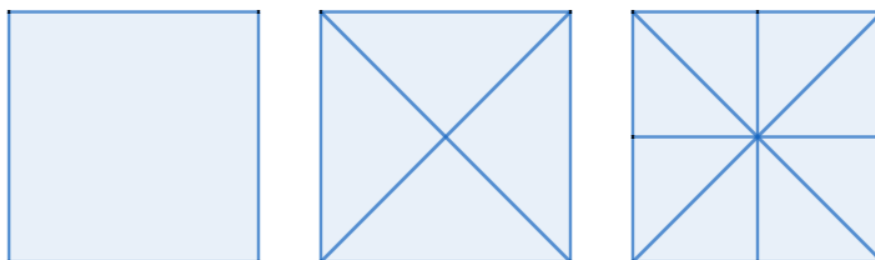
Jedną z możliwości weryfikacji odpowiedzi na pytanie zadane na początku podrozdziału, jest przeprowadzenie rzutów odśrodkowych brył platońskich na sferę opisaną na tej bryle.

**Definicja 3.17.** **Rzutem odśrodkowym bryły na sferę opisaną na tej bryle** nazywamy przekształcenie polegające na „wypchnięciu” od środka bryły jej ścian na powierzchnię tej sfery. Dokładniej, dla każdego punktu  $X$  na brzegu bryły, jego obrazem jest taki punkt  $X'$  na sferze opisanaj, który leży na przecięciu tej sfery z półprostą  $OX$ , gdzie  $O$  jest wspólnym środkiem bryły i sfery na niej opisanaj. Produktem tego przekształcenia jest sfera opisanaj na bryle, która jest podzielona na kawałki odpowiadające poszczególnym ścianom bryły. [2]

Zabieg opisany powyżej pozwoli uzyskać parkietaż sferyczny - zależy nam aby było to podzielenie na pewną liczbę przystających trójkątów, czworokątów lub pięciokątów. Aby to uzyskać, potrzebujemy podzielić ściany brył platońskich na trzy różne sposoby:

1. Bez podziału - rzut odśrodkowy bryły platońskiej, której ściany są czworokątami lub pięciokątami;
2. Podział I typu - podział ściany bryły platońskiej na trójkąty od środka ścian do ich wierzchołków, a następnie zrzutowanie odśrodkowo na sferę i uzyskanie w ten sposób czworokątów lub pięciokątów sferycznych;

3. Podział II typu - podział ścian bryły platońskiej tak jak w podziale I typu, następnie od środka ściany do środków boków ścian i bryłę z tak podzielonymi ścianami rzutujemy na sferę odśrodkowo.

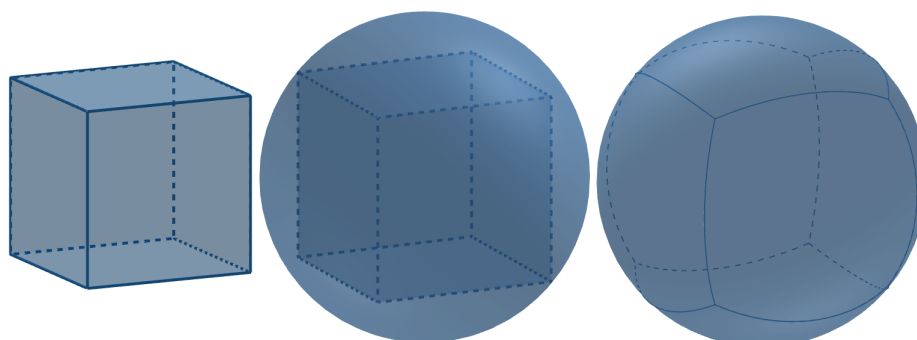


Rysunek 3.12: Kwadrat bez podziału, podział I typu, podział II typu

Na początek zajmijmy się bryłami platońskimi o czworokątnych lub pięciokątnych ścianach - sześciu i dwunastościan foremny.

#### **Sześciu rutowany odśrodkowo na opisaną na nim sferę.**

Wykonamy rzut odśrodkowy ścian bryły na sferę i przyjrzymy się śladom zostawionym przez jego krawędzi.



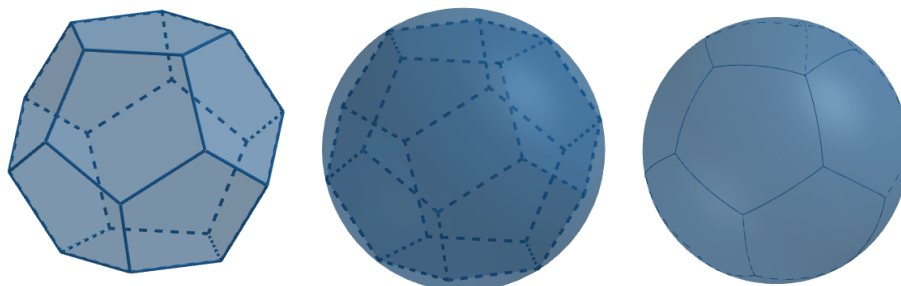
Rysunek 3.13: Sześciu, bryła wpisana w sferę, zobrazowanie rzutu odśrodkowego

Uzyskaliśmy podział sfery na połączone ze sobą płytki, które są symetryczne względem okręgu wielkiego przechodzącego przez wspólny bok. Z Fakt 3.16 i Fakt 3.6 wiemy, że są to przystające czworokąty foremne. W jednym narożu spotykają się trzy kafelki, także kąty tych wielokątów przyjmują miarę  $120^\circ$ . Zatem jest to parkietaż odbiciowy sfery płytkami czworokątnymi reprezentowanymi przez czwórkę  $(3, 3, 3, 3)$ .

Otrzymany parkietaż czworokątem o typie kątowym  $(3, 3, 3, 3)$  jest jedyny, co wynika z uzasadnionej w Podrozdziale 3.5 jednoznaczności kształtu płytki.

#### **Dwunastościan foremny rutowany odśrodkowo na opisaną na nim sferę.**

Podobnie jak poprzednio wykonujemy trzy rysunki - bryły, sfery z wpisaną bryłą oraz obrazu rzutu odśrodkowego bryły na opisaną na niej sferę. W dwunastościanie foremnym ścianami są pięciokąty foremne, przez ten sam argument co w przypadku sześcianu, możemy domyślać się, że uzyskamy parkietaż odbiciowy sfery pięciokątami reprezentowanymi przez piątkę  $(3, 3, 3, 3, 3)$ . Jest to jedyny przypadek jaki uzyskaliśmy podczas klasyfikacji tych wielokątów.



Rysunek 3.14: Dwunastościan foremny, bryła wpisana w sferę, zobrazowanie rzutu odśrodkowego

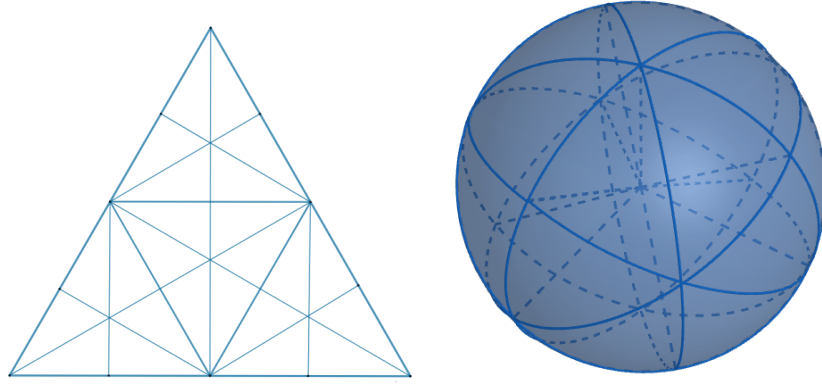
W każdym z naroży dwunastościanu foremnego spotykają się trzy ściany, oddzielone od siebie trzema krawędziami. Poprzez rzut odśrodkowy ścian bryły na sferę opisaną na niej zauważamy, że otrzymane zostało dwanaście pięciokątów foremnych. Każdy obszar na sferze wokół każdego z wierzchołków jest podzielony lokalnie na trzy części, stąd kąty w pięciokątach wynoszą  $\frac{2\pi}{3}$ . Skonstruowany został w ten sposób parkietaż, który podejrzewaliśmy uzyskać, a mianowicie parkietaż pięciokątami reprezentowanymi przez piątki  $(3, 3, 3, 3, 3)$ .

Pozostałe bryły platońskie posiadają trójkątne ściany, nie uzyskamy z nich parkietaży bez wprowadzenia podziału ścian I typu lub II typu.

W powyższych rozważaniach uzyskaliśmy parkietaże odbiciowe za pomocą klepek mających typy kątowe  $(3, 3, 3, 3)$  oraz  $(3, 3, 3, 3, 3)$ .

Zastanówmy się czy pozostałe czworokąty opisane w Podrozdziałach 3.2 oraz 3.5 parkietują sferę.

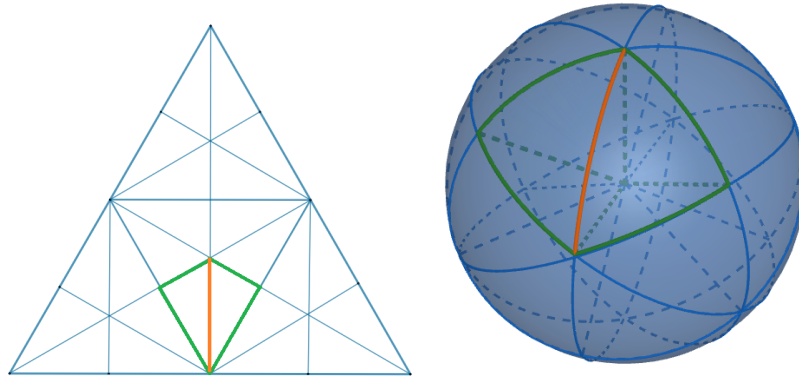
1.  $(3, 4, 3, 4)$



Rysunek 3.15

Płytką będącą trójkątem reprezentowanym przez trójkę  $(6, 6, 4)$  parkietuje odbiciowo sferę w jedyny sposób pokazany wyżej, zaś kafelek złożony z dwóch takich trójkątów to czworokąt o typie kątowym  $(3, 4, 3, 4)$ .

Na rysunkach został przedstawiony przykład czworokąta sferycznego. Pomarańczowym kolorem oznaczony został odcinek, wzdłuż którego łączymy trójkąty, zaś kolorem zielonym czworokąt, który chcieliśmy uzyskać.

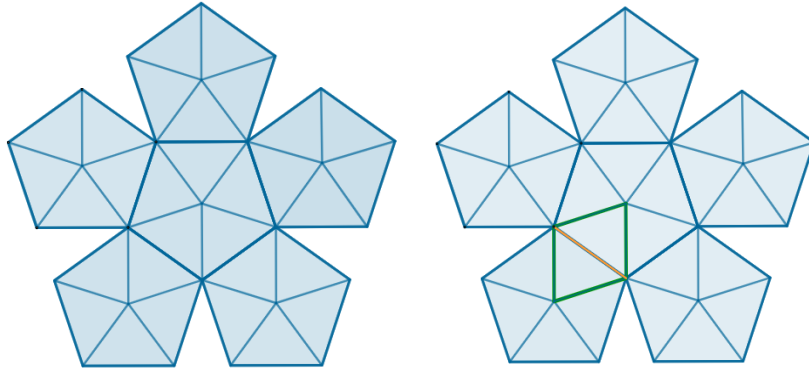


Rysunek 3.16

## 2. $(3, 5, 3, 5)$

Trójkąt uzyskany z podziału możemy znaleźć na siatce dwunastościanu foremnego, który został podzielony podziałem I typu. Wynika to stąd iż wokół jednego wierzchołka będącego środkiem ściany spotyka się pięć kafelek, także kąt w trójkącie przy tym wierzchołku to  $\frac{2\pi}{5}$ , zaś przy wierzchołkach ściany mamy wierzchołek dla sześciu płytek, czyli pozostałe dwa kąty tego trójkąta to  $\frac{2\pi}{6}$ .

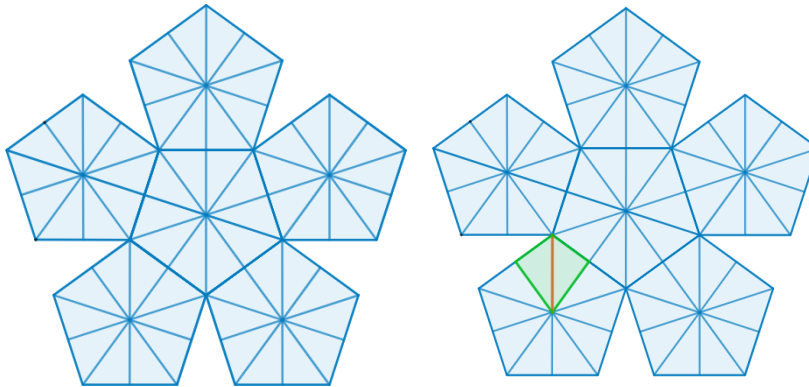
Płytkę czworokątną o typie kątowym  $(3, 5, 3, 5)$  osiągamy poprzez połączenie dwóch z wyżej wymienionych trójkątnych kafelek. Przykład jednej z nich został zaznaczony zielonym kolorem na połowie siatki dwunastościanu foremnego, pomarańczowym odcinkiem została zaznaczona krawędź, wzdłuż której następuje połączenie.



Rysunek 3.17

### 3. (3, 4, 5, 4)

Ponownie mamy do czynienia z dwunastościanem foremnym, tym razem zostanie on podzielony podziałem II typu. Wyżej pokazany trójkąt parkietuje odbiciowo sferę w związku z rzutem odśrodkowym, tak podzielonego dwunastościanu foremnego.

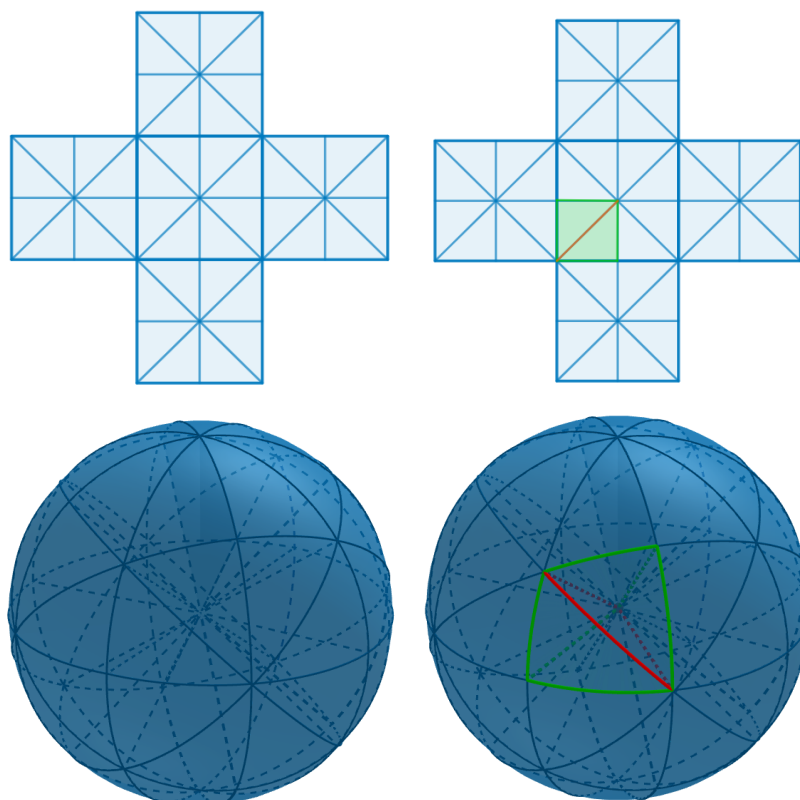


Rysunek 3.18

Płytką trójkątną parkietuje w jedyny sposób sferę, stąd oraz z faktu 3.10, kafelka będąca czworokątem sferycznym o typie kątowym (3, 4, 5, 4), stworzona z dwóch połączonych jak na rysunku trójkątów, również parkietuje odbiciowo sferę i jest to jedyny taki parkietaż.

### 4. (3, 4, 4, 4)

Trójkąt z podziału czworokąta sferycznego jest płytką parkietażu odbiciowego sfery powstałego przez rzut odśrodkowy sześcianu, którego ściany zostały podzielone według podziału II typu. Korzystając z tego, że dwie takie płytki tworzą nasz czworokąt oraz z faktu 3.10, otrzymaliśmy jedyny parkietaż czworokątem sferycznym o typie kątowym (3, 4, 4, 4)



Rysunek 3.19

### 3.7 Klasyfikacja odbiciowych parkietaży sfery $n$ -kątami, $n > 3$

W poprzednich podrozdziałach próbowaliśmy zebrać możliwe  $n$ -kąty parkietujące odbiciowo sferę, zaś w tym podsumujemy ich wyniki. Zaczniemy od zapisania jeszcze raz potencjalnych typów kątowych  $(k_1, k_2, \dots, k_n)$  przedstawiających odbiciowe  $n$ -kąty sferyczne.

**Czworokąty:**

1.  $(3, 3, 3, 3)$
2.  $(3, 4, 3, 4)$
3.  $(3, 5, 3, 5)$
4.  $(3, 4, 5, 4)$
5.  $(3, 4, 4, 4)$

**Pięciokąty:**

1.  $(3, 3, 3, 3, 3)$

Teraz przejdźmy do podsumowania poprzedniego podrozdziału. Aby potwierdzić, że każda z wyżej wymienionych czwórek oraz piątki typu kątowego są reprezentantami odbiciowych  $n$ -kątów sferycznych, zapiszemy  $(k - 1, k_2, \dots, k_n)$  wraz z metodą konstrukcji ich odbiciowego parkietażu sfery.

1.  $(3, 3, 3, 3)$  - rzutowanie odśrodkowe sześciangu bez podziału;

2.  $(3, 4, 3, 4)$  - rzutowanie odśrodkowe czworościanu foremego z podziałem II typu;
3.  $(3, 5, 3, 5)$  - rzutowanie odśrodkowe dwunastościanu foremego z podziałem I typu;
4.  $(3, 4, 5, 4)$  - rzutowanie odśrodkowe dwunastościanu foremego z podziałem II typu;
5.  $(3, 4, 4, 4)$  - rzutowanie odśrodkowe sześciianu z podziałem II typu;
6.  $(3, 3, 3, 3, 3)$  - rzutowanie odśrodkowe dwunastościanu foremego bez podziału.

Podsumowując, wszystkie potencjalne  $n$ -kąty sferyczne parkietują odbiciowo sferę. W związku z tym powstało twierdzenie:

**Twierdzenie 3.18.** *O odbiciowych  $n$ -kątach sferycznych,  $n \in \{4, 5\}$*

*Odbiciowy parkietaż sferyczny może zostać utworzony z czworokątów i pięciokątów o następujących typach kątowych:*

- |                   |                      |
|-------------------|----------------------|
| 1. $(3, 3, 3, 3)$ | 4. $(3, 4, 5, 4)$    |
| 2. $(3, 4, 3, 4)$ | 5. $(3, 4, 4, 4)$    |
| 3. $(3, 5, 3, 5)$ | 6. $(3, 3, 3, 3, 3)$ |

### 3.8 Odbiciowe trójkąty sferyczne

W tym podrozdziale chcielibyśmy przedstawić klasyfikację typów kątowych odbiciowych trójkątów sferycznych wykonanych przez Paulinę Górską w pracy dyplomowej [2]. Przytoczymy twierdzenie o odbiciowych trójkątach sferycznych:

**Twierdzenie 3.19.** *O odbiciowych trójkątach sferycznych*

*Poniżej znajduje się kompletna lista typów kątowych odbiciowych trójkątów sferycznych, dla których można utworzyć odbiciowy parkietaż sferyczny:*

- |                               |                   |
|-------------------------------|-------------------|
| a) $(3, 3, 3)$ ;              | g) $(4, 6, 6)$ ;  |
| b) $(3, 4, 4)$ ;              | h) $(4, 6, 8)$ ;  |
| c) $(3, 6, 6)$ ;              | i) $(4, 6, 10)$ ; |
| d) $(3, 8, 8)$ ;              | j) $(5, 5, 5)$ ;  |
| e) $(3, 10, 10)$ ;            | k) $(5, 6, 6)$ .  |
| f) $(4, 4, n)$ , $n \geq 4$ ; |                   |

## 4 Parkietaże odbiciowe przestrzeni ostrosłupami

W poprzednim rozdziale wyznaczyliśmy wszystkie odbiciowe wielokąty sferyczne o liczbie krawędzi większej od trzech będące płytkami odbiciowych parkietaży sfery i pokazaliśmy odbiciowe parkietaże sfery tymi wielokątami. Przy użyciu tych informacji sklasyfikujemy ostrosłupy euklidesowe, różne od czworościanów, które parkietują odbiciowo przestrzeń.

## 4.1 Uwagi wstępne

Zacznijmy od następującej obserwacji, która jest na tyle jasna, że jej uzasadnienie pomijamy.

**Obserwacja 4.1.** *Jeśli  $\Omega$  jest dowolnym odbiciowym parkietazem przestrzeni, zaś  $A$  jest wierzchołkiem klepki  $P$  tego parkietazu, to przekrój małej sfery wokół  $A$  z klepkami parkietazu  $\Omega$  tworzy na tej sferze odbiciowy parkietaz sferyczny, który oznaczymy przez  $\Omega^S$ . Jeśli klepka  $P$  ma w wierzchołku  $A$  kąt bryłowy  $n$ -ścienny, to płytkami parkietazu  $\Omega^S$  są  $n$ -kąty sferyczne.*

**Wniosek 4.2.** Ostrosłupy  $n$ -kątnie dla  $n \geq 6$  nie mogą być klepkami parkietazu odbiciowego przestrzeni.

**Dowód Wniosku 4.2.**

Na podstawie Obserwacji 3.8 nie istnieją  $n$ -kąty sferyczne, gdzie  $n \geq 6$ , które parkietują sferę. W związku z tym oraz z Obserwacją 4.1 nie mogą istnieć odbiciowe ostrosłupy  $n$ -kątnie dla  $n \geq 6$ , ponieważ ostrosłup taki posiada w swoim wierzchołku  $n$ -ścienny kąt bryłowy. ■

**Lemat 4.3.** *Zbiór liczb opisujących kąty dwuścienne przy wierzchołku  $A$   $n$ -ściennego naroża klepki parkietazu odbiciowego przestrzeni, musi być jednym z typów kątowych odbiciowych  $n$ -kątowni sferycznych.*

**Dowód lematu 4.3**

Wielokąt sferyczny  $W$ , jaki powstaje w przekroju małej sfery o środku  $A$  z  $n$ -ściennym narożem, ma kąty o mierze takiej samej jak miary kątów dwuściennych w tym  $n$ -ściennym narożu. Ponieważ na podstawie Obserwacji 4.1 wielokąt  $W$  jest odbiciowym wielokątem sferycznym, otrzymujemy tezę Lematu 4.3. ■

Dowód lematu 4.3 dla wierzchołków w narożu pięciociennym przebiega analogicznie, więc pozostawiamy go czytelnikowi.

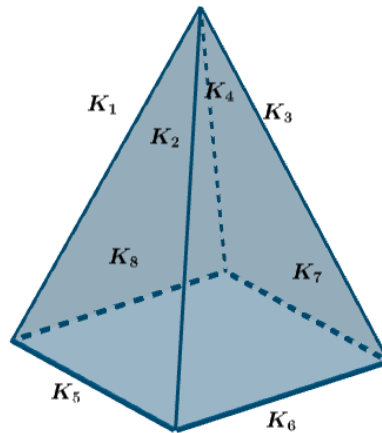
Wnioskując bezpośrednio z powyższych lematów, korzystając z typów kątowych ustalonych dla odbiciowych trójkątów, czworokątów i pięciokątów sferycznych możemy wyznaczyć potencjalne rozmieszczenie kątów dwuściennych w odbiciowych ostrosłupach euklidesowych o podstawie czworokąta i pięciokąta. Następnie sprawdzimy czy ostrosłupy o takich rozmieszczeniach kątów dwuściennych jesteśmy w stanie skonstruować.

## 4.2 Ograniczenia na typy kątowe ostrosłupów odbiciowych o podstawie czworokąta

W tym podrozdziale znajdziemy typy kątowe ostrosłupów odbiciowych o podstawie czworokąta za pomocą jego naroży oraz uzyskanych w Rozdziale 3 wielokątów sferycznych. Płytki parkietazu odbiciowego, które są ostrosłupami euklidesowymi o podstawie czworokąta lub pięciokąta, będą miały kąty dwuścienne postaci  $\frac{2\pi}{K_i}$ , gdzie  $K_i \geq 3$  dla  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $n \in \{8, 10\}$ .



**Definicja 4.4.** Ósemkę parametrów  $K_i$ , gdzie  $i \in \{1, 2, \dots, 8\}$  w kolejności takiej jak na Rysunku 4.1 będziemy nazywać **typem kątowym ostrosłupa czworokątnego**.



Rysunek 4.1: Odbiciowy ostrosłup euklidesowy o podstawie czworokąta wraz z parametrami  $K_i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, 8\}$  przypisanymi do krawędzi.

W powyższym ostrosłupie możemy zauważyć pięć naroży składających się z krawędzi opisanych przez liczby:

1.  $K_1, K_2, K_3, K_4$ ,
2.  $K_1, K_5, K_8$ ,
3.  $K_2, K_5, K_6$ ,
4.  $K_3, K_6, K_7$ ,
5.  $K_4, K_7, K_8$ .

Wśród wymienionych powyżej trójek oraz czwórek, na podstawie Lematu 4.3, otrzymaliśmy typy kątoe odbiciowych trójkątów sferycznych oraz odbiciowych czworokątów sferycznych. Przypomnijmy listę czwórek oraz trójek z typów kątoe odbiciowych trójkątów i czworokątów sferycznych, które zostały opisane w poprzednim rozdziale.

<i>Lp.</i>	Typ kątowny trójkąta sferycznego
1.	(3, 3, 3)
2.	(3, 4, 4)
3.	(3, 6, 6)
4.	(3, 8, 8)
5.	(3, 10, 10)
6.	(4, 4, $n$ ), $n \geq 4$
7.	(4, 6, 6)
8.	(4, 6, 8)
9.	(4, 6, 10)
10.	(5, 5, 5)
11.	(5, 6, 6)

Tabela 4.1: Tabela zawierająca typy kątowne odbiciowych trójkątów sferycznych.

<i>Lp.</i>	Typ kątowny czworokąta sferycznego
1.	(3, 3, 3, 3)
2.	(3, 4, 3, 4)
3.	(3, 5, 3, 5)
4.	(3, 4, 5, 4)
5.	(3, 4, 4, 4)

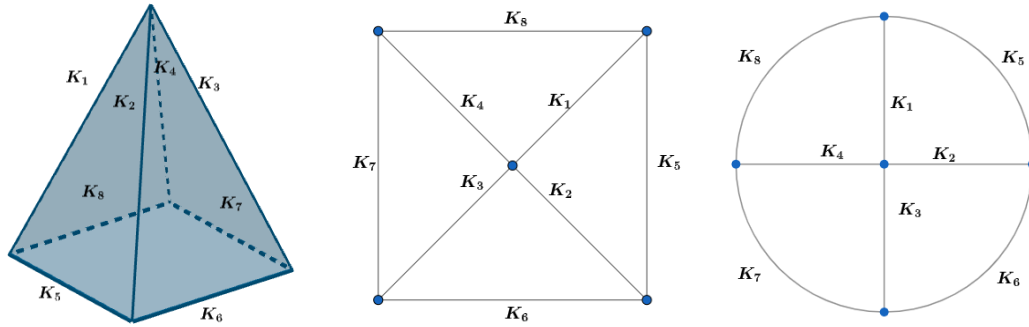
Tabela 4.2: Tabela zawierająca typy kątowne odbiciowych czworokątów sferycznych.

W następnych rozważaniach będziemy szukali typów kątownych potencjalnych odbiciowych ostrosłupów czworokątnych.

Dla usprawnienia poszukiwań musimy przedstawić w inny sposób dane zawarte w Rysunku 4.1 w następujący sposób:

1. Rysujemy okrąg i cztery jego promienie, tak aby podzielić go na równe części;
2. Powstałe łuki reprezentują krawędzie podstawy, zaś promienie to krawędzie boczne ostrosłupa;
3. Punkty styku promieni z okręgiem przedstawiają wierzchołki podstawy zaś środek okręgu to wierzchołek ostrosłupa;
4. Każdej krawędzi przypisujemy odpowiednie, reprezentujące je  $K_i$ ;
5. W środku okręgu przyjmujemy, że znajduje się naroże z krawędziami  $K_1, K_2, K_3, K_4$ .

Sytuacja ta jest przedstawiona na Rysunku 4.2.

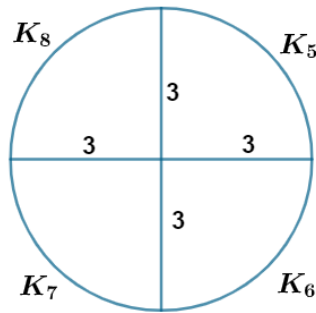


Rysunek 4.2: Ostrosłup euklidesowy wraz z oznaczonymi krawędziami oraz jego widok z góry. Trzeci rysunek obrazuje schemat ostrosłupa powstały przez wykonanie powyższych kroków, gdzie boki zamienione zostają w części okręgu. Na niebiesko zostały oznaczone wierzchołki.

Na początku musimy założyć, że zapis ósemki rozpocznie się od czwórki reprezentującej kąty dwuścienne przy wierzchołku ostrosłupa  $K_1, K_2, K_3, K_4$ . Zaś pozostałe trójki będą wypisywane według kolejności ustalonej na rysunku 4.2. Te pięć kombinacji pokrywa się z typami kątowymi przedstawionymi w Tabli 4.1 oraz Tabeli 4.2. W związku z Lematem 4.3 wszystkie wymienione  $K_i$  będą pochodziły z wymienionych na początku podrozdziału list typów kątowych trójkątów i czworokątów sferycznych (Tabele 4.1 i 4.2).

Rozpocznijmy wyznaczanie potencjalnych ósemek kątów dwuściennych ostrosłupa euklidesowego o podstawie czworokąta. W każdym z pięciu przypadków rozpoczniemy od ustalenia czwórki kątów przy wierzchołku reprezentowanym przez środek okręgu.

Ad 1. Pierwszym rozważanym przypadkiem będzie ten, gdy  $K_1 = K_2 = K_3 = K_4$  i reprezentują one kąty miary  $120^\circ$ , czyli typ kątowy czworokąta sferycznego  $(3, 3, 3, 3)$ .



Rysunek 4.3

Trójki reprezentujące pozostałe naroża:

- a)  $3, K_5, K_8$ ;
- b)  $3, K_5, K_6$ ;
- c)  $3, K_6, K_7$ ;
- d)  $3, K_7, K_8$ .

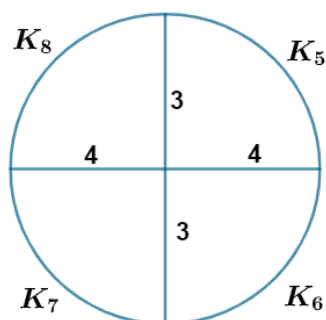
Na podstawie Tabeli 4.1, widzimy, że jeśli w typie kątowym odbiciowego trójkąta sferycznego występuje parametr 3, to pozostałe dwa parametry muszą być równe. Trójki postaci  $(3, k, l)$  to:

$(3, 3, 3)$ ,  $(3, 4, 4)$ ,  $(3, 6, 6)$ ,  $(3, 8, 8)$ ,  $(3, 10, 10)$ . Stąd  $k = l$ .

W związku z powyższym mamy pięć możliwości:

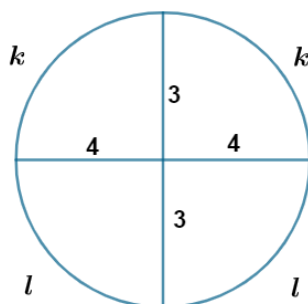
- $(3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3)$ ,
- $(3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4)$ ,
- $(3, 3, 3, 3, 6, 6, 6, 6)$ ,
- $(3, 3, 3, 3, 8, 8, 8, 8)$ ,
- $(3, 3, 3, 3, 10, 10, 10, 10)$ .

Ad 2. Przejdźmy do rozważenia przypadku, gdy typ kątowy to  $(3, 4, 3, 4)$  przy wierzchołku będącym środkiem okręgu.



Rysunek 4.4

Czwórka ta reprezentuje odpowiednio kąty  $120^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 90^\circ$ . Zauważmy, że muszą zachodzić dwie równości  $K_8 = K_5$  oraz  $K_7 = K_6$ , pierwsza z nich będzie równa pewnej liczbie  $k$  zaś druga liczbie  $l$ . Bez straty ogólności zakładamy, że  $k \leq l$ . Możemy tak zrobić, ponieważ analogiczna będzie sytuacja dla  $l \leq k$ , gdy wykonamy symetrię naszego okręgu lub obrót o  $180$  stopni.



Rysunek 4.5

Zapiszmy trójki reprezentujące naroża:

- a)  $(3, k, k)$ ;
- b)  $(4, k, l)$ ;

c)  $(3, l, l)$ ;

d)  $(4, l, k)$ .

Spójrzmy na typy kątowne trójkątów sferycznych 4.1. W związku z a) oraz c) widzimy, że liczby  $k$  oraz  $l$  należą do zbioru liczb  $\{3, 4, 6, 8, 10\}$ . Rozważane przypadki będą ze względu na możliwe wartości parametru  $k$ .

1. Rozpocznijmy więc od założenia, że liczba  $k = 3$ . Wtedy  $l$  może przyjąć wartości  $\{4, 6, 8, 10\}$ . W związku z trójką b) oraz d) wykluczamy przypadki  $l \in \{6, 8, 10\}$ . Pozostaje tylko  $l = 4$ . Stąd uzyskujemy ósemkę  $(3, 4, 3, 4, 3, 4, 4, 3)$ .

2. Zajmijmy się teraz następną liczbą ze zbioru -  $k = 4$ . Wiemy, że  $l \geq k$ , więc  $l \in \{4, 6, 8, 10\}$ . Aby uzyskać możliwości wykluczenia bądź zaakceptowania liczb ze zbioru, musimy sprawdzić jakie trójki wraz z niewiadomą pasują do trójek z listy 4.1. Spójrzmy na b)  $(4, 4, l)$ . Na podstawie Listy typów kątownych trójkąta sferycznego 4.1 widzimy, że  $l$  może być dowolne, większe bądź równe 4. Łączymy tą informację z pierwszym założeniem o liczbie  $l$ . Uzyskujemy, że wszystkie liczby ze zbioru  $\{4, 6, 8, 10\}$  mogą być liczbą  $l$ . Otrzymaliśmy następujące ósemki:

- $(3, 4, 3, 4, 4, 4, 4, 4)$ ;
- $(3, 4, 3, 4, 4, 8, 8, 4)$ ;
- $(3, 4, 3, 4, 4, 6, 6, 4)$ ;
- $(3, 4, 3, 4, 4, 10, 10, 4)$ .

3. Przyjmijmy, że  $k = 6$ . Zakładając to otrzymujemy naroża postaci:

- a)  $(3, 6, 6)$ ;
- b)  $(4, 6, l)$ ;
- c)  $(3, l, l)$ ;
- d)  $(4, l, 6)$ .

Patrząc na podpunkty b) oraz c) możemy wywnioskować, że  $l$  może przyjąć wartość 6, 8 lub 10. Wszystkie możliwości są zgodne z punktem c) z powyższej listy. W związku z tym otrzymaliśmy dwie ósemki:

- $(3, 4, 3, 4, 6, 6, 6, 6)$ ;
- $(3, 4, 3, 4, 6, 10, 10, 6)$ .
- $(3, 4, 3, 4, 6, 8, 8, 6)$ ;

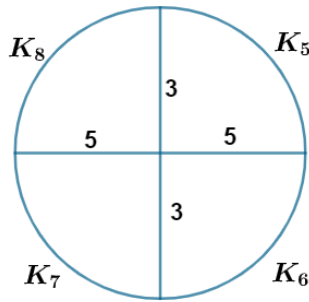
4. Zastanówmy się nad możliwościami, gdy  $k = 8$ . Jediną możliwością na utworzenia naroża reprezentowanego przez  $(4, 8, l)$  jest  $l = 6$ , co jest sprzeczne z założeniem  $k \leq l$  i odpowiadałoby ostrosłupowi o ósemce  $(3, 4, 3, 4, 6, 8, 8, 6)$ , który zostałby poddany obrotowi o  $180^\circ$ .

5. Podobną sytuację otrzymujemy, gdy  $k = 10$ . Otrzymujemy jedynie możliwość  $l = 6$  z naroża  $(4, 10, l)$ . Ósemka powstała w ten sposób odpowiada przedstawieniu ostrosłupa za pomocą  $(3, 4, 3, 4, 6, 10, 10, 6)$  poddanemu obrotowi o  $180^\circ$ .

Powyższymi podprzypadkami zakończyliśmy przypadek, gdzie naroże czworościenne jest reprezentowane przez typ kątowny  $(3, 4, 3, 4)$ . Zbierzmy więc możliwości jakie uzyskaliśmy:

- $(3, 4, 3, 4, 3, 4, 4, 3)$ ;
- $(3, 4, 3, 4, 4, 4, 4, 4)$ ;
- $(3, 4, 3, 4, 4, 6, 6, 4)$ ;
- $(3, 4, 3, 4, 4, 8, 8, 4)$ ;
- $(3, 4, 3, 4, 4, 10, 10, 4)$ ;
- $(3, 4, 3, 4, 6, 6, 6, 6)$ ;
- $(3, 4, 3, 4, 6, 8, 8, 6)$ ;
- $(3, 4, 3, 4, 6, 10, 10, 6)$

Ad 3. Kolejnym możliwym typem kątowym przedstawiającym kąty dwuścienne przy wierzchołku czterościnnym ostrosłupa czworokątnego jest czwórka  $(3, 5, 3, 5)$ .



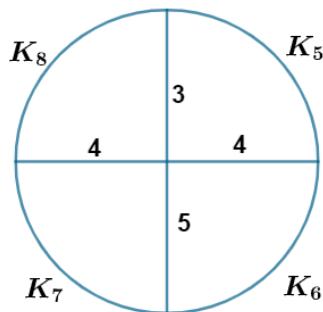
Rysunek 4.6

Zapiszmy pozostałe naroża tego ostrosłupa:

- a)  $(3, K_5, K_8)$ ;
- b)  $(5, K_5, K_6)$ ;
- c)  $(3, K_6, K_7)$ ;
- d)  $(5, K_7, K_8)$ .

W związku z Faktem 4.8  $K_6 = K_7 = k$  oraz  $K_5 = K_8 = l$ , gdzie  $l$  oraz  $k$  to pewne liczby całkowite. Z trójek a) oraz c) wiemy, że  $k, l \in \{3, 4, 6, 8, 10\}$ . Pozostają do rozważenia podpunkty b) oraz d). W oparciu o listę typów kątowych trójkątów sferycznych 4.1 jedyną możliwością w połączeniu z powyższą listą jest  $l = k = 6$ . W takim razie otrzymujemy ósemkę postaci  $(3, 5, 3, 5, 6, 6, 6, 6)$ .

Ad 4. Załóżmy, że kąty dwuścienne przy wierzchołku ostrosłupa czworokątnego są reprezentowane przez następujący typ kątowy  $(3, 4, 5, 4)$  sferycznego czworokąta odbiciowego.



Rysunek 4.7

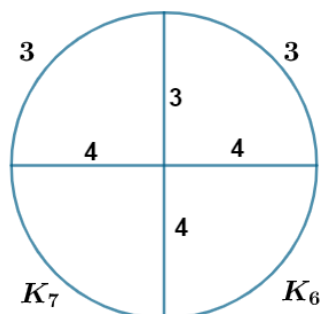


Zauważamy, że w związku z Faktem 4.8 o symetrii w ostrosłupie euklidesowym o podstawie czworokąta liczby  $K_8$  oraz  $K_5$  są równe oraz  $K_6$  ma taką samą wartość jak  $K_7$ . Więc zakładamy, że  $K_8 = K_5 = k$ ,  $K_6 = K_7 = l$ , gdzie  $k \in \{3, 4, 6, 8, 10\}$ , a  $l$  zależy od pozostałych naroży.  $k$  należy do tego zbioru liczb, ponieważ rozważamy  $(K_8, 3, K_5)$ , a jedyne możliwości trójek reprezentujących typy kątowe trójkąta sferycznego zostały wymienione w przykładzie powyżej.

Wtedy pozostałe kąty dwuścienne są w narożach reprezentowanych w następujących trójkach liczb:

- a)  $k, 4, l$ ;
- b)  $l, 4, l$ ;
- c)  $l, 4, k$ .

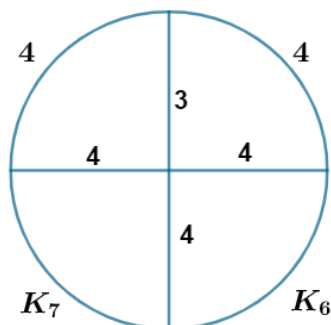
Rozpocznijmy od założenia, że liczba  $k$  przyjmuje wartość 3.



Rysunek 4.10

W związku z rysunkiem oraz powyższym założeniem  $K_6, K_7$  przyjmują wartość równą 4.  $(3, 4, 4)$  to trójka reprezentująca typ kątowy trójkąta sferycznego, gdzie jeden kąt ma miarę  $90^\circ$  zaś drugi  $120^\circ$  i zgadza się on z narożami a) oraz c). Należy sprawdzić jeszcze podpunkt b). Czy trójka  $(4, 4, 4)$  reprezentuje typ kątowy pewnego trójkąta sferycznego? Odpowiedź brzmi tak, ponieważ dokładnie taką trójkę znajdziemy w liście 4.1 w podpunkcie f). W związku z powyższymi rozwiązaniami otrzymaliśmy ośsemkę  $(3, 4, 4, 4, 3, 4, 4, 3)$ .

Następną możliwością na liczbę  $k$  będzie  $k = 4$ .



Rysunek 4.11



Pozostałe naroża reprezentują się następująco:

- a)  $4, 4, K_6$ ;
- b)  $K_6, 4, K_7$ ;
- c)  $K_7, 4, 4$ .

Powyższe naroża generują kilka możliwości. W oparciu o Fakt 4.8, wiemy że  $K_6 = K_7 = l$ . Wśród trójek reprezentujących trójkąty sferyczne mamy :

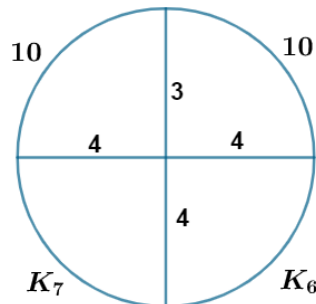
- $l = 4$ ;
- $l = 6$ .

Uzyskaliśmy ósemki  $(3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4)$ ,  $(3, 4, 4, 4, 4, 6, 6, 4)$ .

Kolejną z opcji jest  $k = 6$ . Tutaj uzyskujemy dwie możliwości na pozostałe wartości. Są to naroża  $6, 4, l, 4, 6, l$  i  $l, 4, l$ . Wnioskując z listy trójek reprezentujących typy kątowe trójkątów sferycznych uzyskujemy  $l = 4$  oraz  $l = 6$ . Generuje to ósemki postaci  $(3, 4, 4, 4, 6, 4, 4, 6)$  i  $(3, 4, 4, 4, 6, 6, 6, 6)$ .

Spójrzmy teraz na  $k = 8$ . Jedyne trójki odpowiadające założeniom są  $(4, 4, 8)$ ,  $(4, 6, 8)$ . W takim razie  $l$  przyjmuje wartości 4 lub 6. W związku z tym otrzymaliśmy następujące ósemki reprezentujące ostrosłupy euklidesowe o podstawie czworokąta:  $(3, 4, 4, 4, 8, 4, 4, 8)$ ,  $(3, 4, 4, 4, 8, 6, 6, 8)$ .

Pozostała jedna możliwość, gdy  $k = 10$ . Wnioskujemy ponownie z rysunku.



Rysunek 4.12

Widzimy, że pozostały nam naroża:

- $(10, 4, l)$ ,
- $(l, 4, l)$ ,
- $(l, 4, 10)$ .

Możliwości na powyższe trójki są następujące  $(4, 6, 10)$  oraz  $(4, 4, 10)$ . Kiedy  $l = 4$  otrzymujemy  $(4, 4, 4)$ . Jest to typ kątowy trójkąta sferycznego także możemy przyjąć tą wartość. Drugą możliwością jest  $l = 6$ . Ponownie uzyskujemy prawidłowy typ kątowy  $(4, 6, 6)$ . W związku z rozważaniami mamy ósemki równe  $(3, 4, 4, 4, 10, 4, 4, 10)$  i  $(3, 4, 4, 4, 10, 6, 6, 10)$ .

Podsumujmy przypadek, gdy w środku okręgu mamy typ kątowy  $(3, 4, 4, 4)$ . Ósemki jakie uzyskaliśmy podczas powyższych założeń przedstawiają się następująco:

- (3, 4, 4, 4, 3, 4, 4, 3);
- (3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4);
- (3, 4, 4, 4, 4, 6, 6, 4);
- (3, 4, 4, 4, 6, 4, 4, 6);
- (3, 4, 4, 4, 6, 6, 6, 6);
- (3, 4, 4, 4, 8, 4, 4, 8);
- (3, 4, 4, 4, 8, 6, 6, 8);
- (3, 4, 4, 4, 10, 4, 4, 10);
- (3, 4, 4, 4, 10, 6, 6, 10).

**Podsumowanie:**

Wszystkie możliwości zostaną zapisane w Tabeli 4.3, w której przedstawione  $K_i$  odpowiadają poszczególnym potencjalnym ósemkom kątów dwuściennych.

$K_1$	$K_2$	$K_3$	$K_4$	$K_5$	$K_6$	$K_7$	$K_8$
3	3	3	3	3	3	3	3
3	3	3	3	4	4	4	4
3	3	3	3	6	6	6	6
3	3	3	3	8	8	8	8
3	3	3	3	10	10	10	10
3	4	3	4	3	4	4	3
3	4	3	4	4	4	4	4
3	4	3	4	4	6	6	4
3	4	3	4	4	8	8	4
3	4	3	4	4	10	10	4
3	4	3	4	6	6	6	6
3	4	3	4	6	8	8	6
3	4	3	4	6	10	10	6
3	5	3	5	6	6	6	6
3	4	5	4	4	5	5	4
3	4	5	4	4	6	6	4
3	4	5	4	6	6	6	6
3	4	5	4	8	6	6	8
3	4	5	4	10	6	6	10
3	4	4	4	3	4	4	3
3	4	4	4	4	4	4	4
3	4	4	4	4	6	6	4
3	4	4	4	6	4	4	6
3	4	4	4	6	6	6	6
3	4	4	4	8	4	4	8
3	4	4	4	8	6	6	8
3	4	4	4	10	4	4	10
3	4	4	4	10	6	6	10

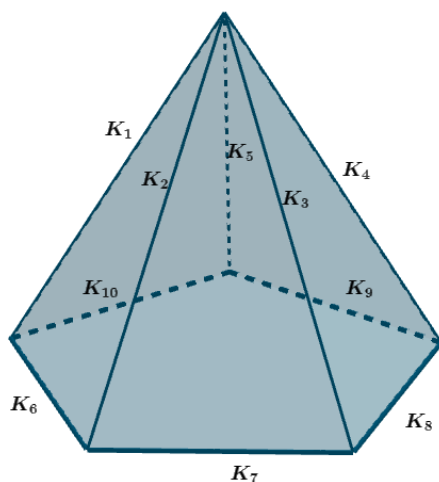
Tabela 4.3

### 4.3 Ograniczenia na typy kątowe ostrosłupów odbiciowych o podstawie pięciokąta

W tym podrozdziale będziemy korzystać z listy typów kątowych trójkątów sferycznych (Tabela 4.1). Przypomnijmy jednak, że jedynym kątowym dla odbiciowego pięciokąta sferycznego jest  $(3, 3, 3, 3, 3)$ .

Przystąpmy więc do wprowadzenia w ostrosłupy o podstawie pięciokąta. Chcemy uzyskać dziesiątkę liczb reprezentującą typy kątowe powyższych brył.

**Definicja 4.5.** Dziesiątkę parametrów  $K_i$ , gdzie  $i \in \{1, 2, \dots, 10\}$  w kolejności takiej jak na Rysunku 4.13 będziemy nazywać **typem kątowym ostrosłupa pięciokątnego**.



Rysunek 4.13: Odbiciowy ostrosłup euklidesowy o podstawie pięciokąta wraz z parametrami  $K_i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, 10\}$  przypisanymi do krawędzi.

Wypiszmy ciągi parametrów występujących przy poszczególnych narożach tego ostrosłupa:

1.  $K_1, K_2, K_3, K_4, K_5$ ;
2.  $K_1, K_{10}, K_6$ ;
3.  $K_2, K_6, K_7$ ;
4.  $K_3, K_7, K_8$ ;
5.  $K_4, K_8, K_9$ ;
6.  $K_5, K_9, K_{10}$ .

Wiemy, że piątka z naroża 1. odpowiadać musi typowi kątowemu pięciokąta sferycznego  $(3, 3, 3, 3, 3)$ . W związku z tym pozostają nam do rozpatrzenia trójki:

- a)  $3, K_{10}, K_6$ ;
- b)  $3, K_6, K_7$ ;
- c)  $3, K_7, K_8$ ;

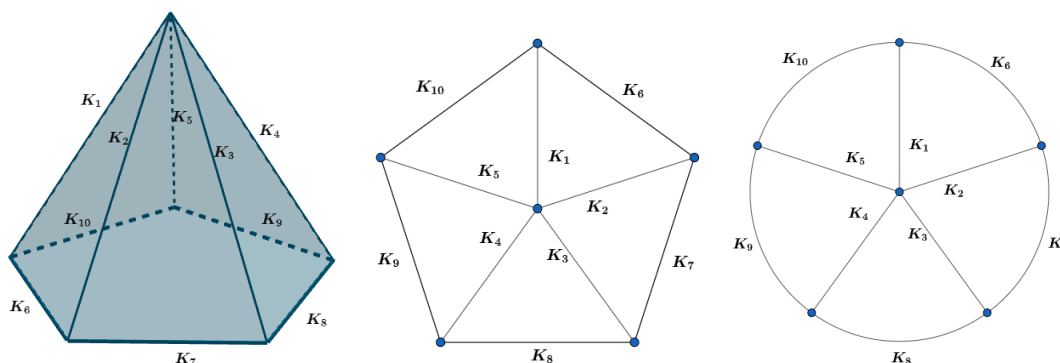
d)  $3, K_8, K_9$ ;

e)  $3, K_9, K_{10}$ .

Powyższe trójki muszą należeć do listy typów kątowych trójkątów sferycznych z Tabeli 4.1. Skupmy się zatem na szukaniu możliwych wartości parametrów  $K_6, K_7, \dots, K_{10}$ , które odpowiadają poszczególnym krawędziom przy podstawie w odbiciwym ostrosłupie pięciokątnym. Dane znajdujące się na Rysunku 4.13 musimy przekształcić w analogiczny sposób jak dla ostrosłupa czworokątnego:

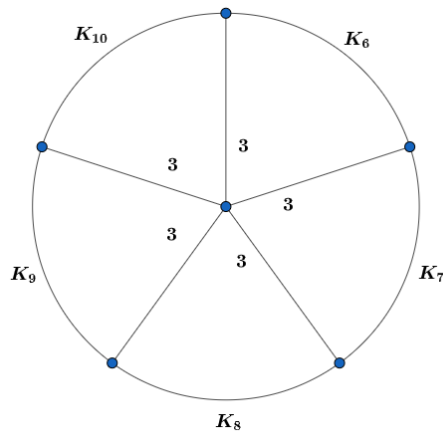
1. Rysujemy okrąg i pięć jego promieni, dzieląc go na równe kawałki;
2. Powstałe łuki reprezentują krawędzie podstawy, zaś promienie to krawędzie boczne ostrosłupa;
3. Wierzchołki zastąpione zostały punktami, gdzie promień styka się z okręgiem;
4. Każdej krawędzi przypisujemy odpowiednie  $K_i$ ;
5. W środku okręgu przyjmujemy, że znajduje się pięciocienne naroże z krawędziami  $K_1, K_2, K_3, K_4, K_5$ .

Sytuacja ta została pokazana na Rysunku 4.14.



Rysunek 4.14: Ostrosłup euklidesowy pięciokątny wraz z oznaczonymi krawędziami oraz jego widok z góry. Trzeci rysunek obrazuje ostrosłup powstały przez wykonanie powyższych kroków. Na niebiesko zostały oznaczone wierzchołki.

Wróćmy do tego, że naroże  $(K_1, K_2, K_3, K_4, K_5)$  przyjmuje jedynie wartość  $(3, 3, 3, 3, 3)$ . W związku z tym pozostanie nam rozpatrzenie potencjalnych dziesiątek jedynie dla tego przypadku, patrz Rysunek 4.15.



Rysunek 4.15

Przypomnijmy pozostałe naroża:

- a)  $3, K_{10}, K_6$ ;
- b)  $3, K_6, K_7$ ;
- c)  $3, K_7, K_8$ ;
- d)  $3, K_8, K_9$ ;
- e)  $3, K_9, K_{10}$ .

Powracając do listy trójek reprezentujących typy kątowe trójkątów sferycznych otrzymujemy, że :

- a)  $K_6 = K_{10}$ ;
- b)  $K_6 = K_7$ ;
- c)  $K_7 = K_8$ ;
- d)  $K_8 = K_9$ ;
- e)  $K_9 = K_{10}$ .

W związku z powyższym wszystkie  $K_i, i \in \{1, 2, 3, \dots, 10\}$  są równe pewnej stałej  $k$ , która należy do zbioru liczb  $\{3, 4, 6, 8, 10\}$ .

Wypiszmy więc wszystkie możliwości na dziesiątki reprezentujące typy kątowe potencjalnych ostrosłupów odbiciowych o podstawie pięciokąta:

$K_1$	$K_2$	$K_3$	$K_4$	$K_5$	$K_6$	$K_7$	$K_8$	$K_9$	$K_{10}$
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
3	3	3	3	3	4	4	4	4	4
3	3	3	3	3	6	6	6	6	6
3	3	3	3	3	8	8	8	8	8
3	3	3	3	3	10	10	10	10	10

Tabela 4.4

W następnym podrozdziale skupimy się na stwierdzeniu, które z tych potencjalnych óse-mek oraz dziesiątek odpowiadają kątom istniejących ostrosłupów euklidesowych o podstawach czworokąta lub pięciokąta.

#### 4.4 Dalsze wykluczenia oraz konstrukcje potencjalnych ostrosłupów odbiciowych oraz ich jednoznaczność

W tym podrozdziale chcielibyśmy dokonać weryfikacji istnienia ostrosłupów o zadanych typach kątowych. Będzie ona przebiegała według następującego planu:

1. Rozcięcie ostrosłupa na czworościany o ustalonych kątach dwuściennych;
2. Weryfikacja istnienia czworościanów za pomocą Lematu 4.7;
3. Konstrukcje ostrosłupów, w przypadku spełnienia warunku koniecznego z Lematu 4.7.

Do weryfikacji istnienia czworościanów skorzystamy z metody wyznacnikowej przytoczonej z pracy Pauliny Górskiej [2], patrz Lemat 4.7. Wszelkie rysunki ostrosłupów oraz okręgów reprezentujących ostrosłupy są rysunkami schematycznymi.

**Rozpoczniemy od przygotowań - dwa lematy wprowadzające i dwa fakty.**

**Lemat 4.6.** *Jeśli mamy dwa czworościany z jednakowymi zestawami miar kątów dwuściennych, to te bryły są do siebie podobne, jeden jest przeskalowanym drugim, lub są przystające.*

##### Dowód Lematu 4.6.

Korzystamy z Faktu 3.9 o jednoznaczności kształtu trójkąta sferycznego o zadanych kątach. Z tej jednoznaczności wynika jednoznaczność bryłowego kąta trójściennego o zadanych kątach dwuściennych. To znaczy, że w kącie trójściennym znając kąty dwuścienne mamy zadane jednoznacznie kąty płaskie. Jeśli mamy czworościan z konkretnymi kątami dwuściennymi to mamy też jednoznacznie zadane kąty płaskie ścian. Wtedy mamy kształt ścian. Zadany wygląd ścian implikuje jednoznaczność kształtu całego czworościanu. Biorąc cztery trójkąty stanowiące ściany, chcemy je ułożyć tak, by jedna z nich była podstawą a pozostałe ścianami bocznymi. Uzyskujemy w ten sposób czworościan jednoznaczny.

■

Przytoczymy lemat, który będzie pomocny przy stwierdzaniu czy dany czworościan euklidesowy istnieje [2] [4] [5].

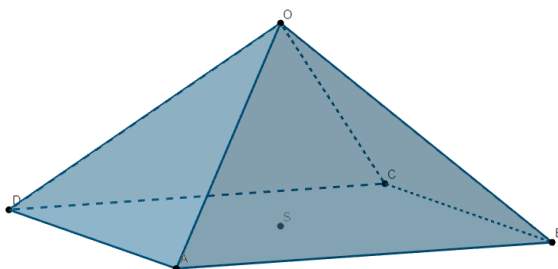
**Lemat 4.7.** *Niech  $\Delta$  będzie dowolnym czworościanem. Ponumerujemy jego ściany liczbami: 1, 2, 3, 4 oraz oznaczymy przez  $\alpha_{ij}$  miarę kąta dwuściennego pomiędzy ścianami  $i$  oraz  $j$ . Wówczas pomiędzy tymi kątami zachodzi następujący związek:*

$$\det \begin{pmatrix} -1 & \cos(\alpha_{12}) & \cos(\alpha_{13}) & \cos(\alpha_{14}) \\ \cos(\alpha_{12}) & -1 & \cos(\alpha_{23}) & \cos(\alpha_{24}) \\ \cos(\alpha_{13}) & \cos(\alpha_{23}) & -1 & \cos(\alpha_{34}) \\ \cos(\alpha_{14}) & \cos(\alpha_{24}) & \cos(\alpha_{34}) & -1 \end{pmatrix} = 0.$$

Przedstawiona równość z powyższego Lematu jest warunkiem koniecznym, ale nie jest dostatecznym na to by kąty  $\alpha_{ij}$  były miarami kątów dwuściennych w czworościanie. W związku z tym musimy pokazać konstrukcję każdego podejrzanego o istnienie ostrosłupa.

Pokażmy, że możemy dokonać podziału każdego ostrosłupa reprezentowanego przez znalezione ósemki oraz dziesiątki na jednakowe czworościany.

**Fakt 4.8.** Niech ostrosłup  $ABCDO$  z Rysunku 4.16 będzie ostrosłupem o podstawie czworokątnej oraz klepką odbiciowego parkietażu przestrzeni. Załóżmy, że kąt dwuścienny przy jednej z krawędzi  $OC$  przy wierzchołku  $O$  jest postaci  $\frac{2\pi}{k}$  dla  $k$  nieparzystego. Wówczas płaszczyzna  $AOC$  jest płaszczyzną symetrii lustrzanej tej bryły. Ponadto dzieli ona ostrosłup na dwa jednakowe czworościany.



Rysunek 4.16: Odbiciowy ostrosłup euklidesowy o podstawie czworokąta, który przy krawędzi  $OC$  oraz wierzchołku  $O$  ma kąt dwuścienny będący nieparzystą częścią kąta pełnego.

Rysunek 4.17

### Dowód Faktu 4.8.

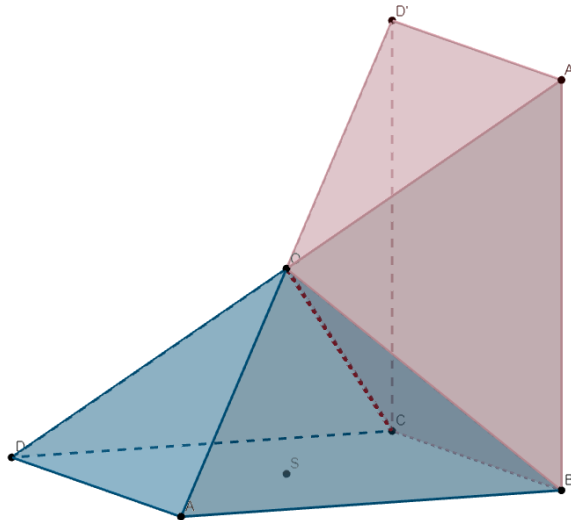
Dowód zostanie przedstawiony precyzyjnie dla  $k = 3$ .

Kroki jakie zostaną wykonane podczas tego dowodu to:

1. Wykonanie operacji odbicia ostrosłupa wyjściowego względem jednej ze ścian;
2. Odbicie obrazu względem jednej z jego ścian;
3. Odbicie trzeciego ostrosłupa względem wspólnej ściany z wyjściowym ostrosłupem.

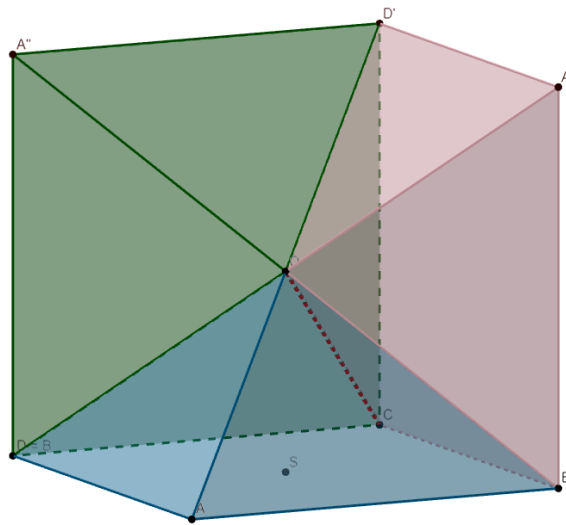
Ostrosłup oznaczony jest przez  $ABCDO$ .

Chcemy wyparkietować przestrzeń odbiciowo ostrosłupem z Rysunku ???. Liczba opisująca krawędź  $OC$  jest równa 3, co oznacza, że wokół tej krawędzi muszą znaleźć się trzy klepki tego parkietażu. Odbijemy ostrosłup wyjściowy względem ściany  $BCO$ . Przedstawia tą operację Rysunek 4.18.



Rysunek 4.18

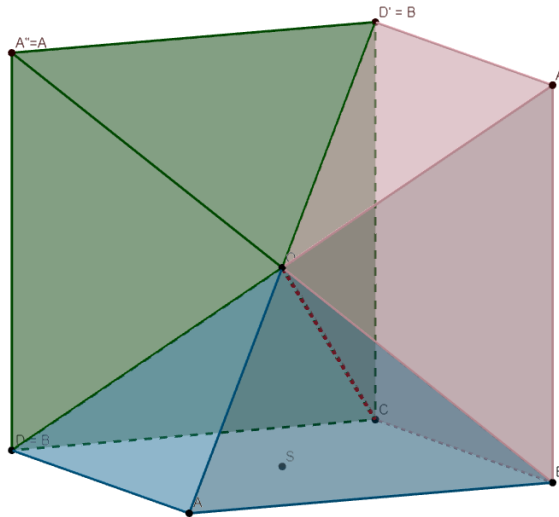
Na rysunku wyżej wymieniona krawędź  $OC$  opisywana przez  $k = 3$  oznaczona jest kolorem czerwonym. Obrazami przez odbicie wierzchołków  $A$  i  $D$  są wierzchołki  $A'$  oraz  $D'$ , punkty  $C$ ,  $B$  oraz  $O$  nie ulegają zmianie. Następną operacją będzie odbicie ostrosłupa  $A'D'CBO$  względem ściany  $D'OC$ .



Rysunek 4.19

Widzimy na Rysunku 4.19, że wierzchołki  $D'$ ,  $O$  oraz  $C$  nie zmieniają swojego położenia. Zauważamy, że wierzchołek  $B$  przechodzi na wierzchołek  $D$ . Ostatnim krokiem będzie odbicie ostrosłupa  $A''D'CD$  względem ściany  $DCO$ , operację tą przedstawia Rysunek 4.20.





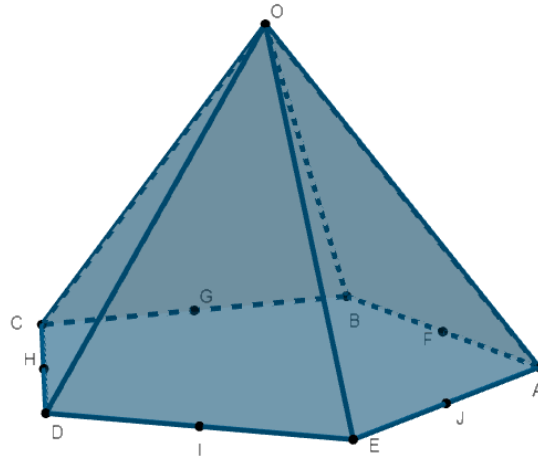
Rysunek 4.20

Ostatecznie krawędź  $OB$  przeszła na krawędź  $OD$ , zaś  $OC$  oraz  $AO$  pozostały bez zmian. Widzimy, że po powyższych przekształceniach czworościan  $ABCO$  jest przystający do czworościanu  $ADCO$ , więc nasz ostrosłup został podzielony na dwa czworościany przez płaszczyznę  $AOC$ . W takim razie płaszczyzna  $ACO$  jest płaszczyzną symetrii lustrzanej ostrosłupa  $ABCDO$ .



Dla nieparzystych  $k$  większych od trzech argumentacja jest analogiczna i zostanie pominięta. Każdy dowód byłby przeprowadzony w dokładnie  $k$  krokach. Analogiczny fakt można stwierdzić dla odbiciowych ostrosłupów pięciokątnych.

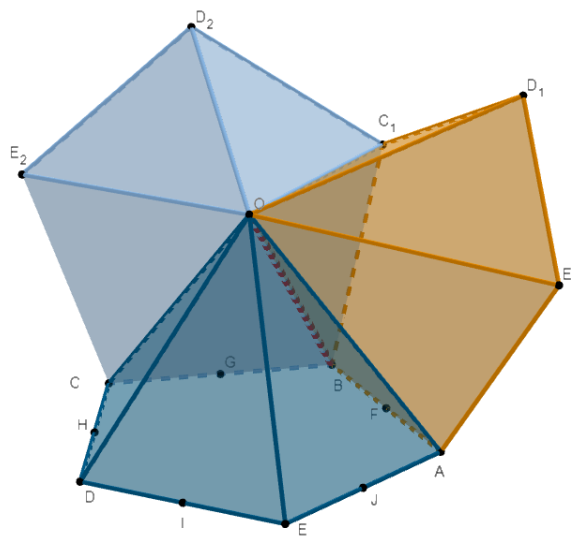
**Fakt 4.9.** Niech ostrosłup  $ABCDEO$  z Rysunku 4.21 będzie ostrosłupem o podstawie pięciokątnej oraz klepką odbiciowego parkietażu przestrzeni. Punkty  $F, G, H, I$  oraz  $J$  są środkami krawędzi podstawy. Załóżmy, że kąty dwuścienne przy każdej z krawędzi  $OA, OB, OD$  oraz  $OE$  i przy wierzchołku  $O$  są postaci  $\frac{2\pi}{3}$ , zaś kąty dwuścienne pomiędzy podstawą a ścianami bocznymi są równej miary. Wówczas płaszczyzny  $AHO, BIO, CJO, DFO$  oraz  $EGO$  są płaszczyznami symetrii lustrzanej tej bryły. Ponadto dzielą one ostrosłup na dziesięć jednakowych czworościanów.



Rysunek 4.21: Potencjalny odbiciowy ostrosłup euklidesowy o podstawie pięciokąta, jak w założeniach Faktu 4.9.

**Dowód Faktu 4.9.**

Rozpoczniemy od odbicia ostrosłupa  $ABCDEO$  względem ściany  $ABO$ , następnie wykonamy odbicie ostrosłupa  $AE_1D_1C_1D$  względem  $DOC_1$ . Z tych operacji otrzymujemy, że punkt  $A$  przeszedł na  $C$ .



Rysunek 4.22

Jeżeli wykonamy teraz odbicie ostrosłupa  $CBC_1D_2E_2$  względem ściany  $BOC$  otrzymamy wtedy, że punkt  $E_2$  przechodzi na  $D$ ,  $D_2$  na  $E$  oraz  $C_1$  na  $A$ . Wróciliśmy więc do ostrosłupa  $ABCDEO$ . Złożenie kolejno trzech powyższych odbić jest symetrią względem płaszczyzny  $BOI$ . Operacja ta przeprowadza ostrosłup  $ABCDEO$  na siebie, więc ta płaszczyzna jest osią symetrii.

Symetrię względem pozostałych płaszczyzn można wykonać analogicznie i to pozostawiamy czytelnikowi. Po rozcięciu ostrosłupa wzdłuż pięciu takich płaszczyzn symetrii otrzymujemy jego podział na dziesięć przystających czworościanów.



**Obserwacja 4.10.** *Spośród znalezionych ósemek lub dziesiątek przedstawiających ostrosłupy, możemy wykluczyć te, w których wszystkie kąty dwuścienne przy krawędziach podstawy są większe bądź równe  $90^\circ$ . Ściany wtedy nie mają możliwości przeciąć się w jednym wierzchołku.*

**Na początek zajmijmy się potencjalnymi ostrosłupami o podstawie czworokąta.** Wiemy, że istnieje w nich symetria z Faktu 4.8. Stąd możemy wnioskować, że każdy potencjalny odbiciowy ostrosłup euklidesowy o podstawie czworokąta będzie się składał z dwóch przystających czworościanów. Płaszczyzną symetrii będzie płaszczyzna przechodząca wzdłuż wysokości bryły oraz przez dwie z przeciwległych krawędzi bocznych. Istotne jest które z nich będą tymi właściwymi. Krawędzie o których mowa to te, których przypisane  $K_i$  jest liczbą nieparzystą.

Wnioskując z powyższego nie będzie problemu z podziałem na dwa czworościany ostrosłupów reprezentowanych przez potencjalne ósemki wyliczone w poprzednim rozdziale. W każdej z brył znajdziemy krawędź boczną, której przypisany będzie parametr  $K_i = 3$  (patrz Tabela 4.3).

Na podstawie Obserwacji 4.10 możemy wykluczyć sześć z ósemek występujących w Tabeli 4.3 przedstawiającej typy kątowe potencjalnych odbiciowych ostrosłupów czworokątnych.

Typy kątowe, zgodnie z numeracją w Tabeli 4.3, które odrzucamy to:

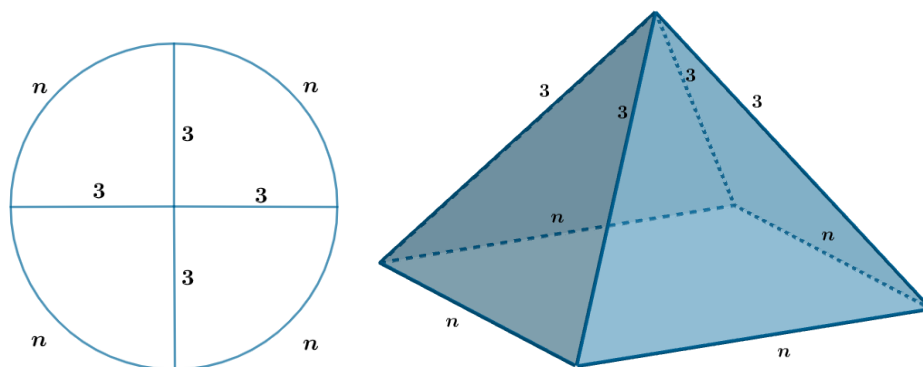
1. (3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3);
2. (3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4);
6. (3, 4, 3, 4, 3, 4, 4, 3);
7. (3, 4, 3, 4, 4, 4, 4, 4);
20. (3, 4, 4, 4, 3, 4, 4, 3);
21. (3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4).

Tabela 4.3 po wykluczeniu sześciu powyższych przypadków to Tabela 4.5.

$Lp.$	$K_1$	$K_2$	$K_3$	$K_4$	$K_5$	$K_6$	$K_7$	$K_8$
1.	3	3	3	3	6	6	6	6
2.	3	3	3	3	8	8	8	8
3.	3	3	3	3	10	10	10	10
4.	3	4	3	4	4	6	6	4
5.	3	4	3	4	4	8	8	4
6.	3	4	3	4	4	10	10	4
7.	3	4	3	4	6	6	6	6
8.	3	4	3	4	6	8	8	6
9.	3	4	3	4	6	10	10	6
10.	3	5	3	5	6	6	6	6
11.	3	4	5	4	4	5	5	4
12.	3	4	5	4	4	6	6	4
13.	3	4	5	4	6	6	6	6
14.	3	4	5	4	8	6	6	8
15.	3	4	5	4	10	6	6	10
16.	3	4	4	4	4	6	6	4
17.	3	4	4	4	6	4	4	6
18.	3	4	4	4	6	6	6	6
19.	3	4	4	4	8	4	4	8
20.	3	4	4	4	8	6	6	8
21.	3	4	4	4	10	4	4	10
22.	3	4	4	4	10	6	6	10

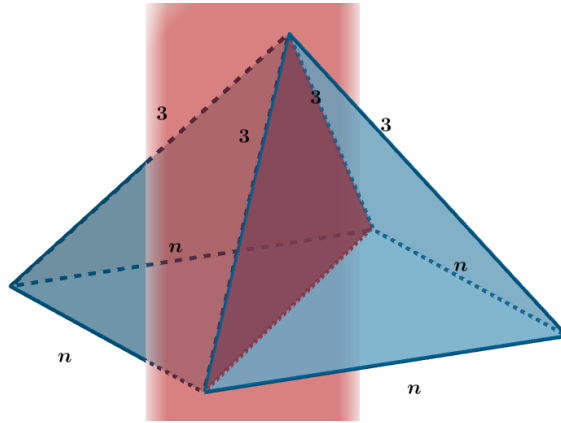
Tabela 4.5

Zajmijmy się pozycjami 1, 2, 3 z Tabeli 4.5. Wszystkie rozpoczynają się od czterech trójek reprezentujących kąty dwuścienne pomiędzy ścianami bocznymi ostrosłupa. Ósemki te można zapisać jako  $(3, 3, 3, 3, n, n, n, n)$ , gdzie  $n \in \{6, 8, 10\}$ . Przedstawmy tę sytuację na rysunku.



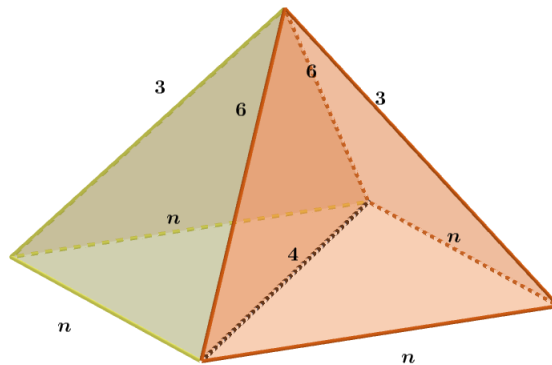
Rysunek 4.23

Korzystając z Faktu 4.8, podzielimy ten ostrosłup na dwa przystające czworościany.



Rysunek 4.24

Na Rysunku 4.24 czerwonym kolorem została zaznaczona płaszczyzna podziału ostrosłupa. Uzyskujemy dwa czworościany.



Rysunek 4.25

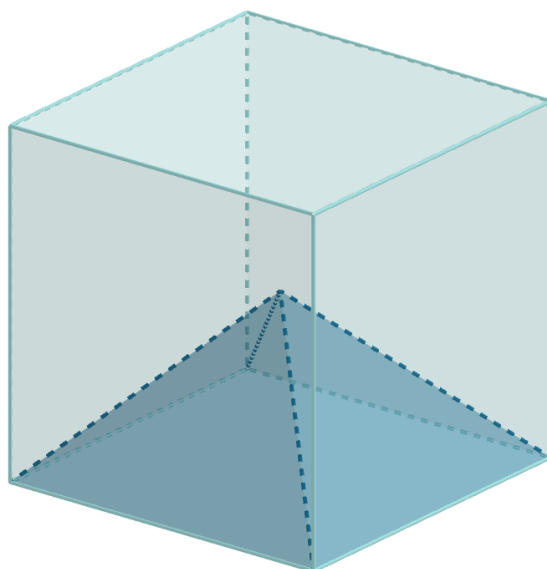
Wyznaczamy kąty dwuścienne w otrzymanych czworościanach. Wynoszą one  $\{\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}\}$ . Oznaczmy to skrótowo za pomocą typu kąтового. Wypiszmy szóstkę reprezentującą te czworościany  $(3, 6, 6, 4, n, n)$ . Użyjemy teraz metody wyznaczkowej 4.7 i wyliczymy dla jakich  $n$  wyznacznik będzie równy zeru. Po wpisaniu kątów otrzymujemy:

$$\det \begin{pmatrix} -1 & \cos(\frac{2\pi}{6}) & \cos(\frac{2\pi}{6}) & \cos(\frac{2\pi}{4}) \\ \cos(\frac{2\pi}{6}) & -1 & \cos(\frac{2\pi}{3}) & \cos(\frac{2\pi}{n}) \\ \cos(\frac{2\pi}{6}) & \cos(\frac{2\pi}{3}) & -1 & \cos(\frac{2\pi}{n}) \\ \cos(\frac{2\pi}{4}) & \cos(\frac{2\pi}{n}) & \cos(\frac{2\pi}{n}) & -1 \end{pmatrix}.$$

Przyjmijmy, że  $n = 6$ . Wyznacznik po wyliczeniu przy pomocy kalkulatora WolframAlpha [3] wynosi  $\frac{1}{4}$ . W związku z tym, ta możliwość zostaje odrzucona. Do obliczeń przyjmujemy kolejno

$n = 8$  i  $n = 10$ , otrzymujemy odpowiednio 0 oraz  $\frac{1 - \sqrt{5}}{32}$ . Oznacza to, że jedyną możliwością na istnienie czworościanu jest szóstka  $(3, 6, 6, 4, 8, 8)$ .

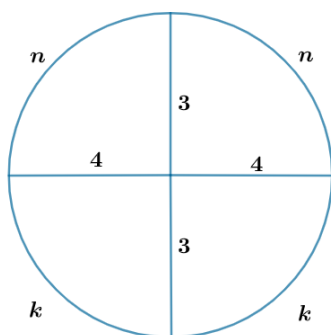
Następnym krokiem, aby przekonać się czy ostrosłup zadany ósemką  $(3, 3, 3, 3, 8, 8, 8, 8)$  również istnieje, będzie jego konstrukcja poprzez odpowiednie umieszczenie go w sześcianie. Widzimy, że kąty dwuścienne pomiędzy ścianami bocznymi a podstawą stanowią połowę kąta prostego, więc krawędzie podstawy mogą pokrywać się z krawędziami jednej ze ścian sześcianu. Nawiązując do powyższych informacji, możemy umieścić ten ostrosłup w sześcianie w następujący sposób, jak na Rysunku 4.26.



Rysunek 4.26

**Wniosek:** Potencjalny odbiciowy ostrosłup czworokątny o typie kątowym  $(3, 3, 3, 3, 3)$  istnieje i ma jednoznaczny kształt na podstawie Lematu 4.6 oraz z tego, że jest on zbudowany z dwóch czworościanów o jednoznacznym kształcie.

Następną partią ostrosłupów o wspólnej czwórce kątów dwuściennych pomiędzy ścianami bocznymi są pozycje 4, 5, 6, 7, 8 oraz 9 z Tabeli 4.5. Sytuacja przedstawiona jest na Rysunku 4.27.



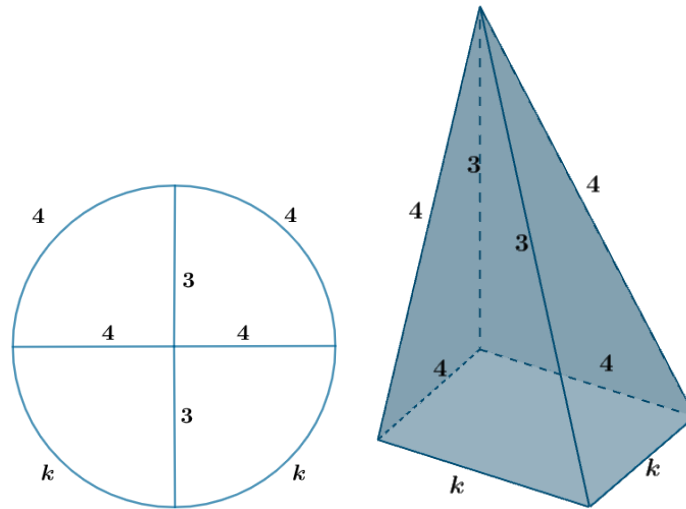
Rysunek 4.27

Mamy dwie niewiadome  $n \in \{4, 6\}$  oraz  $k \in \{6, 8, 10\}$ . Rozróżnimy podprzypadki:

a)  $n = 4$ ;

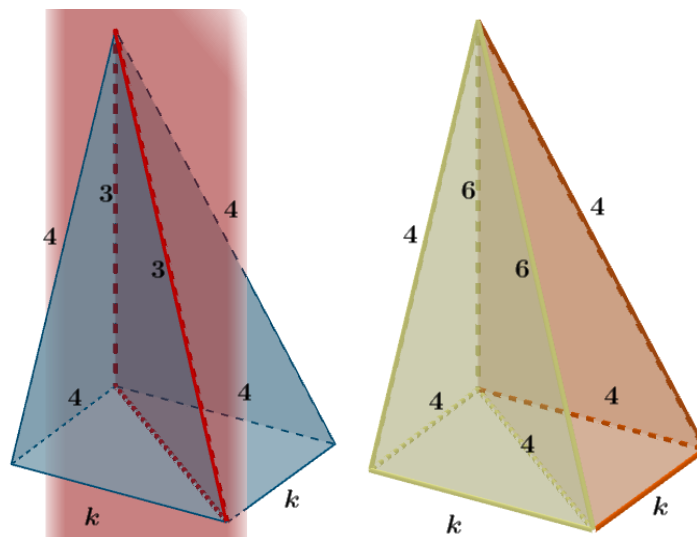
b)  $n = 6$ .

Ad. a) Rozpocznijmy od sytuacji, gdy  $n = 4$ . Przedstawmy to na Rysunku 4.28.



Rysunek 4.28

Ponownie skorzystamy z podzielenia ostrosłupa na dwa przystające czworościany i wyliczymy metodą wyznacnikową czy któraś z możliwości dla liczby  $k$  będzie ją spełniała. Podziału dokonamy płaszczyzną przechodzącą przez przekątną podstawy oraz wierzchołek bryły.



Rysunek 4.29

Zbadajmy więc wyznaczniki dla tych czworościanów:

$$\det \begin{pmatrix} -1 & \cos(\frac{2\pi}{6}) & \cos(\frac{2\pi}{4}) & \cos(\frac{2\pi}{6}) \\ \cos(\frac{2\pi}{6}) & -1 & \cos(\frac{2\pi}{4}) & \cos(\frac{2\pi}{4}) \\ \cos(\frac{2\pi}{4}) & \cos(\frac{2\pi}{4}) & -1 & \cos(\frac{2\pi}{k}) \\ \cos(\frac{2\pi}{6}) & \cos(\frac{2\pi}{4}) & \cos(\frac{2\pi}{k}) & -1 \end{pmatrix}.$$

Odpowiednio dla każdego  $k \in \{6, 8, 10\}$  otrzymujemy następujące wartości wyznacznika  $\det A$ , gdzie  $A$  to macierz z Lematu 4.7:

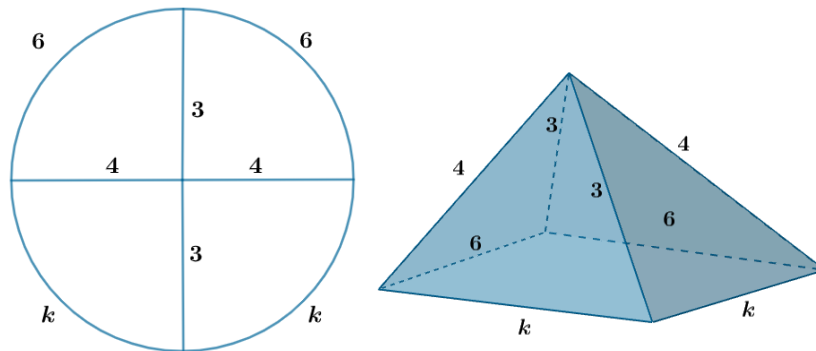
$$k = 6 \quad \det A = \frac{5}{16};$$

$$k = 8 \quad \det A = \frac{1}{8};$$

$$k = 10 \quad \det A = \frac{7 - 3\sqrt{5}}{32}.$$

**Wniosek:** W związku z powyższym, żaden z czworościanów nie istnieje na podstawie Lematu 4.7 co sprawia, że ostrosłupy z podpunktów 4,5,6 również nie istnieją.

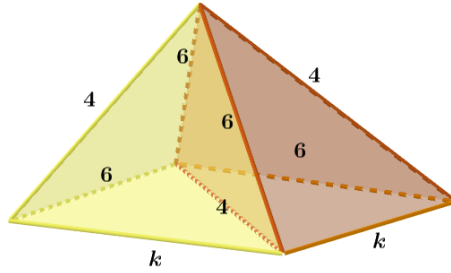
Ad. b) Przejdźmy do  $n = 6$ . Spójrzmy na Rysunek 4.30.



Rysunek 4.30

Wzorując się na poprzednim przypadku dokonujemy podziału i sprawdzenia czy wyznacznik dla powstałego czworościanu i podstawionej wartości liczby  $k$  wynosi zero.





Rysunek 4.31

Wymieńmy teraz  $k$  i wyliczone dla nich wartości wyznaczników macierzy, nazwijmy ją  $A$  :

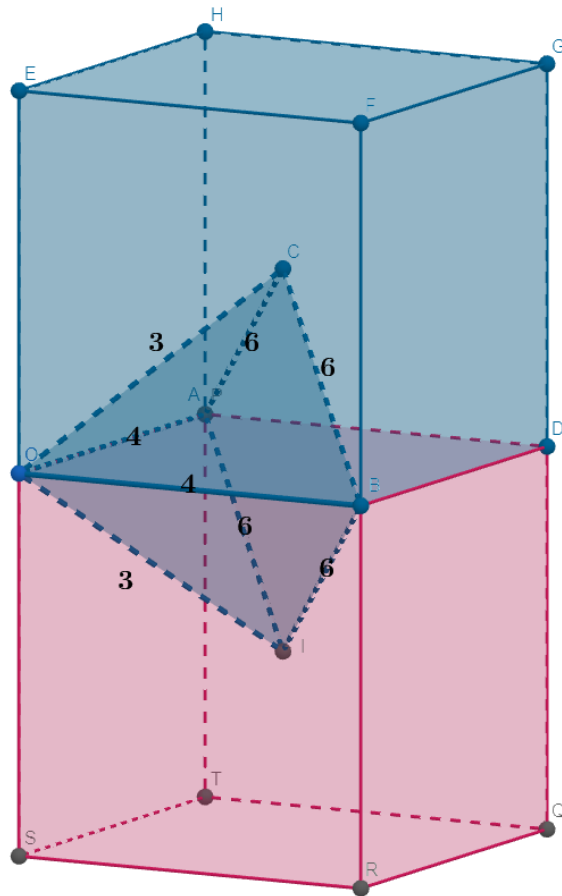
$k = 6$  w tym przypadku  $\det A = 0$ ;

$k = 8$  otrzymujemy wartość  $\det A = -\frac{1 + 2\sqrt{2}}{16}$ ;

$k = 10$  wyznacznik macierzy dla tej wartości wynosi  $\det A = -\frac{1 + 5\sqrt{5}}{32}$ .

Z wartości wyznaczników widzimy, że nie istnieją czworościany z  $k = 8$  oraz  $k = 10$ , ponieważ wyznacznik z Lematu 4.7 nie wynosi zero. W związku z tym nie istnieją również ostrosłupy zbudowane z dwóch takich czworościanów. Podejrzewamy o istnienie jedynie możliwość, gdy  $k = 6$ . Skonstruujmy więc ostrosłup o typie kątowym  $(3, 4, 3, 4, 6, 6, 6, 6)$ . Składa się on z dwóch jednoznacznych czworościanów, więc jeśli istnieje to na podstawie Lematu 4.6 będzie on miał kształt jednoznaczny.

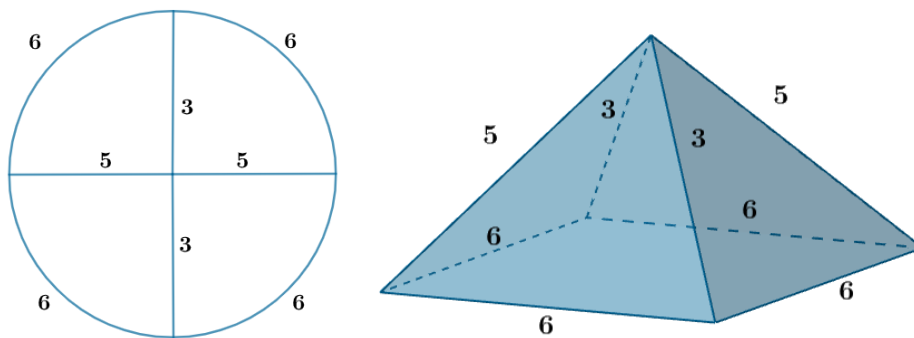
Krawędzie opisane przez liczbę 4 pokrywają się z krawędziami podstawy sześcianu  $AOBDEFGH$  oraz krawędź górną sześcianu  $SRQTOBDA$ . W narożu  $AOB$  spotykają się cztery ściany, odpowiada mu czwórka  $(3, 4, 3, 4)$ . Pozostałe cztery kąty dwuścienne wynoszą  $60^\circ$ . Czwościan ten zaprezentowany jest na Rysunku 4.32.



Rysunek 4.32

**Wniosek:** Uzyskujemy potencjalny odbiciowy ostrosłup  $ACBIO$  reprezentowany typem kątowym  $(3, 4, 3, 4, 6, 6, 6, 6)$ , co potwierdza istnienie tej bryły.

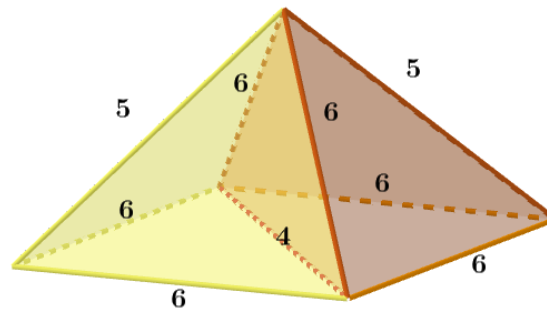
Zajmijmy się następną pozycją, a mianowicie 10 z Tabeli 4.5, czyli typem kątowym  $(3, 5, 3, 5, 6, 6, 6, 6)$ . Diagram oraz schematyczny wizerunek ostrosłupa o typie kątowym przedstawione są na Rysunku 4.33.



Rysunek 4.33

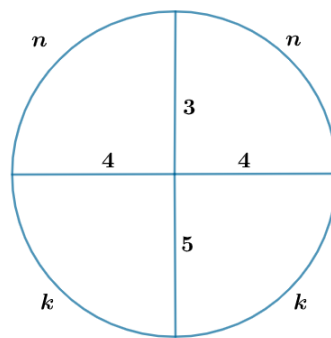
Pokażmy podział na dwa czworościany na Rysunku 4.34. Korzystając z Faktu 4.8, podzie-

lony ostrosłup o tym typie na dwa jednakowe czworościany, co jest przedstawione na Rysunku 4.34.



Rysunek 4.34

Wyznacznik z Obserwacji 4.7 dla tak powstałego czworościanu wynosi  $-\frac{1+5\sqrt{5}}{8}$ , więc możemy odrzucić ten przypadek, gdyż odpowiedni czworościan oraz ostrosłup nie istnieją. Kolejną serią możliwości są 11, 12, 13, 14, 15 rozpoczynające się na 3, 4, 5, 4.

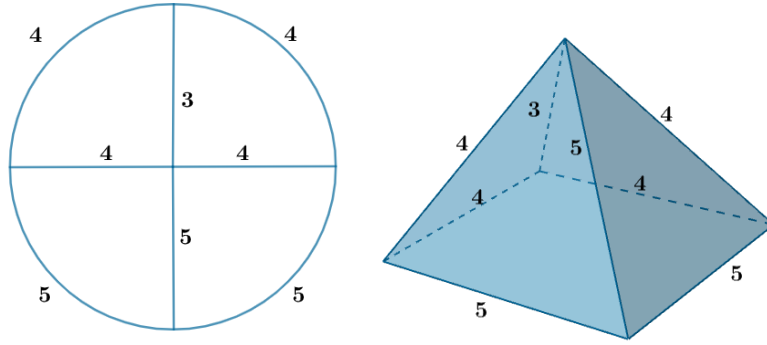


Rysunek 4.35

Możemy wyróżnić dwa podprzypadki:

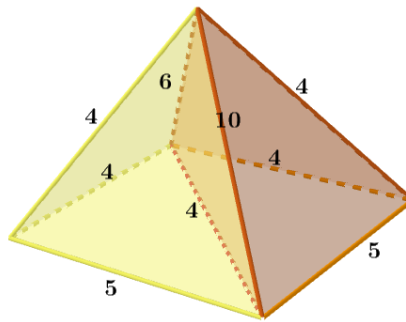
- a)  $k = 5$ ;
- b)  $k = 6$ .

Ad. a) Załóżmy, że  $k = 5$ , wtedy  $n = 4$ . Reprezentuje to Rysunek 4.36.



Rysunek 4.36

Podzielmy teraz powyższy ostrosłup na dwa czworościany na Rysunku 4.37.



Rysunek 4.37

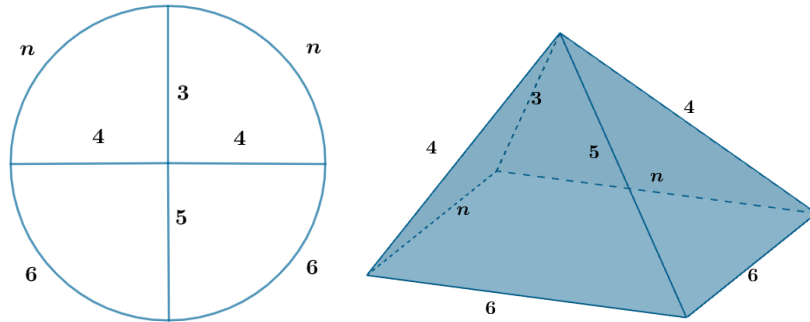
Wyznacznik z Obserwacji 4.7 liczony dla jednego z czworościanów składających się na badany ostrosłup wynosi:

$$\det \begin{pmatrix} -1 & \cos(\frac{2\pi}{6}) & \cos(\frac{2\pi}{4}) & \cos(\frac{2\pi}{10}) \\ \cos(\frac{2\pi}{6}) & -1 & \cos(\frac{2\pi}{4}) & \cos(\frac{2\pi}{4}) \\ \cos(\frac{2\pi}{4}) & \cos(\frac{2\pi}{4}) & -1 & \cos(\frac{2\pi}{5}) \\ \cos(\frac{2\pi}{10}) & \cos(\frac{2\pi}{4}) & \cos(\frac{2\pi}{5}) & -1 \end{pmatrix} = \frac{3 - \sqrt{5}}{32}.$$

**Wniosek:** Powyższy przypadek zostaje odrzucony, nie został spełniony warunek konieczny, z Lematu 4.7, na istnienie czworościanu, możemy również zaprzeczyć istnieniu ostrosłupa o typie kątowym  $(3, 4, 5, 4, 4, 5, 5, 4)$ .

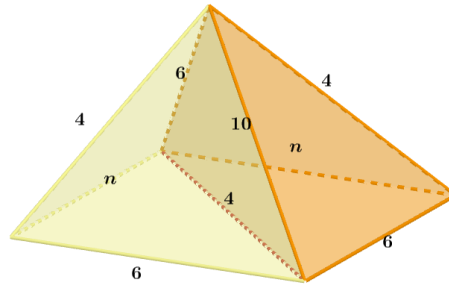
Ad. b) Dla tej możliwości  $k = 6$ , zaś  $n \in \{4, 6, 8, 10\}$ .

Rozpocznijmy od narysowania tego przypadku na Rysunku 4.38.



Rysunek 4.38

Podzielmy ostrosłup znowu, jak w poprzednich przypadkach, na dwa przystające czworościany i dla jednego z nich wyliczmy wyznacznik z Obserwacji 4.7. Ten podział jest schematycznie przedstawiony na Rysunku 4.39.



Rysunek 4.39

Na początku założmy, że  $n = 4$  wtedy wyznacznik osiąga wartość  $\frac{3 - 2\sqrt{5}}{16}$ .

Dla  $n = 6$  wyznacznik wynosi  $-\frac{1 + 5\sqrt{5}}{32}$ .

Dla  $n = 8$  mamy  $-\frac{2 + \sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{10}}{16}$ .

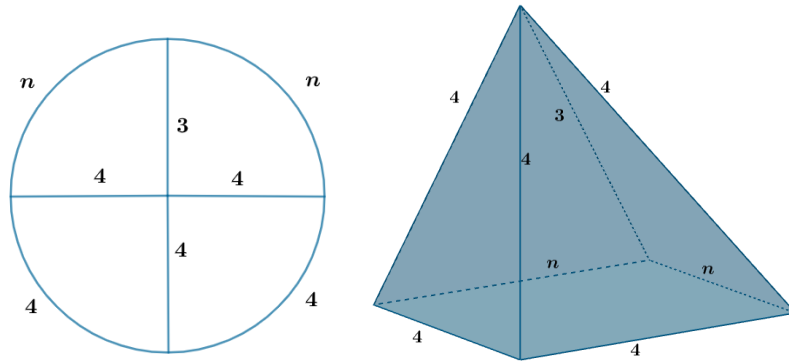
Zaś dla  $n = 10$  otrzymujemy  $-\frac{5 + 7\sqrt{5}}{32}$ .

**Wniosek:** Żadna z powyższych możliwości nie daje wartości wyznacznika równej 0. Czwo-rościany powstałe przy podstawianiu kolejnych wartości  $n$  nie istnieją, co zaprzecza również istnieniu ostrosłupów składających się z dwóch takich brył.

Ostatnią serią możliwości są pozycje 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22 z Tabeli 4.5, w czworościennym narożu jest czwórka  $(3, 4, 4, 4)$ , więc ósemki są postaci  $(3, 4, 4, 4, n, k, k, n)$ , gdzie  $n \in \{4, 6, 8, 10\}$  i  $k \in \{4, 6\}$ . Ponownie możemy zastosować podział na dwie partie przypadków:

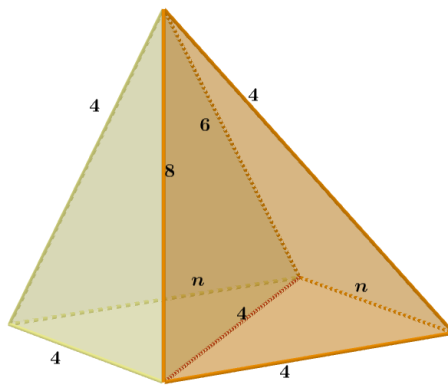
1.  $k = 4$ ;
2.  $k = 6$ .

Ad. 1. Załóżmy, że  $k = 4$ . Wtedy  $n$  może przyjąć wartość ze zbioru  $\{6, 8, 10\}$ .



Rysunek 4.40

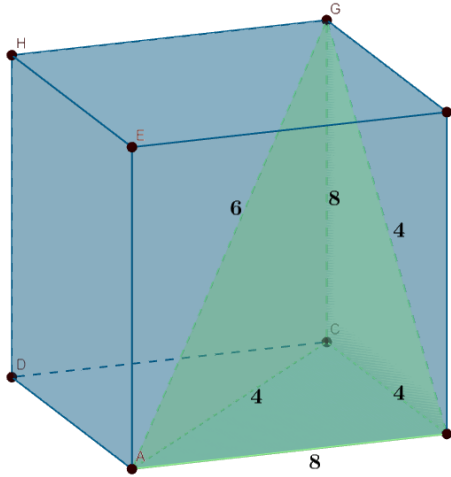
Dokonajmy podziału bryły na dwa przystające czworościany, co widać na Rysunku 4.41.



Rysunek 4.41

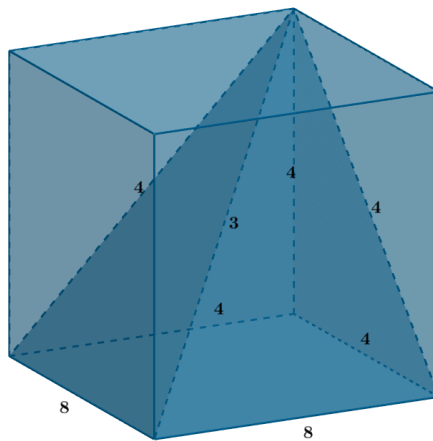
Dla  $n = 8$  czworościan utworzony podczas podziału spełnia warunek konieczny z Lematu 4.7 na istnienie czworościanu. Podejrzewamy, że ostrosłup reprezentowany przez ósemkę  $(3, 4, 4, 4, 8, 4, 4, 8)$  również istnieje.

Skonstruujmy go, aby udowodnić jego istnienie. Rozpocznijmy od konstrukcji połowy ostrosłupa, a mianowicie od czworościanu opisanego przez typ kątowny  $(4, 4, 8, 4, 6, 8)$ . Krawędzie opisane przez liczbę 8 pokrywają się z krawędzią podstawy sześcianu  $AB$  i krawędzią ściany bocznej  $GC$ . Przekątną ściany  $CBFG$  to jedna z krawędzi 4, zaś pozostałe dwie krawędzie z liczbą 4 to krawędź podstawy  $CB$  zaś druga to przekątna podstawy czyli  $AC$ . Pozostały kąt dwuścienny wynosi  $60^\circ$ . Skonstruowany czworościan reprezentuje Rysunek 4.42.



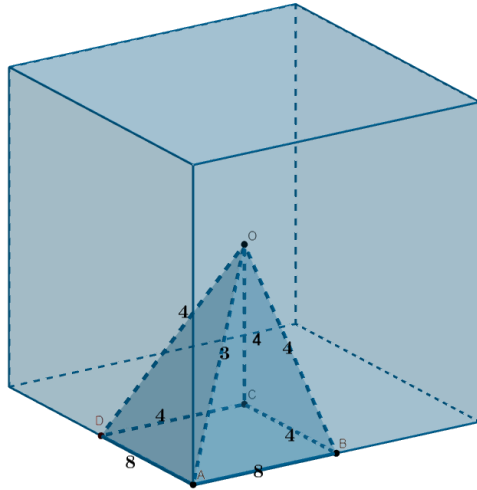
Rysunek 4.42

Jeżeli już skonstruowaliśmy połowę ostrosłupa  $(3, 4, 4, 4, 8, 4, 4, 8)$ , to jesteśmy w stanie skonstruować całą bryłę. Aby to wykonać musimy odbić czworościan względem ściany  $AOC$ . Pokazujemy ten proces i otrzymany ostrosłup na Rysunku 4.43.



Rysunek 4.43

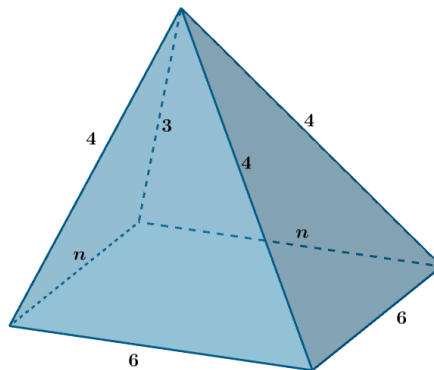
Aby w późniejszym etapie było łatwiej pokazać parkietaż przestrzeni właśnie opisanymi ostrosłupami, pomniejszymy ostrosłup w skali  $\frac{1}{2}$ . Co widać na Rysunku 4.44.



Rysunek 4.44

**Wniosek:** Na podstawie podziału ostrosłupa na dwa czworościany o jednoznacznym kształcie oraz pokazanej konstrukcji stwierdzamy istnienie jednoznacznego potencjalnego odbiciowego ostrosłupa czworokątnego o typie kątowym  $(3, 4, 4, 4, 8, 4, 4, 8)$ .

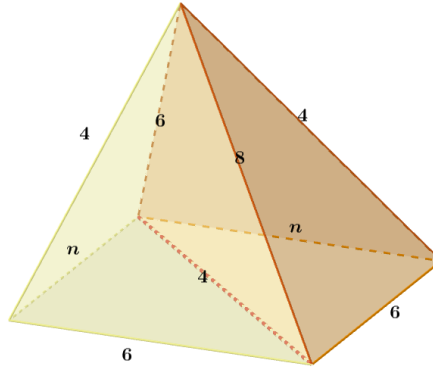
Ad. 2. Niech  $k$  przyjmie wartość 6, zaś  $n$  będzie jedną z liczb ze zbioru  $\{4, 6, 8, 10\}$ .



Rysunek 4.45

Na Rysunku 4.46 przedstawiony jest podział ostrosłupa z Rysunku 4.45.





Rysunek 4.46

Na podstawie Lematu 4.7 sprawdzimy czy któreś  $n$  spełnia warunek konieczny na istnienie czworościanów będących połową ostrosłupa. Oznaczmy macierz z zależności wyznaczkowej przez  $A$ .

$k = 4$  Wyznacznik wynosi  $\det A = 0,0625$ .

$k = 6$  Otrzymaliśmy wynik  $\det A = -\frac{1 + 2\sqrt{2}}{16}$ .

$k = 8$  Wartość wyznacznika to  $\det A = -0,4375$ .

$k = 10$  Ostatnia możliwość daje wartość wyznacznika  $\det A = -\frac{2 + \sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{10}}{16}$ .

Żadna z powyższych wartości macierzy nie wynosi 0, więc nie został spełniony warunek konieczny na istnienie któregośkolwiek z czworościanów w tych pozycjach z Tabeli 4.5. Implikuje to brak istnienia ostrosłupów zbudowanych z dwóch takowych czworościanów.

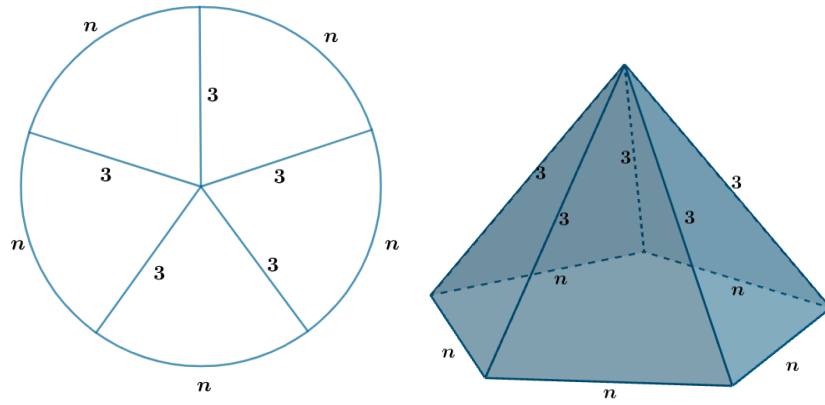
**Zajmiemy się teraz ostrosłupami o podstawie pięciokąta.**

W Tabeli 4.4 możliwości na typy kątowe ostrosłupa pięciokątnego. W związku z Obserwacją 4.10 możemy wykluczyć pozycje 1 oraz 2 z Tabeli 4.4. Otrzymujemy nową Tabelę 4.6, która reprezentuje potencjalne dziesiątki opisujące ostrosłupy o podstawie pięciokąta.

Lp.	$K_1$	$K_2$	$K_3$	$K_4$	$K_5$	$K_6$	$K_7$	$K_8$	$K_9$	$K_{10}$
1.	3	3	3	3	3	6	6	6	6	6
2.	3	3	3	3	3	8	8	8	8	8
3.	3	3	3	3	3	10	10	10	10	10

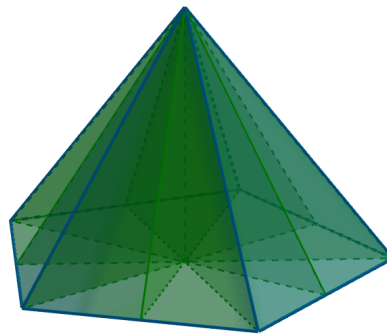
Tabela 4.6

Wszystkie pozycje w Tabeli 4.6 rozpoczynają się od piątki  $(3, 3, 3, 3, 3)$ . Dziesiątki te możemy zapisać jako  $(3, 3, 3, 3, 3, n, n, n, n, n)$ , gdzie  $n \in \{6, 8, 10\}$ . Przedstawimy je na Rysunku 4.47



Rysunek 4.47

Na podstawie Faktu 4.9 możemy podzielić ten ostrosłup na dziesięć czworościanów o kątach dwuściennych  $\frac{2\pi}{6}, \frac{2\pi}{6}, \frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{10}$  oraz  $\frac{2\pi}{n}$ . Na Rysunku 4.48 widzimy zarys niebieski ostrosłupa opisanego przez  $(3, 3, 3, 3, 3, n, n, n, n, n)$ , zaś zielone krawędzie to powstałe podczas podziału krawędzie czworościanów.



Rysunek 4.48

Użyjemy Lematu 4.7 do sprawdzenia czy z którymś z wyżej wymienionych  $n$  możemy odrzucić istnienie czworościanu. Macierz dla czworościanów nazwiemy  $A$ . Wyznamy więc wartość wyznacznika  $A$ :

$$n = 6 \text{ wyznacznik wynosi } \det A = \frac{17}{23} - \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{3\sqrt{5}}{32};$$

$$n = 8 \text{ otrzymana wartość to } \det A = \frac{\sqrt{5}}{16} - \frac{5}{16};$$

$$n = 10 \text{ wartość wyznacznika wynosi } \det A = \frac{1}{32} \cdot (9 - 4\sqrt{2} - 3\sqrt{5} - 4\sqrt{10}).$$

Żaden z wyżej wymienionych czworościanów nie spełnia warunku koniecznego na istnienie.

**Wniosek:** Nie istnieje żaden odbiciowy ostrosłup pięciokątny.

**Podsumowanie:**

W Tabeli 4.7 znajdują się jedyne typy kątowe potencjalnych odbiciowych ostrosłupów n-kątnych, dla  $n \geq 4$ .

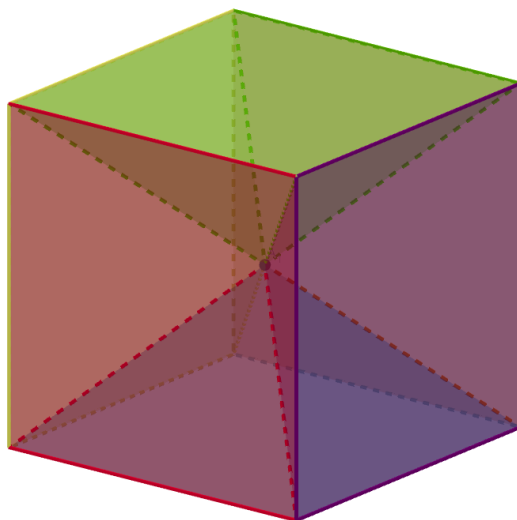
$Lp.$	$K_1$	$K_2$	$K_3$	$K_4$	$K_5$	$K_6$	$K_7$	$K_8$
1.	3	3	3	3	8	8	8	8
2.	3	4	4	4	8	4	4	8
3.	3	4	3	4	6	6	6	6

Tabela 4.7

## 4.5 Parkietaże odbiciowe przestrzeni ostrosłupami i dowód Twierdzenia 1.1

W tym podrozdziale chcemy pokazać odbiciowe parkietaże przestrzeni dla trzech ostrosłupów, które są jedynymi kandydatami na klepki takich parkietaży (na podstawie rozważań z Podrozdziału 4.4).

1.  $(3, 3, 3, 3, 8, 8, 8, 8)$

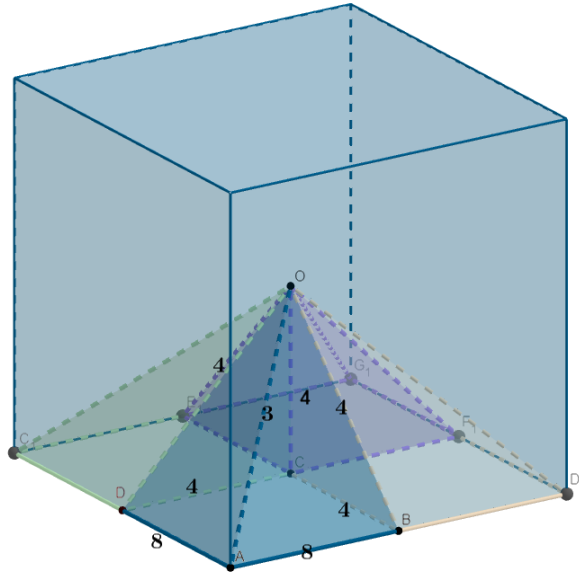


Rysunek 4.49

Rozważmy teraz przestrzeń podzieloną na sześciiany, a następnie wyobraźmy sobie, że każdy sześciąt został podzielony na sześć ostrosłupów, tak jak na Rysunku 4.49. W powyższy sposób zapełniamy przestrzeń ostrosłupami  $(3, 3, 3, 3, 8, 8, 8, 8)$ . Nietrudno jest zauważyć, że jest to odbiciowy parkietaż.

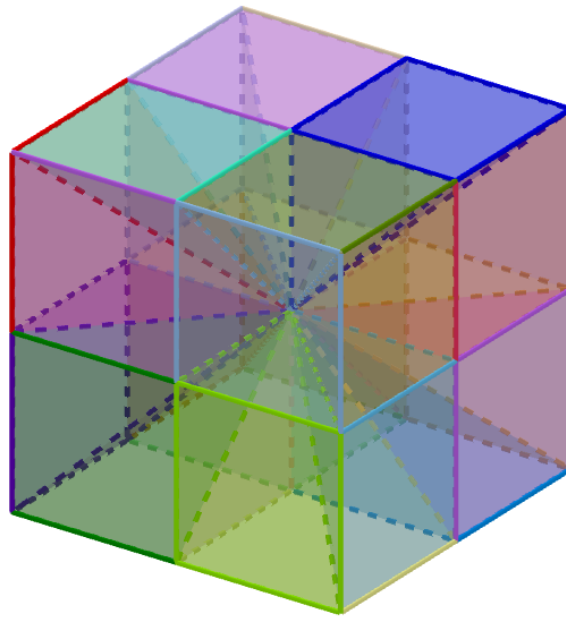
2.  $(3, 4, 4, 4, 8, 4, 4, 8)$

Rozważamy parkietaż sześcienny. Bieremy jedną klepkę tego parkietażu i dzielimy ją jak w podpunkcie 1. Wyobraźmy sobie teraz, że każdy uzyskany tak ostrosłup dzielimy na cztery części. Podział jednego z nich został zaprezentowany na Rysunku 4.50.



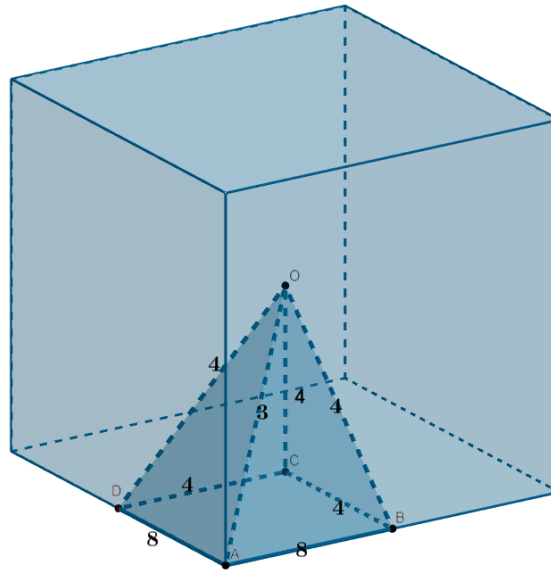
Rysunek 4.50

W ten sposób uzyskujemy sześcian podzielony na dwadzieścia cztery części, przedstawione na Rysunku 4.51.



Rysunek 4.51

Każda z tych części, przedstawiona na Rysunku 4.52, to ostrosłup o typie kątowym  $(3, 4, 4, 4, 8, 4, 4, 8)$ .



Rysunek 4.52

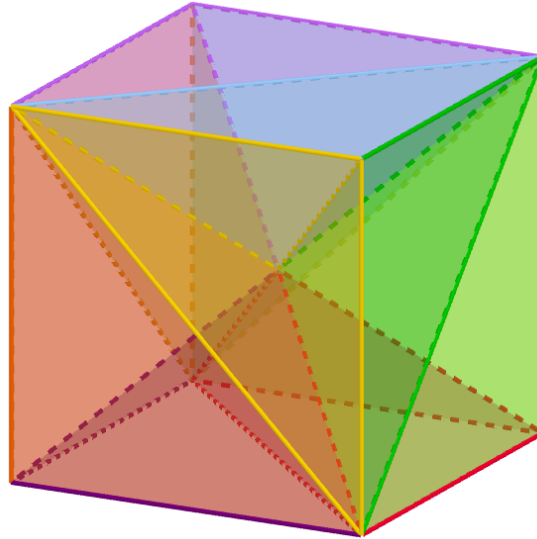
Odbijając teraz płytki parkietu sześciennego, podzielone na dwadzieścia cztery części w wyżej wymieniony sposób, zapełnimy przestrzeń w odbiciowy sposób ostrosłupami czworokątnym o typie kątowym  $(3, 4, 4, 4, 8, 4, 4, 8)$ .

3.  $(3, 4, 3, 4, 6, 6, 6, 6)$

Parkiet przestrzeni ostrosłupem o typie kątowym  $(3, 4, 3, 4, 6, 6, 6, 6)$  jest trudniejszy do wykazania. Musimy ten dowód podzielić na trzy części:

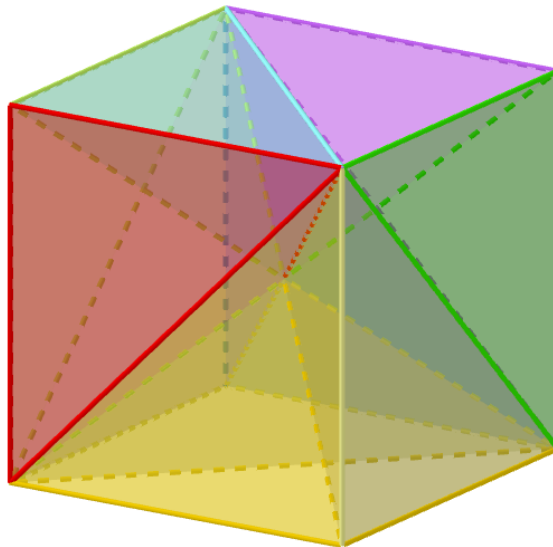
1. Podział sześciannu, aby uzyskać parkiet sześciannu czworoscianami o typie kątowym  $(4, 6, 6, 4, 6, 6)$ ;
2. Łączenie czworoscianów z sąsiednich podzielonych sześciannów, tak aby uzyskać zapełnienie przestrzeni ostrosłupami o typie kątowym  $(3, 4, 3, 4, 6, 6, 6, 6)$ ;
3. Stwierdzenie czy uzyskany w ten sposób parkiet jest odbiciowy.

Ad. 1. Rozważmy ponownie przestrzeń podzieloną na sześcianny. Użyjemy również podziału sześcienną płytki tego parkietu na sześć jednakowych ostrosłupów jak na Rysunku 4.49. Każdy z tych sześciu ostrosłupów podzielimy na dwie połówki, ale podział musi być dokonany w sposób jak na Rysunku 4.53. A mianowicie, podstawa każdego ostrosłupa jest połową ścian bocznej sześciannu uzyskaną przez podział jedną z przekątnych. Przekątne ścian bocznych sześciannu muszą być parami połączone w wierzchołkach bryły. Nazwijmy sześciann podzielony w ten sposób jako "czarny".



Rysunek 4.53

Sześcienne płytki sąsiednie do sześcianu podzielonego w sposób przedstawiony na Rysunku 4.53, zostają podzielone jak na Rysunku 4.54. Nazwiemy te klepki jako "białe".



Rysunek 4.54

Podział pokazany na Rysunku 4.53 jest symetryczny do podziału z Rysunku 4.54

Ad. 2. Łatwo zauważyć, że w sąsiadujących ze sobą sześcianach "białych" i "czarnych", przekątne podstaw będą się pokrywały. W związku z sąsiedowaniem ze sobą wyżej wymienionych płytek następuje sklejanie parami czworościanów z dwóch różnych sześcianów, mających wspólną trójkątną ścianę, będącą połówką wspólnej kwadratowej ściany tych dwóch sześcianów. W ten sposób powstanie odbiciowy ostrosłup czworokątny o typie kątowym  $(3, 4, 3, 4, 6, 6, 6, 6)$ . Sytuacja ta została pokazana na Rysunku 4.32. Niezależnie od ułożenia tych dwóch sześcianów, zawsze zostanie uzyskany ostrosłup o typie kątowym  $(3, 4, 3, 4, 6, 6, 6, 6)$ .

Ad. 3. Wyobraźmy sobie przestrzeń wypełnioną na zmianę "białymi" i "czarnymi" sześcianami. Następnie pomyślmy o podzieleniu tych sześcianów na zmianę, tak aby każdy "biały" sześcian sąsiadował tylko z "czarnymi" sześcianami. Wiemy, że między każdą parą stworzony zostanie ostrosłup  $(3, 4, 4, 4, 8, 4, 4, 8)$  z dwóch sklejonych czworościanów. Połączenie następuje w sposób, który został opisany powyżej. Otrzymany parkietaż jest parkietażem odbiciowym przestrzeni odbiciowymi ostrosłupami czworokątnymi o typie kątowym  $(3, 4, 3, 4, 6, 6, 6, 6)$ .

**Dowód Twierdzenia 1.1.**

Na podstawie analizy z Podrozdziału 4.4 istnieją co najwyżej trzy odbiciowe ostrosłupy  $n$ -kątne dla  $n \geq 4$ .

Na podstawie analizy z Podrozdziału 4.5 wszystkie trzy ostrosłupy rzeczywiście są klepkami odbiciowych parkietaży przestrzeni.

To kończy dowód Twierdzenia 1.1.



## Literatura

- [1] Patrycja Kumaszką *O kilku rodzajach regularnych parkietazy płaszczyzny* Wrocław 2015
- [2] Paulina Górská *Odbiciowe parkietaze przestrzeni o czworosciennych klepkach* Wrocław 2020
- [3] WolframAlpha <https://www.wolframalpha.com/> Dostęp: 29.08.2021. Wrocław 2020
- [4] Audet Daniel *Déterminants sphérique et hyperbolique de Cayley-Menger*, *Bulletin Association mathématique du Québec* tom LI, numer 2, Montreal, 2011.
- [5] <https://en.wikipedia.org/wiki/Tetrahedron>, Dostęp: 29.08.2021.