Uniwersytet Wrocławski

Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyki
specjalność nauczycielska

Anna Zwęglińska

PARKIETAŻE PÓŁOBROTOWE

Praca licencjacka napisana pod kierunkiem
prof. dr. hab. Jacka Świątkowskiego

Wrocław 2017

Załącznik Nr 1

do Zasad

.....
(imiona i nazwisko)

…… ….....
(aktualny adres do korespondencji) (numer PESEL)

.....
(adres e-mail)

.....
(wydział)

.....
(kierunek studiów)

....
(poziom i forma studiów) (numer albumu)

OŚWIADCZENIE O PRAWACH AUTORSKICH I DANYCH OSOBOWYCH

Ja niżej podpisany/a……. student/ka Wydziału…….kierunek…… oświadczam, że przedkładana praca dyplomowa na temat:

……

……

- jest mojego autorstwa i nie narusza autorskich praw w rozumieniu ustawy z dnia 4 lutego 1994 r. o prawie autorskim i prawach pokrewnych (tekst jednolity: Dz. U. z 2006 r. Nr 90, poz. 631, z późn. zm.) oraz dóbr osobistych chronionych prawem;
- nie zawiera danych i informacji uzyskanych w sposób niedozwolony;
- nie była wcześniej przedmiotem innej urzędowej procedury związanej z nadaniem dyplomu uczelni wyższej lub tytułu zawodowego;
- treść pracy dyplomowej przedstawionej do obrony, zawarta na przekazanym nośniku elektronicznym, jest identyczna z jej wersją drukowaną.

Oświadczam, iż zostałem/am poinformowany/a o prawie dostępu do treści moich danych osobowych oraz ich poprawiania.

Udostępnienie przez mnie danych osobowych ma charakter dobrowolny.

Wyrażam zgodę, na:

- udostępnienie mojej pracy dla celów naukowych i dydaktycznych;
- przetwarzanie moich danych osobowych w myśl ustawy z dnia 29 sierpnia 1997 r. o ochronie danych osobowych (tekst jednolity: Dz. U. z 2014 r., poz. 1182, z późn. zm.);
- umieszczenie mojej pracy w bazie danych Uczelni i jej przechowywanie przez okres stosowny do potrzeb Uczelni;
- wykorzystanie mojej pracy jako elementu komparatywnej bazy danych Uczelni;
- udostępnienie mojej pracy innym podmiotom celem prowadzenia kontroli antyplagiatowej prac dyplomowych i innych tekstów, które zostaną opracowane w przyszłości;
- porównywanie tekstu mojej pracy z tekstami innych prac znajdujących się w bazie porównawczej systemu antyplagiatowego i zasobach Internetu.

Wrocław, ……. .....

(rrrr – mm - dd) (czytelny podpis autora pracy)

Spis treści

Wstęp 4

1. **Parkietaże półobrotowe** 5

2. **Warunki konieczne na kształt płytki w parkietażu półobrotowym** 6

2.1 Warunki konieczne na kąty 6

2.2 Dalsze warunki konieczne dla sześciokąta 15

3. **Realizacja parkietaży półobrotowych** 16

3.1 Płytki trójkątne 16

3.2 Płytki sześciokątne 18

3.3. Płytki czworokątne 26

Bibliografia 32

Wstęp

W mojej pracy licencjackiej chciałabym poruszyć problem parkietaży półobrotowych. Parkietaż półobrotowy charakteryzuje się tym, że każde dwie płytki tego parkietażu, mające wspólny bok są swoimi obrazami, powstającymi przez obrót o 180° względem środka ich wspólnego boku.

Celem pracy jest znalezienie wszystkich parkietaży półobrotowych czyli klasyfikacja.

W pierwszym rozdziale umieszczone zostały definicje podstawowych pojęć, które będą stosowane w całej pracy, tj. parkietaż, parkietaż wielokątowy, wierzchołek parkietażu oraz interesująca nas najbardziej precyzyjna definicja parkietażu półobrotowego.

W rozdziale drugim, biorąc pod uwagę, że w parkietażu półobrotowym wszystkie płytki mają ten sam kształt, zastanowimy się nad warunkami, jakie muszą być spełnione, aby dany wielokąt mógł być płytką parkietażu półobrotowego.

W trzecim rozdziale uzasadnimy, że z wielokątów, omówionych w rozdziale drugim, które spełniają warunki konieczne, faktycznie można utworzyć parkietaże półobrotowe.

Ostatecznie, wynikiem całej pracy jest osiągnięcie następujących rezultatów:

- z każdej płytki, która jest trójkątem oraz z każdej płytki, która jest dowolnym czworokątem można utworzyć parkietaż półobrotowy;
- z płytki, która jest sześciokątem jest możliwe utworzenie parkietażu półobrotowego wtedy i tylko wtedy, gdy kąty wewnętrzne sześciokąta, leżące naprzeciw siebie mają równe miary oraz boki leżące naprzeciw siebie mają te same długości..
- z żadnej płytki, która jest różna od trójkąta, czworokąta i sześciokąta nie można utworzyć parkietażu półobrotowego.

W celu osiągnięcia zamierzonych rezultatów warto na początku zapoznać się z artykułem M. Kordosa, *Nadzwyczajne Kafelki* [1]oraz z pozycją książkową H. Steinhausa, *Kalejdoskop matematyczny* [2]. Informacje zawarte w tych źródłach nie obejmują ścisłych uzasadnień matematycznych ani nie przeprowadzają pełnej klasyfikacji interesujących nas parkietaży, jednak tworzą dobrą bazę wstępną do omawianego tematu.

W tym miejscu chciałabym jeszcze serdecznie podziękować promotorowi niniejszej pracy, Panu Jackowi Świątkowskiemu, za wszelką pomoc, wskazówki, poświęcony czas, wyrozumiałość oraz życzliwość.

1 . Parkietaże półobrotowe

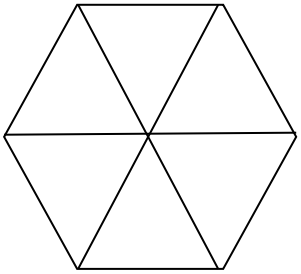
Definicja 1.1. *Parkietaż* to pokrycie płaszczyzny płytkami ściśle przylegającymi do siebie, czyli bez odstępów i bez nakładania się.

Definicja 1.2. *Parkietaż wielokątowy* to pokrycie płaszczyzny płytkami, które są wielokątami i które przylegają do siebie całymi bokami.

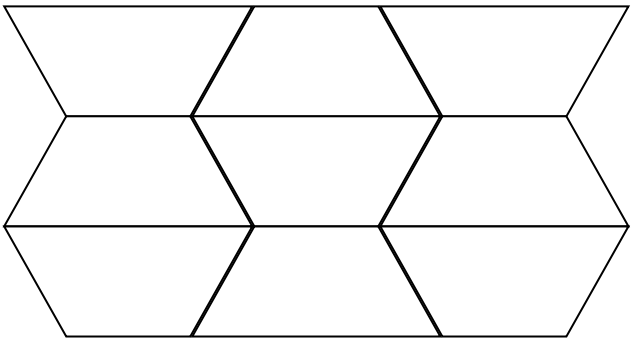
Definicja 1.3. *Wierzchołek parkietażu wielokątowego* to wspólny wierzchołek wielokątów, tworzących dany parkietaż.

Definicja 1.4. *Parkietaż półobrotowy* to parkietaż wielokątowy, w którym płytki są przystającymi wielokątami, ułożonymi w ten sposób, że dla dowolnych dwóch płytek parkietażu mających wspólny bok, każda z nich jest obrazem drugiej w obrocie o $180°$ względem środka tego wspólnego boku.

Przykłady parkietaży półobrotowych:



Rysunek 1



Rysunek 2

Uwaga 1.1. Zaobserwujmy, że jeśli dla pewnego wielokąta *P* istnieje parkietaż półobrotowy, którego płytki są przystające do *P*, to taki parkietaż jest jednoznacznie wyznaczony przez *P*. Wybierając płytkę, która jest pewnym wielokątem *P*, chcemy pokryć płaszczyznę przystającymi do tego wielokąta płytkami. Wypełnianie obszaru rozpoczynamy od ułożenia pierwszej płytki. Kolejne płytki układamy w ten sposób, aby dla ułożonej już i nowej płytki, które mają wspólny bok, jedna z nich była obrazem drugiej w obrocie o $180°$ względem środka wspólnej krawędzi. Jeżeli uda się nam dokonać takiego pokrycia płaszczyzny, to znaczy, że utworzyliśmy parkietaż półobrotowy i to w sposób jednoznaczny.
Gdy zaistnieje sytuacja inna od opisanej, oznacza to, że wybrany wielokąt P nie nadaje się do tego, aby mógł utworzyć parkietaż półobrotowy. Przykładem jest sytuacja, gdy układając klepki według omówionego sposobu okazuje się, że część jednej płytki pokrywa się z fragmentem płytki wcześniej ułożonej.

2. Warunki konieczne na kształt płytki w parkietażu półobrotowym

W rozdziale tym zajmiemy się poszukiwaniem warunków, jakie muszą być spełnione, aby mógł zaistnieć parkietaż półobrotowy. Rozważać będziemy warunki, jakie musi spełniać wielokąt będący płytką takiego parkietażu. Następnie pod kątem tych warunków koniecznych rozważać będziemy kolejne n −kąty, dla $n \in \{3,4, \dots\}$.

Nasze badania rozpoczniemy od wyboru jednego wierzchołka danego wielokąta. Będziemy obserwować, w jaki sposób dana płytka oraz płytki do niej sąsiednie mogą pokryć fragment płaszczyzny wokół wybranego wierzchołka.

2.1 Warunki konieczne na kąty

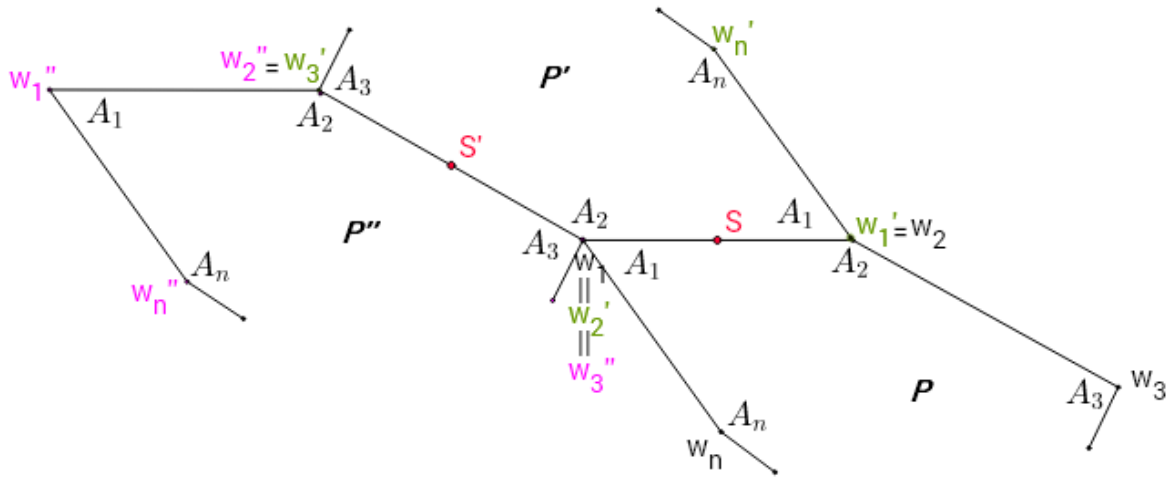
Zanim przejdziemy do analizowania poszczególnych $n-$ kątów, przypomnijmy sobie znane własności miarowe wielokątów, które będą niezbędne przy naszych badaniach oraz zapoznajmy się z kluczową obserwacją, z której wielokrotnie będziemy korzystać w dalszej części rozdziału.

Fakt 2.1. Suma miar kątów wewnętrznych w n −kącie jest równa

$$(n-2) \cdot 180°.$$

Obserwacja 2.2. Weźmy dowolny wielokąt P. Niech $w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$ będą kolejnymi wierzchołkami tego wielokąta, natomiast $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ niech oznaczają jego kolejne kąty wewnętrzne odpowiednio przy wierzchołkach $w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$. Przez S oznaczmy środek boku wielokąta P, łączącego w_1 z w_2 (patrz *Rysunek 3*). Rozważaną płytkę P obracamy o $180°$ względem S. Powstaje nam dzięki temu obraz płytki P, który oznaczamy przez P'. Następnie dokonujemy obrotu o $180°$ względem środka tego boku płytki P', do którego należy wierzchołek w_1i który jest różny od boku zawierającego S. Niech S'oznacza środek tego boku. W wyniku tego obrotu powstaje obraz płytki P'. Oznaczmy go przez P". Czynność tę możemy powtarzać. Zauważmy, co dzieje się wokół wierzchołka w_1. Przy pojedynczym, wybranym wierzchołku kąty w kolejnych obrazach wielokąta P tworzą sekwencję taką, jak w danym wielokącie, czyli kolejno $A_1, A_2, A_3, \dots A_n, A_{n+1}, A_{n+2} \dots$ przy czym w powyższej notacji posługujemy się konwencją, że $A_{n+1} = A_1$, $A_{n+2} = A_2$ itd. Niech k oznacza liczbę płytek parkietażu, przylegających do rozważanego wierzchołka parkietażu. Przypomnijmy, że n oznacza liczbę kątów wielokąta.

- Gdy $k < n$ wtedy nie każdy kąt wielokąta P_1 znajdzie się wokół wybranego wierzchołka parkietażu.
- Gdy $k > n$ wtedy sekwencja kątów $A_1, A_2, A_3, \dots A_n$ zacznie się powtarzać i po kącie A_n znowu nastąpi kąt A_1, podobnie po kącie A_1będzie kąt A_2 itd., aż do zapełnienie płaszczyzny wokół pojedynczego wierzchołka.



Rysunek 3

Przechodzimy teraz do analizy warunków koniecznych na kształt płytki P parkietażu półobrotowego. Zastanówmy się, czy możliwa jest sytuacja, aby kolejno pojawiające się kąty $A_1, A_2, A_3, \ldots$ wielokąta utworzyły zamknięty układ wokół jednego wierzchołka, w taki sposób, aby ich suma wynosiła $360°$.

Naszą analizę rozpocznijmy od n –kąta o najmniejszej możliwej liczbie boków – od trójkąta. Przez k będziemy oznaczać liczbę płytek parkietażu, przylegających do rozważanego wierzchołka parkietażu, zakładając, że utworzy się zamknięty układ płytek.

1. $\boldsymbol{n = 3}$

Załóżmy, że A_1, A_2, A_3 są kolejnymi kątami wewnętrznymi trójkąta.

Będziemy sprawdzać, czy dla poszczególnych wartości k jest możliwe, aby k płytek przystających do ustalonego trójkąta zapełniło płaszczyznę wokół wybranego wierzchołka, tworząc fragment parkietażu półobrotowego.

- $\boldsymbol{k = 2}$

  Ponieważ wiemy, że suma miar kątów wewnętrznych trójkąta wynosi $180°$, znaczy to, że

  $A_1 + A_2 + A_3 = 180°$,

  zatem $A_1 + A_2 < 180°$, a więc tym bardziej $A_1 + A_2 < 360°$.

  Oznacza to, że układ dwóch kątów trójkąta nie pokryje szczelnie fragment płaszczyzny wokół pojedynczego wierzchołka.

- $\boldsymbol{k = 3}$

  Ponieważ wiemy, że suma miar kątów wewnętrznych trójkąta wynosi $180°$, znaczy to, że

  $A_1 + A_2 + A_3 = 180°$,

ale $180° \neq 360°$,
zatem konfiguracja trzech kątów trójkąta nie utworzy zamkniętego układu wokół jednego wierzchołka, w taki sposób, aby suma tych trzech kątów wynosiła $360°$.

- $\boldsymbol{k = 4}$
  Rozważmy, czy możliwe jest, aby cztery kolejne kąty trójkąta wystarczyły do pokrycia fragmentu płaszczyzny wokół jednego wierzchołka.
  Wiemy, że $A_1 + A_2 + A_3 = 180°$ oraz $A_1 < 180°$,
  stąd wynika, że
  $A_1 + A_2 + A_3 + A_1 < 360°$.

  Stąd wynika, że ten przypadek jest niemożliwy.
- $\boldsymbol{k = 5}$
  Podobna sytuacja zachodzi dla układu pięciu kolejnych kątów. Mamy nierówność

  $A_1 + A_2 + A_3 + A_1 + A_2 < 360°$,

  ponieważ $A_1 + A_2 + A_3 = 180°$ oraz $A_1 + A_2 < 180°$, zatem przypadek ten również nie jest możliwy.
- $\boldsymbol{k = 6}$
  Rozważmy sytuację, kiedy wokół wierzchołka pojawi się sześć kątów.
  Zauważmy, że $A_1 + A_2 + A_3 + A_1 + A_2 + A_3 = 360°$,
  zatem konfiguracja sześciu kątów trójkąta utworzy fragment parkietażu wokół pojedynczego wierzchołka.

- $\boldsymbol{k > 6}$
  Z powyższych rozważań wiemy, że $A_1 + A_2 + A_3 + A_1 + A_2 + A_3 = 360°$, zatem jeżeli będziemy dodawać kolejne kąty, to ich suma zawsze będzie większa niż $360°$. Oznacza to, że w parkietażu półobrotowym o płytkach trójkątnych liczba płytek otaczających dany wierzchołek nie może być większa niż 6.

Podsumowując nasze powyższe rozważania możemy dojść do wniosku, że tylko konfiguracja sześciu jednakowych trójkątnych płytek ma szansę utworzyć fragment parkietażu półobrotowego wokół pojedynczego wierzchołka.

2. $\boldsymbol{n = 4}$

Załóżmy, że A_1, A_2, A_3, A_4 są kolejnymi kątami wewnętrznymi czworokąta. Będziemy sprawdzać, czy dla poszczególnych wartości k jest możliwe, aby k płytek przystających do ustalonego czworokąta zapełniło płaszczyznę wokół wybranego wierzchołka, zgodnie z regułami parkietażu półobrotowego.

- $\boldsymbol{1 < k < 4}$

Korzystając z Faktu 2.1. wiemy, że suma miar kątów wewnętrznych czworokąta wynosi $360°$, a zatem otrzymujemy, że

$$A_1 + A_2 < 360°$$
$$A_1 + A_2 + A_3 < 360°$$

Wnioskujemy stąd, że układ dwóch lub trzech jednakowych czworokątnych płytek nie wystarczy do utworzenia fragmentu parkietażu wokół pojedynczego wierzchołka.

- $\boldsymbol{k = 4}$
  Wiemy, że
  $A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 360°$.

  Zauważmy, że nie ma przeszkód w sprawdzanym warunku do tego, aby cztery jednakowe płytki czworokątne utworzyły fragment parkietażu półobrotowego naokoło ustalonego wierzchołka.
- $\boldsymbol{k > 4}$
  Korzystając z wcześniejszych rozważań, wiemy, że

  $A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 360°$.

Wnioskujemy stąd, że dodawanie kolejnych kątów będzie tworzyło sumę, która będzie większa od $360°$, zatem niemożliwe jest utworzenie parkietażu wokół jednego wierzchołka z liczby płytek większej niż 4.

Podsumowując nasze powyższe rozważania możemy dojść do wniosku, że tylko konfiguracja czterech kątów czworokąta ma szansę utworzyć fragment parkietażu półobrotowego wokół pojedynczego wierzchołka.

3. $\boldsymbol{n = 5}$

Załóżmy, że A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 są kolejnymi kątami wewnętrznymi pięciokąta.
Będziemy sprawdzać, czy dla poszczególnych wartości k jest możliwe, aby k płytek przystających do ustalonego pięciokąta zapełniło płaszczyznę wokół wybranego wierzchołka, tworząc fragment parkietażu półobrotowego.

- $\boldsymbol{k = 2}$
  Niech A_1, A_2 będą kątami, które zapełniają całkowicie fragment płaszczyzny wokół wierzchołka. Korzystając z Obserwacji 2.2. wiemy, że wokół pojedynczego wierzchołka, obchodząc go wielokrotnie na około, cyklicznie będą pojawiać się kąty $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_1, A_2, A_3, \ldots$ Ponieważ już miary kątów A_1, A_2 sumują się do $360°$, zatem powyższy ciąg kątów w istocie będzie postaci $A_1, A_2, A_1, A_2, A_1, \ldots$ Stąd otrzymujemy następujące równości:

  $A_1 = A_3 = A_5$ oraz $A_2 = A_4$

Korzystając z Faktu 2.1. wiemy, że suma miar kątów w pięciokącie wynosi $540°$. Ale zauważmy, że

$A_1 + A_2 = 360°$ oraz $A_3 + A_4 = 360°$,
zatem
$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 > 720°$,

czyli otrzymaliśmy sprzeczność.

Stąd wynika, że w rozważanym przypadku nie utworzy się fragment parkietażu półobrotowego wokół pojedynczego wierzchołka.

- $\boldsymbol{k = 3}$

Niech A_1, A_2, A_3 będą kątami, które zapełniają całkowicie fragment płaszczyzny wokół wierzchołka. Z Obserwacji 2.2 wiemy, że wokół pojedynczego wierzchołka cyklicznie będą pojawiać się kąty $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_1, A_2$ … Ponieważ już miary kątów A_1, A_2, A_3 sumują się do kąta pełnego, zatem powyższy ciąg kątów w istocie będzie postaci $A_1, A_2, A_3, A_1, A_2, A_3, A_1$ … Stąd otrzymujemy następujące równości

$A_1 = A_4$, $A_2 = A_5$, $A_3 = A_1$, $A_1 = A_2$.

Stąd wynika, że

$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_5$,

Korzystając z tego, że suma miar kątów wewnętrznych w pięciokącie wynosi $540°$, wiemy, że jeden kąt wewnętrzny tego pięciokąta wynosi $108°$. Ale

$A_1 + A_2 + A_3 = 3 \cdot 108° = 324° \neq 360°$.

Oznacza to, że analizowana konfiguracja nie utworzy fragmentu parkietażu półobrotowego.

- $\boldsymbol{k = 4}$

Rozważmy, czy możliwa jest sytuacja, aby cztery kolejne kąty pięciokąta utworzyły odpowiednią konfigurację wokoło jednego wierzchołka.
Załóżmy, że wokół jednego wierzchołka schodzą się cztery kąty pięciokąta:
A_1, A_2, A_3, A_4. Ponieważ do dyspozycji mamy więcej kątów niż miejsc, zatem z Obserwacji 2.2. wynika, że $A_1 = A_5$. W tym momencie rozpoczynalibyśmy nową sekwencję kątów. Po kącie A_5 następowałby kąt A_2 , który byłby równy mierze kąta A_1. Po kącie $A_2 = A_1$ pojawiłby się kąt $A_3 = A_2$. Dokładając kolejno płytki wokół wierzchołka otrzymujemy następujące równości:

$$A_2 = A_1, \qquad A_3 = A_2, \qquad A_4 = A_3, \qquad A_5 = A_4$$

Po pięciokrotnym powtórzeniu tego układu wokół wierzchołka otrzymamy, że $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_5$.
Wiemy zatem, że miara każdego kąta wewnętrznego tego pięciokąta wynosi $108°$, zatem

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 4 \cdot 108° = 432° \neq 360°.$$

Oznacza to, że rozważana konfiguracja nie utworzy fragmentu parkietażu półobrotowego wokół wierzchołka.

- $\boldsymbol{k = 5}$
  Niech A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 będą kątami, które zapełniają całkowicie fragment płaszczyzny wokół wierzchołka. Oznacza to, że kąty te sumują się do kąta pełnego, ale korzystając z Twierdzenia 1.1. wiemy, że suma miar kątów wewnętrznych pięciokąta wynosi $540°$, co prowadzi do sprzeczności
  $360° \neq 540°$.
  Wnioskujemy stąd, że wokół wierzchołka kąty pięciokąta nie utworzą zamkniętego układu.
- $\boldsymbol{k > 5}$
  Niech $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_1$ … będą kolejnymi kątami, które pojawiają się wokół wierzchołka.
  Wiemy, że $A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = 540°$.
  Jeżeli będziemy dodawać kolejne kąty wokół wierzchołka, to suma ta będzie większa od $540°$, a więc i większa od $360°$, zatem niemożliwe jest utworzenie parkietażu półobrotowego.

Podsumowując nasze powyższe rozważania możemy dojść do wniosku, że żadna konfiguracja kątów pięciokąta nie ma szansy na utworzenie fragmentu parkietażu półobrotowego wokół pojedynczego wierzchołka.

4. $\boldsymbol{n = 6}$
Załóżmy, że $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ są kolejnymi kątami wewnętrznymi sześciokąta.
Sprawdzimy, czy dla poszczególnych wartości k jest możliwe, aby k płytek przystających do ustalonego sześciokąta zapełniło płaszczyznę wokół wybranego wierzchołka, tworząc fragment parkietażu półobrotowego.

- $\boldsymbol{k = 2}$
  Niech A_1, A_2 będą kątami, które zapełniają całkowicie fragment płaszczyzny wokół wierzchołka.
  Korzystając z Obserwacji 2.2., otrzymujemy, że

  $A_1 = A_3 = A_5$ oraz $A_2 = A_4 = A_6$.

  Korzystając z faktu, że suma miar kątów wewnętrznych sześciokąta wynosi $720°$, możemy zapisać następującą równość

$3A_1 + 3A_2 = (A_1 + A_3 + A_5) + (A_2 + A_4 + A_6) = 720°$,
co oznacza, że

$$A_1 + A_2 = 240°,$$

ale
$240^\circ \neq 360^\circ$,

zatem nie jest możliwe utworzenie zamkniętego układu dwóch kątów sześciokąta wokół jednego wierzchołka.

- $\boldsymbol{k = 3}$
  Rozważmy, czy trzy kąty sześciokąta, otaczające wierzchołek wystarczą na pokrycie płaszczyzny wokół tego wierzchołka, tworząc tym samym fragment parkietażu półobrotowego.
  Z Obserwacji 1.1 wynikają następujące równości:

$$A_1 = A_4, \quad A_2 = A_5, \quad A_3 = A_6$$

oznacza to, że aby było możliwe, że $A_1 + A_2 + A_3 = 360°$,to musiałoby zachodzić, że

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 = 720°,$$

ale wiemy, że suma miar kątów wewnętrznych sześciokąta wynosi 720°, zatem wnioskujemy, że rozważana sytuacja jest potencjalnie możliwa. Trzy sześciokąty mogą utworzyć fragment parkietażu półobrotowego wokół jednego wierzchołka, pod warunkiem, że kąty wewnętrzne sześciokąta, leżące naprzeciw siebie będą miały takie same miary.

- $\boldsymbol{k = 4}$
  Niech A_1, A_2, A_3, A_4 będą kolejnymi kątami sześciokąta, zapełniającymi fragment płaszczyzny wokół ustalonego wierzchołka, zgodnie z regułami parkietażu półobrotowego. Z Obserwacji 1.1 wynika, że

$A_1 = A_5 = A_3$, $A_2 = A_6 = A_4$,

A więc, aby było możliwe, że

$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 360°$,
to musiałoby zachodzić, że

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 360° \\ A_5 + A_6 + A_1 + A_2 = 360° \\ A_3 + A_4 + A_5 + A_6 = 360° \end{cases}$$

Dodając obustronnie stronami otrzymujemy, że

$2A_1 + 2A_2 + 2A_3 + 2A_4 + 2A_5 + 2A_6 = 1080°$.

Ale korzystając z tego, że suma miar kątów wewnętrznych sześciokąta wynosi $720°$, otrzymujemy

$$2(A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6) = 1440°.$$

Ponieważ
$1080° \neq 1440°$,

otrzymaliśmy sprzeczność, czyli rozważana liczba płytek nie utworzy wokół jednego wierzchołka fragmentu parkietażu półobrotowego.

- $\boldsymbol{k = 5}$
  Niech A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 będą kolejnymi kątami sześciokąta, zapełniającymi fragment płaszczyzny wokół ustalonego wierzchołka, zgodnie z regułami parkietażu półobrotowego. Obserwując sytuację wokół wierzchołka dochodzimy do następującej równości:

  $$A_1 = A_6 = A_5 = A_4 = A_3 = A_2.$$

  Korzystając z tego, że suma miar kątów wewnętrznych sześciokąta wynosi $720°$, wnioskujemy, że miara każdego kąta wewnętrznego w naszym sześciokącie wynosi $120°$. Otrzymujemy zatem

  $$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = 5 \cdot 120° = 600°,$$
  ale
  $600° \neq 360°$,
  więc rozważana sytuacja nie jest możliwa.
- $\boldsymbol{k \geq 6}$
  Dzięki Faktowi 2.1 wiemy, że

  $$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 = 720°.$$

  Ponieważ $720° > 360°$, zatem niemożliwe jest pokrycie płaszczyzny wokół jednego wierzchołka dla $k = 6$. Tym bardziej niemożliwe jest to dla $k > 6$, ponieważ kolejno pojawiające się kąty wokół wybranego wierzchołka będą tworzyły sumę większą niż $720°$, tym samym będzie to suma większa niż $360°$.
  Zatem zauważmy, że rozważana sytuacja dla $k \geq 6$ jest niemożliwa.

Podsumowując nasze powyższe rozważania dochodzimy do wniosku, że tylko konfiguracja trzech jednakowych sześciokątów ma szansę utworzyć fragment parkietażu półobrotowego wokół pojedynczego wierzchołka, pod warunkiem jedynie, że kąty wewnętrzne sześciokąta, leżące naprzeciw siebie będą miały jednakowe miary.

5. $\boldsymbol{n > 6}$

Niech $A_1, A_2, \dots, A_n$ będą kolejnymi kątami wewnętrznymi rozważanego $n-$ kąta.

Niech k oznacza liczbę płytek, zapełniających szczelnie fragment płaszczyzny wokół pojedynczego wierzchołka zgodnie z regułami parkietażu półobrotowego. Zauważmy, że jeżeli będziemy okrążać dany wierzchołek n razy, to wtedy pojawiać się będą kolejno kąty:
$A_1,\ A_2, \dots, A_n,\ A_1,\ A_2, \dots,\ A_n, \dots,\ A_1, \dots,\ A_n$.

Ciąg $A_1, A_2, \dots, A_n$ pojawi się k razy wokół tego wierzchołka. Dzięki temu otrzymujemy ciąg długości $n \cdot k$.

Wyznaczmy sumę miar kątów w otrzymanym ciągu. Niech S oznacza tę sumę. Będziemy ją obliczać na dwa sposoby.

Sposób 1.

Ponieważ wokół danego wierzchołka $k-$ krotnie pojawiają się kolejne kąty rozważanego $n-$ kąta, możemy zapisać, że

$$S = k \cdot (suma\ miar\ kątów\ wewnętrznych\ w\ n-kącie) =$$

$$k \cdot (A_1 + \dots + A_n)$$

Korzystając z Faktu 2.1. powyższą równość możemy zapisać w następujący sposób

$$S = k \cdot (A_1 + \dots + A_n) = k \cdot (n-2) \cdot 180°$$

Sposób 2.

Ponieważ wykonujemy n pełnych obrotów, to sumę miar kątów w danym ciągu możemy obliczyć mnożąc liczbę pełnych obrotów przez $360°$.

$S = n \cdot 360°$.

Porównując wyliczenia sumy miar kątów sposobami 1 i 2, otrzymujemy równość

$$k(n-2) \cdot 180° = n \cdot 360°\,.$$

Dzieląc ją obustronnie przez $180°$, mamy

$k(n-2) = 2n$.

Wyznaczając k, otrzymujemy

$$k = 2 \cdot \frac{n}{n-2}$$

Po przekształceniu otrzymujemy

$$k = 2\left(1 + \tfrac{2}{n-2}\right).$$

Po wymnożeniu mamy

$$k = 2 + \frac{4}{n-2}: \qquad (*)$$

Widać, że $k > 2$. Gdy $n > 6$, mamy nierówność

$$n - 2 > 4.$$

Dzieląc obustronnie przez $(n-2)$, otrzymujemy

$$1 > \frac{4}{n-2}.$$

Po dodaniu 2 do obu stron nierówności, mamy

$$3 > 2 + \frac{4}{n-2}.$$

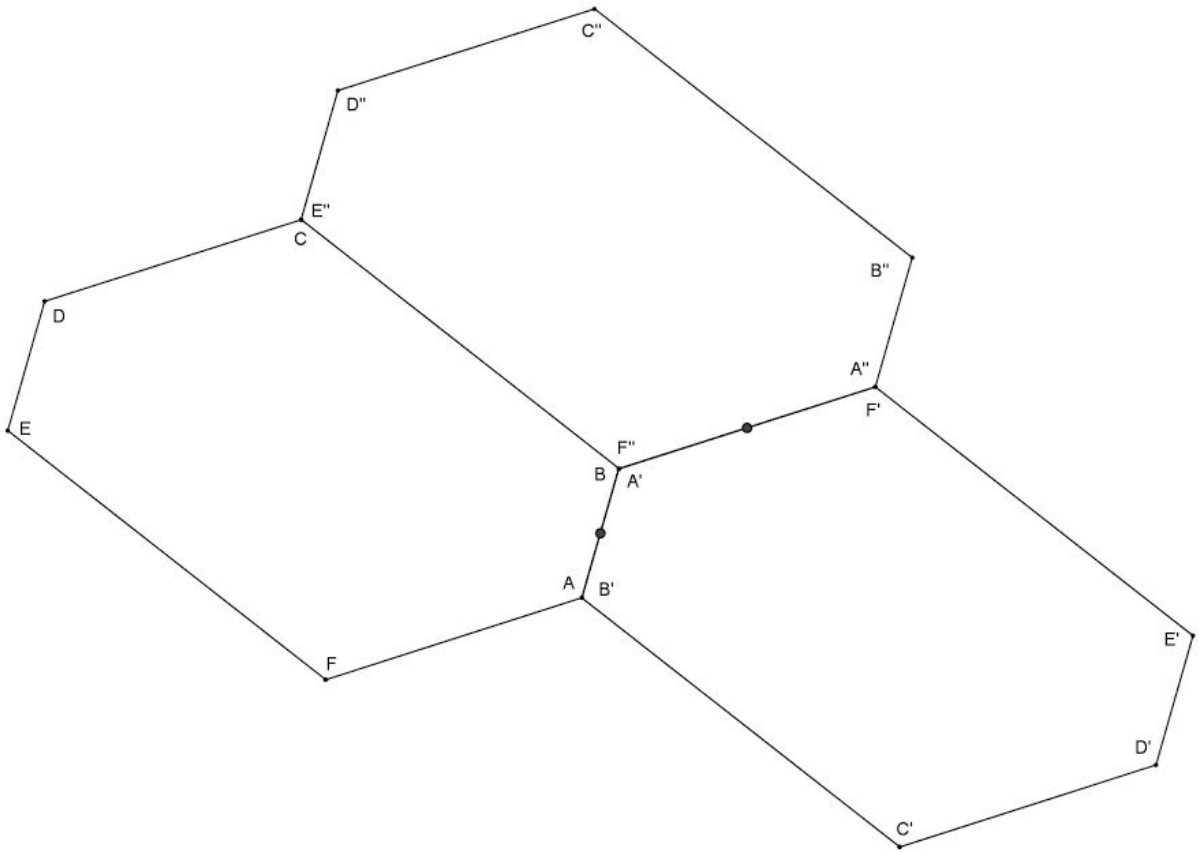
Korzystając z (*) zauważamy, że $k < 3$. Ostatecznie otrzymujemy nierówność $2 < k < 3$, a to oznacza, że dla wielokątów o liczbie boków większej od sześciu, liczba płytek wokół jednego wierzchołka nie należy do liczb naturalnych, czyli nie pokryje płaszczyzny zgodnie z warunkami parkietażu półobrotowego.

Reasumując, możemy stwierdzić, że z każdej płytki, która jest trójkątem oraz z każdej płytki, która jest dowolnym czworokątem istnieje szansa na utworzenie parkietażu półobrotowego. Z płytki, która jest sześciokątem istnieje szansa na utworzenie parkietażu półobrotowego tylko wtedy, gdy kąty wewnętrzne sześciokąta, leżące naprzeciw siebie mają równe miary. Natomiast z żadnej płytki, która jest różna od trójkąta, czworokąta i sześciokąta nie można utworzyć parkietażu półobrotowego.

2.2 Dalsze warunki konieczne dla sześciokąta

W podrozdziale tym przekonamy się, że warunek na przystawanie przeciwległych kątów nie jest jedynym warunkiem koniecznym na sześciokątną płytkę, aby dało się z niej utworzyć parkietaż półobrotowy.

Rozważmy sześciokąt $ABCDEF$ spełniający warunek równości przeciwległych boków. Z poprzedniego podrozdziału wiemy, że w takim wypadku tworząc fragment parkietażu półobrotowego, trzy kopie sześciokąta zapełnią fragment płaszczyzny naokoło wierzchołka. Dokonajmy półobrotu względem środka boku AB. Powstaje nam nowy sześciokąt $A'B'C'D'E'F'$, który jest obrazem wyjściowego sześciokąta. Następnie dokonajmy półobrotu sześciokąta $A'B'C'D'E'F'$ względem środka boku $A'F'$. Powstaje nam kopia sześciokąta $A'B'C'D'E'F'$, którą nazwiemy $A''B''C''D''E''F''$ (patrz *Rysunek 4*). Zauważmy, że $|BC| = |E"F"|$. Oznacza to, że $|BC|$ musi być równe $|EF|$, czyli leżące naprzeciwko siebie boki BC oraz EF sześciokąta mają jednakowe długości. Podobne rozważania pokazują, że dwa, leżące naprzeciw siebie boki mają równe długości, czyli, że $|AB| = |DE|$ oraz $|AF| = |CD|$.



Rysunek 4

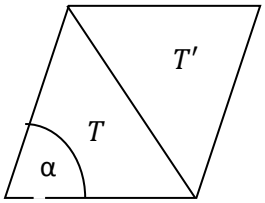
Podsumowując powyższe rozważania dochodzimy do wniosku, że kolejnym warunkiem koniecznym dla sześciokąta na zaistnienie fragmentu parkietażu jest to, że przeciwległe boki musza być tej samej długości.

3. Realizacja parkietaży półobrotowych

W rozdziale tym zajmiemy się uzasadnieniem tego, że z wielokątów omówionych w rozdziale drugim, które spełniają warunki konieczne faktycznie można utworzyć parkietaże półobrotowe.

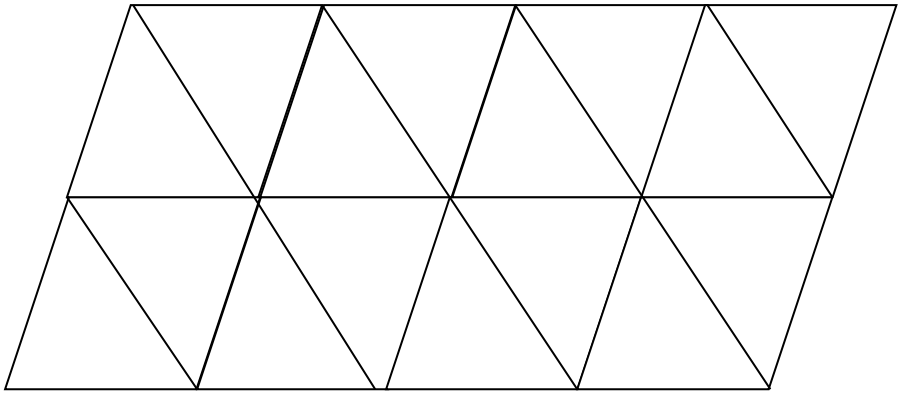
3.1 Płytki trójkątne

Rozpoczniemy od płytki, która jest dowolnym trójkątem T. Z płytki T oraz płytki T' do niej przystającej tworzymy równoległobok R w taki sposób, że płytka T' jest obrazem przez półobrót płytki T wokół środka jednego z boków płytki T (patrz *Rysunek 5*).



Rysunek 5

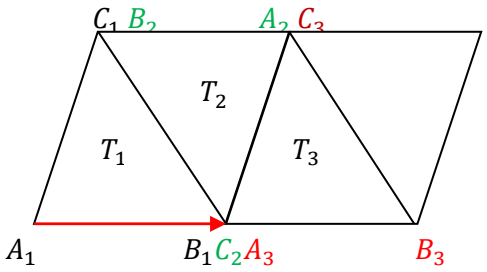
Powstałym równoległobokiem R parkietujemy płaszczyznę w następujący sposób. Weźmy dowolną prostą k należącą do danej płaszczyzny. Po obu stronach prostej k nakreślmy kolejno nieskończenie wiele prostych do niej równoległych, w ten sposób, aby każde dwie sąsiednie proste były w jednakowej odległości od siebie- równej długości jednej z wysokości równoległoboku. W ten sposób płaszczyzna została podzielona na jednakowe, pasowe obszary, które wyznaczają sąsiadujące proste równoległe. Weźmy teraz prostą l, która tworzy z prostą k kąt taki, jak w równoległoboku R- kąt α (patrz Rysunek). Po każdej stronie prostej l poprowadźmy nieskończenie wiele prostych równoległych do prostej l również w ten sposób, aby odległość pomiędzy kolejnymi dwoma prostymi była taka sama, ale równa długości drugiej wysokości równoległoboku R. Zauważmy, że proste równoległe do prostej k oraz proste równoległe do prostej l, poprowadzone na płaszczyźnie, dzielą ją na jednakowe czworokąty, którymi są równoległoboki przystające do naszego równoległoboku R. W ten sposób zapełniliśmy płaszczyznę przystającymi do siebie równoległobokami. Teraz w każdym z tych równoległoboków prowadzimy jego przekątną, w taki sposób, aby otrzymać dwa identyczne trójkąty, jak w równoległoboku R. Zauważamy, że po wykonaniu tej czynności płaszczyzna została pokryta trójkątami, które są przystające do trójkąta T (patrz *Rysunek 6*).Chcemy uzasadnić, że parkietaż, który został utworzony w ten sposób jest parkietażem półobrotowym.



Rysunek 6

Po pierwsze, musimy uzasadnić, że każda para przyległych trójkątów, zawarta w kopii równoległoboku R jest ułożona zgodnie z warunkami na półobrotowość, czyli każdy z trójkątów jest obrazem drugiej w obrocie o $180°$. Ale zauważmy, że ten warunek wynika już z konstrukcji równoległoboku R.

Po drugie, uzasadnienia wymaga fakt, że trójkąty przyległe, zawarte w sąsiednich równoległobokach również spełniają warunki na półobrotowość. Weźmy dowolny fragment parkietażu, składający się z czterech kopi płytki T, zawartych w dwóch przyległych równoległobokach (patrz *Rysunek 7*). Oznaczmy wierzchołki klepki T_1 przez A_1, B_1, C_1. Wiemy już, że płytka T_2 jest obrazem płytki T_1 w obrocie o $180°$ wokół środka ich wspólnego boku zatem A_2, B_2, C_2 będą oznaczać odpowiednie wierzchołki klepki T_2 będące obrazami wierzchołków A_1, B_1, C_1 przez ten obrót. Płytka T_3 jest obrazem płytki T_1 przez translację o wektor A_1B_1. Oznaczmy jej wierzchołki przez A_3, B_3, C_3 . Zauważmy, że wierzchołki A_3, B_3, C_3 są wtedy obrazami wierzchołków trójkąta T_2 w obrocie o $180°$ względem środka boku A_2C_2. Tym samym, przyległe do siebie trójkąty, zawarte w sąsiednich równoległobokach też spełniają warunki na półobrotowość. To kończy uzasadnienie, że każdy trójkąt T jest płytką parkietażu półobrotowego.



Rysunek 7

3.2 Płytki sześciokątne

Przy realizacji parkietaży półobrotowych utworzonych z przystających sześciokątnych płytek korzystać będziemy z poniższych Lematów.

Lemat 3.2.1. (o sześciokącie). Jeśli w sześciokącie kąty leżące naprzeciwko siebie mają jednakowe miary to boki leżące naprzeciwko siebie są równoległe. Ponadto jeśli w takim sześciokącie boki leżące naprzeciw siebie mają te same długości, to sześciokąt ten ma środek symetrii.

Dowód powyższego Lematu będzie dotyczył sześciokątów wypukłych i będzie składał się z dwóch części:

a) Dowód implikacji: Jeśli w sześciokącie kąty leżące naprzeciwko siebie mają jednakowe miary to boki leżące naprzeciwko siebie są równoległe.
b) Dowód drugiego zdania Lematu: Jeśli w takim sześciokącie boki leżące naprzeciw siebie mają te same długości, to sześciokąt ten ma środek symetrii.

Uzasadnienie dla sześciokątów niewypukłych pomijamy, choć nie jest ono wiele trudniejsze. Pojawiają się jednak rozmaite przypadki, które ciężko ująć w kompletnym opisie.

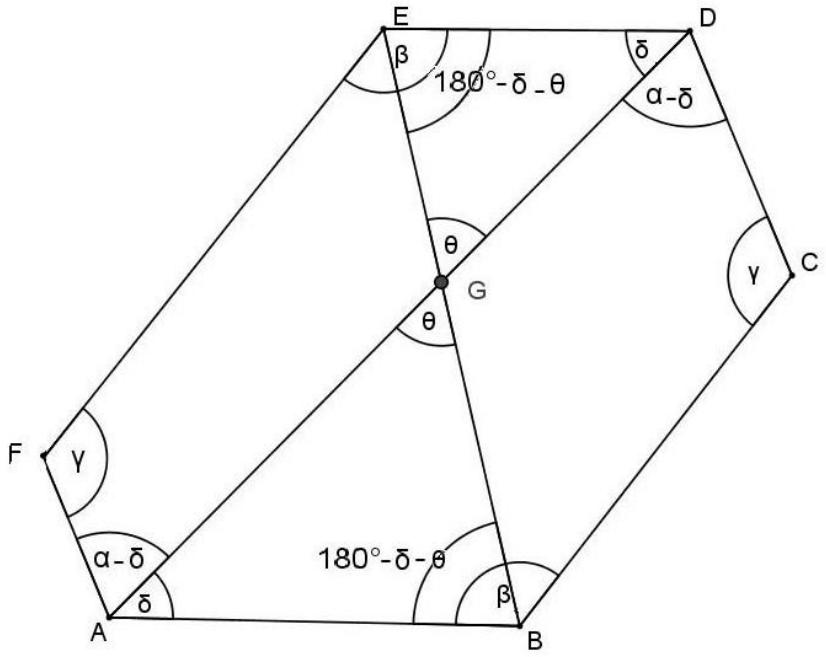
Dowód a): Niech A, B, C, D, E, F będą kolejnymi wierzchołkami sześciokąta. Niech α, β, γ będą trzema kolejnymi kątami danego sześciokąta leżącymi odpowiednio przy wierzchołkach A, B, C. Korzystając z założenia, że w sześciokącie kąty leżące naprzeciwko siebie mają te same miary, otrzymujemy następującą sekwencję kątów: $\alpha, \beta, \gamma, \alpha, \beta, \gamma$, występującą w tym sześciokącie kolejno przy wierzchołkach A, B, C, D, E, F (patrz *Rysunek 8*). Z Faktu 2.1 wiemy, że suma miar kątów wewnętrznych w sześciokącie wynosi $720°$, czyli

$$2(\alpha + \beta + \gamma) = 720°.$$

Dzieląc obustronnie przez 2 mamy:

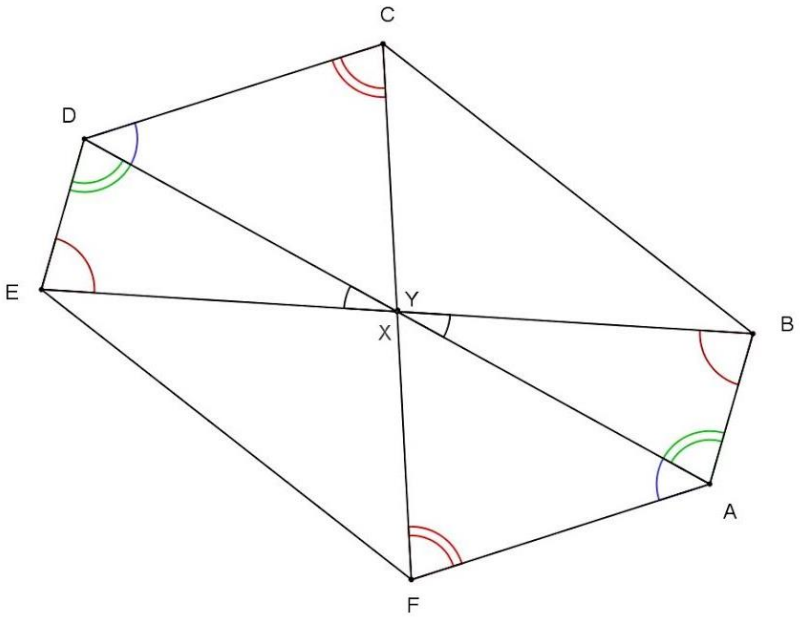
$$\alpha + \beta + \gamma = 360°.$$

Poprowadźmy przekątną tego sześciokąta, która będzie łączyć wierzchołek A z wierzchołkiem D. Przekątna ta podzieliła rozważany przez nas sześciokąt na dwa czworokąty (czworokąt $ABCD$ oraz $ADEF$) oraz $\measuredangle FAB = \alpha$ na dwa kąty: $\measuredangle DAB = \delta$ oraz $\measuredangle FAD = \alpha - \delta$. Korzystając z tego, że suma miar kątów w czworokącie wynosi $360°$ oraz, że $\alpha + \beta + \gamma = 360°$, otrzymujemy, że $\measuredangle ADC = \alpha - \delta$. Poprowadźmy teraz przekątną, łączącą wierzchołek B z wierzchołkiem E. Niech G będzie punktem przecięcia się przekątnej AD z przekątną BE. Niech $\measuredangle AGB = \theta$. Zauważmy, że kąty: $\measuredangle AGB$ oraz $\measuredangle DGE$ są kątami wierzchołkowymi, zatem ich miary są takie same, równe θ. Przyjrzyjmy się teraz trójkątom: $\triangle ABG$ oraz $\triangle DEG$. Wiemy, że suma miar kątów w trójkącie wynosi $180°$, zatem $\measuredangle ABG + \delta + \theta = 180°$, czyli $\measuredangle AGB = 180° - \delta - \theta$. Podobnie w $\triangle DEG$: $\measuredangle DEG + \delta + \theta = 180°$, czyli $\measuredangle DEG = 180° - \delta - \theta$,a więc $\measuredangle AGB = \measuredangle DEG$. Ponieważ kąty w trójkątach $\triangle ABG$ oraz $\triangle DEG$ mają takie same miary, więc z cechy podobieństwa trójkątów (kkk) stwierdzamy, że $\triangle ABG$ oraz $\triangle DEG$ są podobne. Oznacza to, że boki trójkątów przy odpowiednich kątach są do siebie proporcjonalne w skali k: $k = \frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BG|}{|EG|} = \frac{|AG|}{|DG|}$. Skorzystamy teraz z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa: Jeżeli odcinki wyznaczone przez dwie proste na jednym ramieniu kąta są proporcjonalne do odpowiednich odcinków wyznaczonych na drugim ramieniu kąta, to te proste są równoległe.
Ponieważ $\frac{|BG|}{|EG|} = \frac{|AG|}{|DG|} = k$, więc odcinki AB oraz DE są równoległe. Przy uzasadnianiu równoległości boków BC i EF oraz AF i CD postępujemy analogicznie, co kończy dowód.



Rysunek 8

Dowód b): Rozważamy sześciokąt, którego kąty leżące naprzeciwko siebie mają jednakowe miary, boki leżące naprzeciwko siebie są równoległe oraz mają te same długości. Niech A, B, C, D, E, F będą kolejnymi wierzchołkami sześciokąta. Niech $\alpha, \beta, \gamma, \alpha, \beta, \gamma$ będą kątami występującymi w tym sześciokącie kolejno przy wierzchołkach A, B, C, D, E, F oraz niech $|AB| = |DE|, |BC| = |EF|, |CD| = |AF|$ (patrz *Rysunek 9*)Chcemy udowodnić, że sześciokąt ten ma środek symetrii, więc należy tu uzasadnić, że punkty A i D oraz B i E oraz C i F są symetryczne względem tego samego punktu. Poprowadźmy prostą przechodzącą przez punkty A i D oraz prostą przechodzącą przez punkty C i F. Te dwie proste przecięły się w pewnym punkcie X. Wiemy, że $|CD| = |AF|$ oraz, że $\measuredangle FAX = \measuredangle CDX$, $\measuredangle AFX = \measuredangle DCX$ (kąty naprzemianległe). Korzystając z cechy przystawania trójkątów (kbk) stwierdzamy, że trójkąty $\triangle AFX$ i $\triangle DCX$ są przystające. Oznacza to, że $|AX| = |DX|$ oraz $|CX| = |FX|$. Poprowadźmy teraz prostą przechodzącą przez punkty B i E. Prosta ta przecięła prostą AD w jakimś punkcie Y.Wiemy, że $|AB| = |DE|$ oraz $\measuredangle AYB = \measuredangle DYE$ (kąty wierzchołkowe), $\measuredangle BAY = \measuredangle EDY$ (kąty naprzemianległe) oraz z sumy miar kątów trójkąta wiemy, że $\measuredangle ABY = \measuredangle DEY$. Korzystając z cechy przystawania trójkątów (kbk) stwierdzamy, że $\triangle ABY$ i $\triangle DEY$ są przystające. Oznacza to, że $X = Y$ oraz, że $|BX| = |EX|$, co kończy dowód. Zatem sześciokąt ten ma środek symetrii.

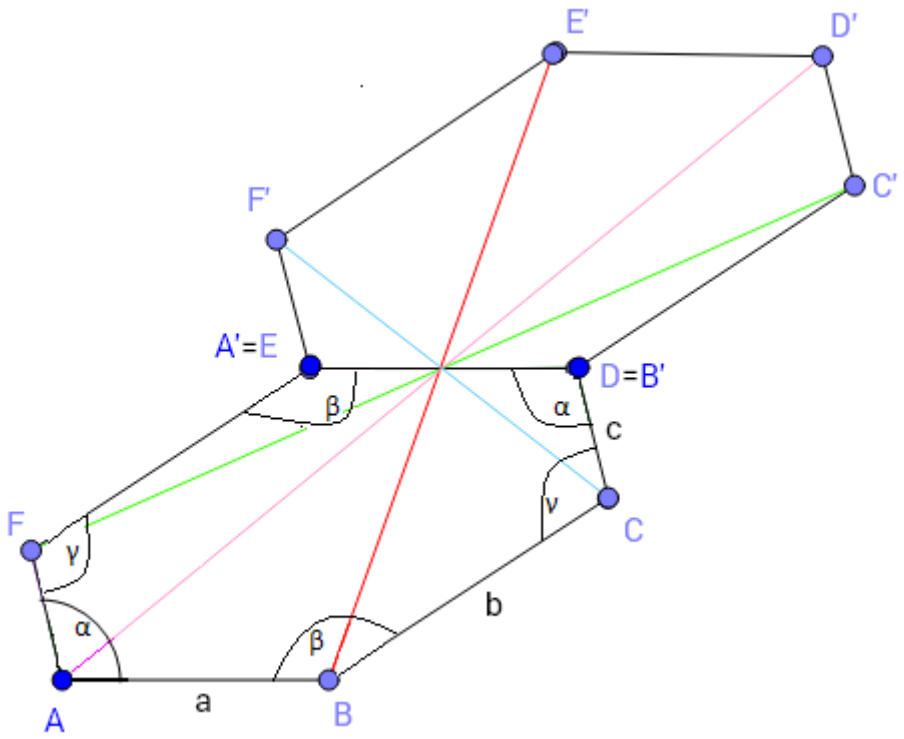


Rysunek 9

Lemat 3.2.2. (o przesunięciu i półobrocie). Mamy dany sześciokąt o następujących własnościach:
-jego przeciwległe kąty są równe;
-naprzeciwległe boki są jednakowej długości.
Jeżeli skopiujemy wyjściowy sześciokąt i przesuniemy tak, aby sześciokąt wyjściowy i jego kopia przylegały do siebie jednym z boków, to kopia ta jest obrazem wyjściowego sześciokąta przez półobrót względem środka wspólnego boku.

Uwaga 3.2.3. Sześciokąt o własnościach podanych w Lemacie 3.2.2 będziemy nazywali sześciokątem środkowo symetrycznym.

Dowód: Niech A, B, C, D, E, F będą kolejnymi wierzchołkami sześciokąta. Niech $\alpha, \beta, \gamma, \alpha, \beta, \gamma$ będą kątami, występującą w tym sześciokącie kolejno przy wierzchołkach A, B, C, D, E, F. Niech $|AB| = |DE|, |BC| = |EF|, |CD| = |AF|$, wtedy na podstawie Lematu 3.2.1 wiemy, że $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF, CD \parallel AF$. Niech S oznacza środek wspólnego boku sześciokątów (patrz *Rysunek 10*).



Rysunek 10

Aby wykazać, że przesunięta kopia jest obrazem przez półobrót wokół S wyjściowego sześciokąta należy uzasadnić, że wierzchołki skopiowanego sześciokąta powstają w wyniku symetrii środkowej względem środka wspólnego boku obu sześciokątów. Poprowadźmy prostą łączącą wierzchołek F z wierzchołkiem C'. Zauważmy, że prosta FC' przecięła bok DE w pewnym punkcie X. Uzasadnimy, że jest to środek boku DE. Przyjrzyjmy się powstałym trójkątom: $\triangle EFX$ oraz $\triangle B'C'X$. Wiemy, że $|EF| = |B'C'|$. Zauważmy, że $\sphericalangle FEX = \sphericalangle C'B'X = \beta$ oraz $\sphericalangle EXF = \sphericalangle B'XC'$ (kąty wierzchołkowe). Z sumy miar kątów w trójkącie wiemy, że $\sphericalangle EFX = \sphericalangle B'C'X$. Z powyższych obserwacji wiemy, że $\sphericalangle EFX = \sphericalangle B'C'X$, $|EF| = |B'C'|$, $\sphericalangle FEX = \sphericalangle C'B'X = \beta$, zatem możemy skorzystać z cechy przystawania trójkątów (kbk) i stwierdzamy, że trójkąty $\triangle EFX$ oraz $\triangle B'C'X$ są przystające. Oznacza to, że $|A'X| = |DX|$, czyli punkt $X = S$ oraz $|FS| = |C'S|$, czyli punkty F, C' są w symetrii środkowej względem środka boku DE.

W ten sam sposób uzasadniamy, że punkt F' jest symetryczny do punktu C względem punktu S. Niech Y będzie punktem przecięcia prostej CF'. Rozważamy tu najpierw trójkąty $\triangle CDY$ oraz $\triangle F'A'Y$ i z cechy kbk stwierdzamy, że są one przystające, zatem $|CY| = |F'Y|$ oraz $Y = S$.

Poprowadźmy teraz odcinek łączący wierzchołki B z E'. Odcinek ten przecina bok BD w jakimś punkcie Z.

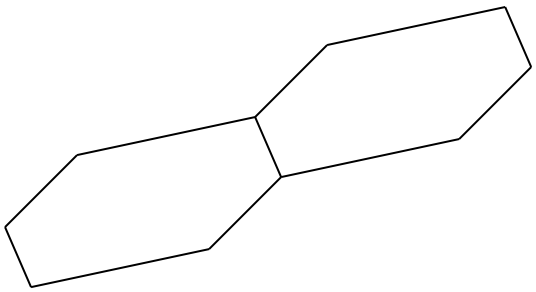
Uzasadnimy, że $|BZ| = |E'Z|$ oraz, że $Z = S$. Wiemy, że $BC \parallel F'E'$ i $|BC| = |F'E'|$ oraz, że $|CS| = |F'S|$. Wiemy również, że kąty: $\sphericalangle BCF' = \sphericalangle EF'C$ (kąty naprzemianległe). Korzystając z cechy przystawania trójkątów (bkb) stwierdzamy, że trójkąty: $\triangle BCZ$ i$\triangle E'F'Z$ są przystające, wobec tego $|BZ| = |E'Z|$ oraz $Z = S$, czyli punkty B, E' są symetryczne względem środka boku DE.

W ten sam sposób uzasadniamy symetrię środkową punktów A oraz D'. Niech Q oznacza punkt przecięcie prostej AD' z bokiem DE. Wiemy, że $AB \parallel E'D'$, $|AB| = |E'D'|$, $\sphericalangle ABS = \sphericalangle D'E'S$ (kąty naprzemianległe) oraz $|BS| = |E'S|$, więc możemy skorzystać z cechy przystawania trójkątów (bkb) i

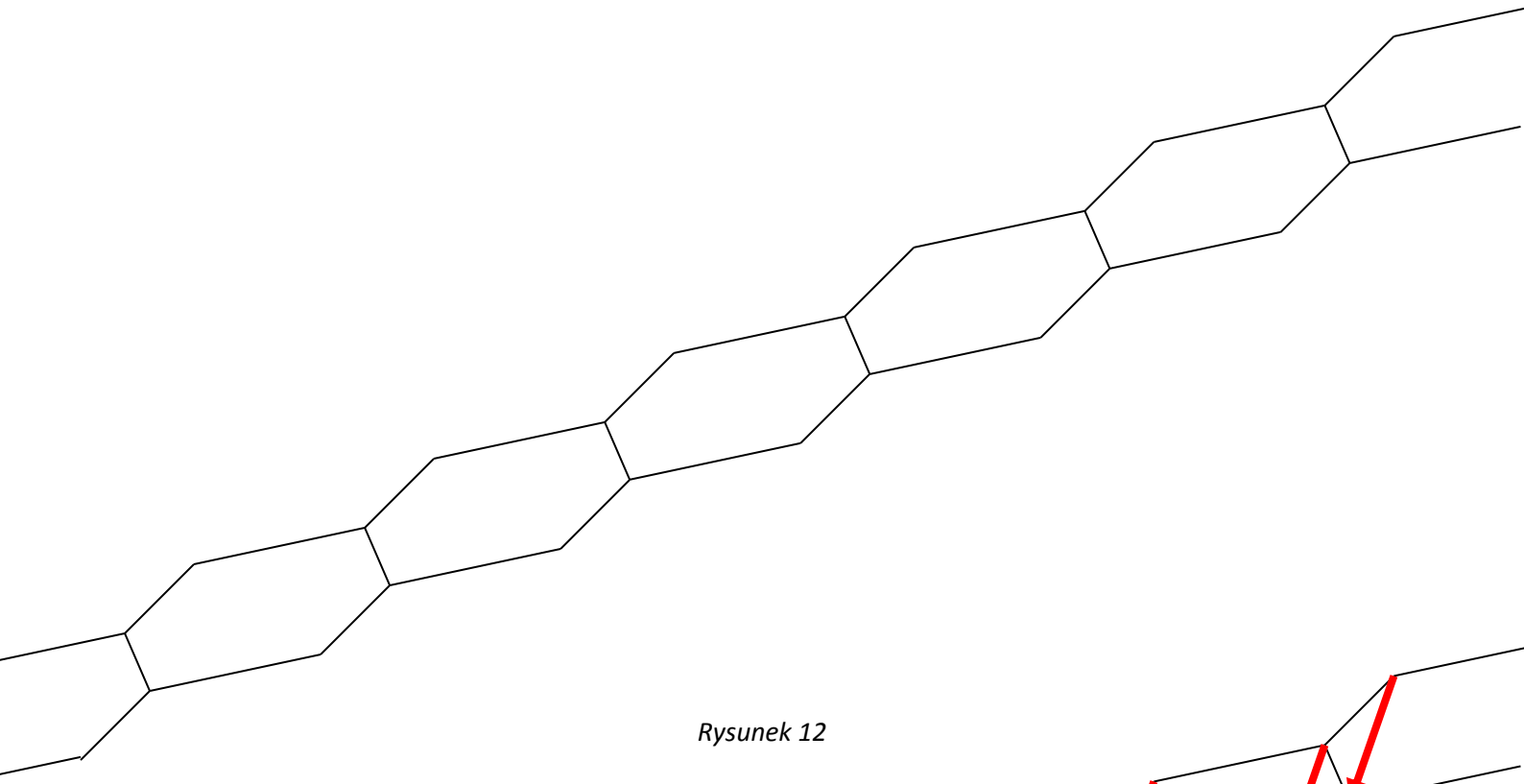
otrzymujemy, że$\triangle ABS$ jest przystający do $\triangle D'E'S$. Oznacza to, że $|AQ| = |D'Q|$ oraz, że $Q = S$, czyli punkty A oraz D' są symetryczne względem S.

W ten sposób uzasadniliśmy, że wierzchołki skopiowanego sześciokąta powstają w wyniku symetrii środkowej względem środka wspólnego boku obu sześciokątów innymi słowy, że kopia ta jest obrazem przez półobrót wokół wierzchołka S wyjściowego sześciokąta.

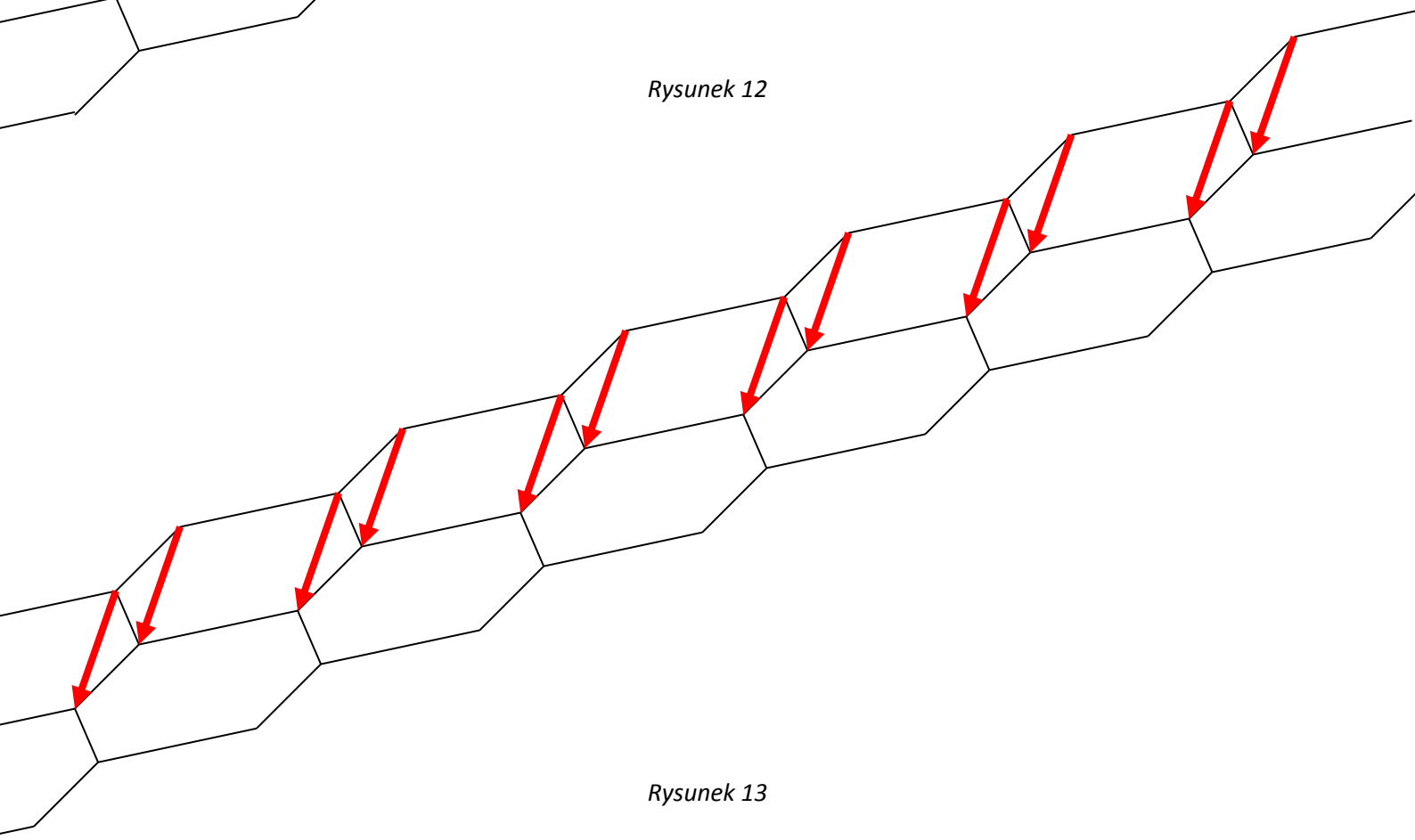
Przejdźmy teraz do opisu konstrukcji parkietażu przystającymi płytkami, które są w kształcie sześciokąta środkowo symetrycznego V. Skopiujmy sześciokąt V i przesuńmy jego kopię tak, aby sześciokąt wyjściowy i jego kopia V'przylegały do siebie jednym z boków (patrz *Rysunek 11*). Następnie weźmy kopię sześciokąta V' i przesuńmy w ten sposób, aby sześciokąt V' oraz V" przylegały do siebie bokiem tej samej długości, co sześciokąt Vz V'. Procedurę tę powtarzamy wiele razy. W ten sposób powstaje nam nieskończony „pasek" przyległych i przystających sześciokątów (patrz *Rysunek 12*). Aby zapełnić większy fragment płaszczyzny takimi sześciokątnymi płytkami dokonamy kopi całego paska sześciokątów i dopasujemy do pierwotnego tak, aby nie było między nimi wolnej przestrzeni oraz aby na siebie nie zachodziły. Jest to możliwe, ponieważ łamane brzegowe paska są przystające i jedna powstaje z drugiej przez przesunięcie o odpowiedni wektor (patrz *Rysunek 13*). Tak więc jako kopię wyjściowego paska sześciokątów wystarczy wziąć jego obraz przez przesunięcie o ten sam wektor. Kopiując wielokrotnie sześciokątne paski oraz odpowiednio je układając zapełniamy całą płaszczyznę przystającymi sześciokątnymi płytkami (patrz *Rysunek 14*)
Ponieważ na początku kopiowaliśmy płytkę w kształcie sześciokąta równoległobocznego i kopia ta była przesunięta tak, aby przylegała do pierwotnego sześciokąta, więc korzystając z Lematu 3.2 stwierdzamy, że jedna z płytek jest obrazem przez półobrót względem środka boku drugiej płytki. Tak się dzieje z dowolna parą płytek sąsiadujących przez krawędź w naszym parkietażu. Oznacza to, że utworzony parkietaż jest parkietażem półobrotowym, którego płytkami są przystające sześciokąty środkowo symetryczne.



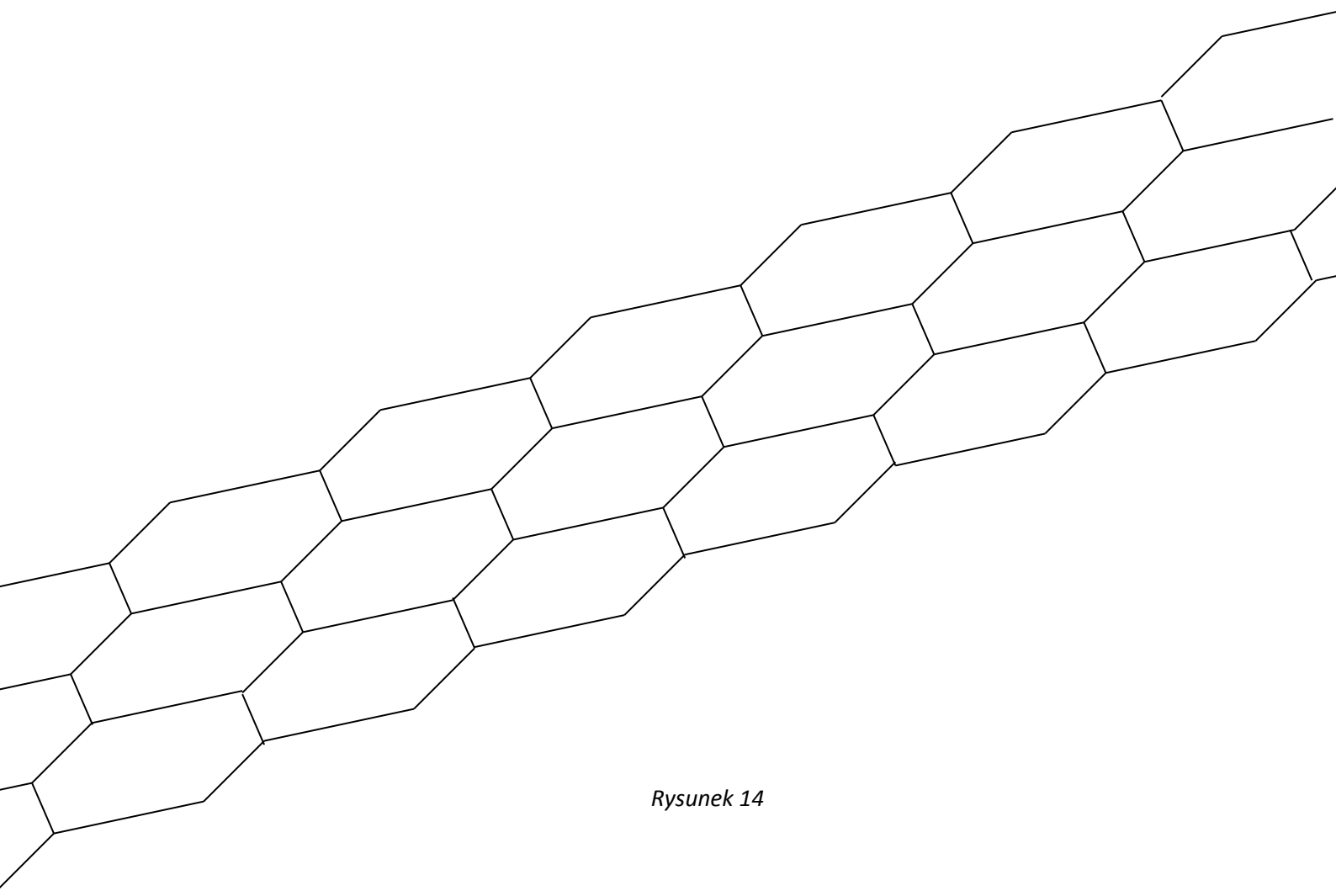
Rysunek 11



Rysunek 12



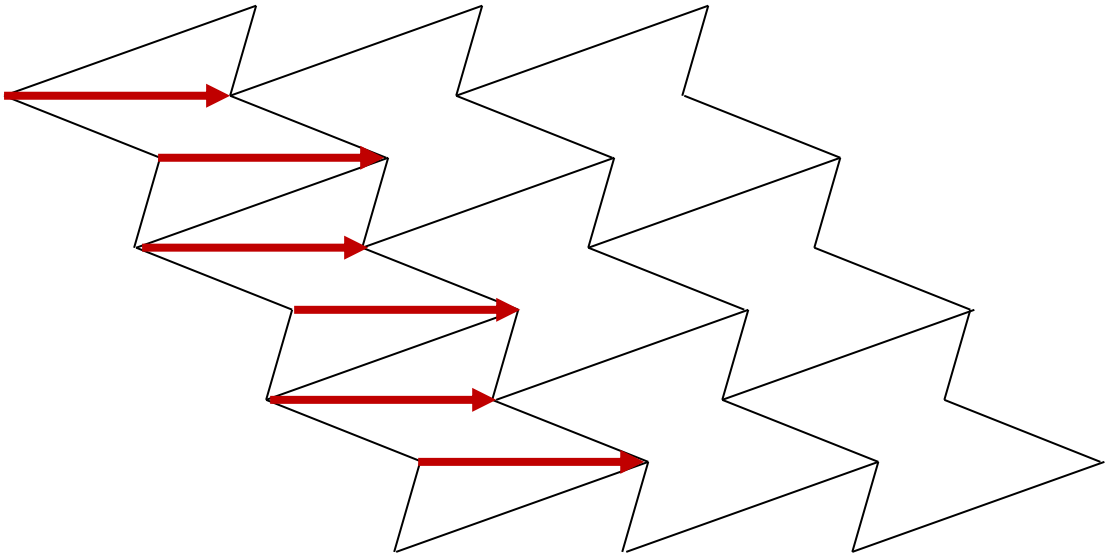
Rysunek 13



Rysunek 14

Uwaga 3.2.4. Mogłoby się wydawać, że przytoczona wyżej konstrukcja parkietażu dotyczy jedynie sytuacji, gdy płytka jest sześciokątem wypukłym, jednak w przypadku sześciokąta środkowo symetrycznego, który nie jest wypukły stosując wyżej opisaną konstrukcję również otrzymamy parkietaż półobrotowy. Jest to zilustrowane na *Rysunku 15*. Bierzemy sześciokątną płytkę, kopiujemy ją i przesuwamy tak, jak to było opisane wyżej. Sześciokąty te tworzą „pasek", który następnie kopiujemy i dopasowujemy do oryginalnego. Również w tym przypadku łamane brzegowe paska są przystające przez przesunięcie. Kopiując wielokrotnie sześciokątne paski oraz odpowiednio je układając zapełniamy całą płaszczyznę przystającymi sześciokątnymi płytkami.

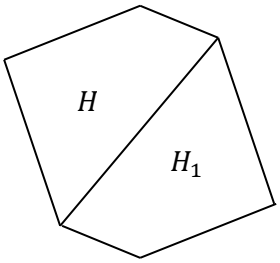
Podobnie jak wyżej korzystając z Lematu 3.2 dochodzimy do wniosku, że utworzony przez nas parkietaż jest parkietażem półobrotowym.



Rysunek 15

3.3. Płytki czworokątne

Niech H będzie dowolnym czworokątem. Z płytki H oraz z płytki do niej przystającej H_1 tworzymy sześciokąt P, w taki sposób, że płytka H_1 jest obrazem płytki H przez półobrót wokół środka jednego z boków płytki H (patrz *Rysunek 16*).

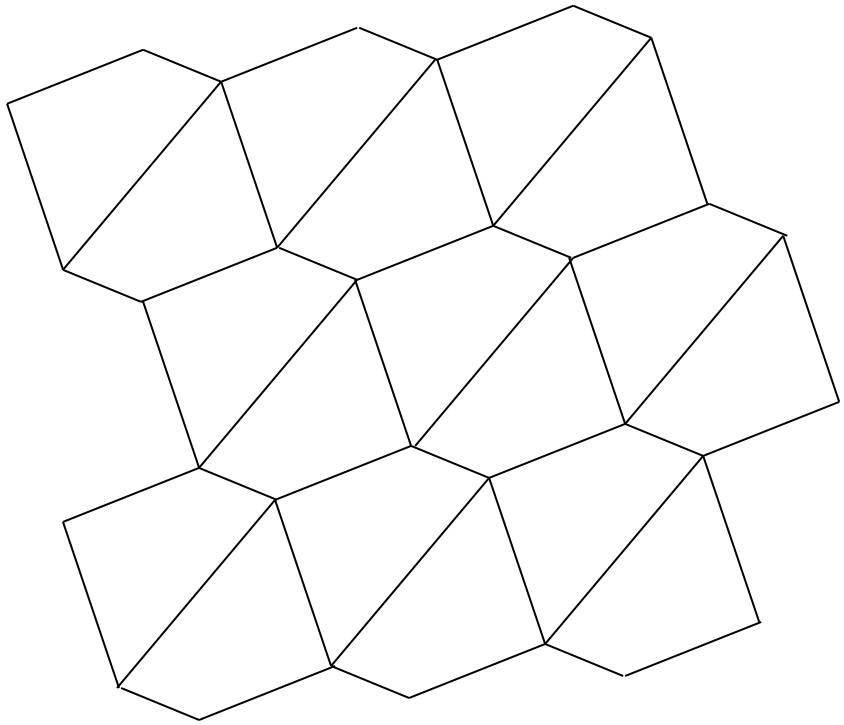


Rysunek 16

Zauważmy, że przeciwległe kąty i boki sześciokąta P są równe. Oznacza to, że powstały sześciokąt P jest sześciokątem środkowo symetrycznym. Niech π oznacza parkietaż półobrotowy płaszczyzny, który jest utworzony z płytek przystających do P. Z poprzednich rozważań wiemy, że utworzenie takiego parkietażu jest możliwe. Przypomnijmy w jaki sposób powstaje takie pokrycie płaszczyzny. Kopiujemy sześciokąt P i przesuwamy jego kopię w ten sposób, aby sześciokąt wyjściowy i jego kopia P'przylegały do siebie jednym z boków. Następnie bierzemy kopię sześciokąta P' i przesuwamy w ten sposób, aby sześciokąt P' oraz P" przylegały do siebie przeciwległym bokiem tej samej długości, co sześciokąt P z P'. Procedurę tę powtarzamy wiele razy. W ten sposób powstaje nieskończony „pasek" przyległych i przystających sześciokątów. Kopiujemy powstały „pasek" i przesuwamy w ten sposób, aby dopasować go do oryginalnego tak, aby na siebie nie zachodziły i nie było między nimi wolnej przestrzeni. Kopiując wielokrotnie sześciokątne paski oraz odpowiednio je

układając zapełniamy całą płaszczyznę przystającymi sześciokątnymi płytkami. W ten sposób otrzymujemy półobrotowy parkietaż π, którego płytkami są przystające sześciokąty równoległoboczne.

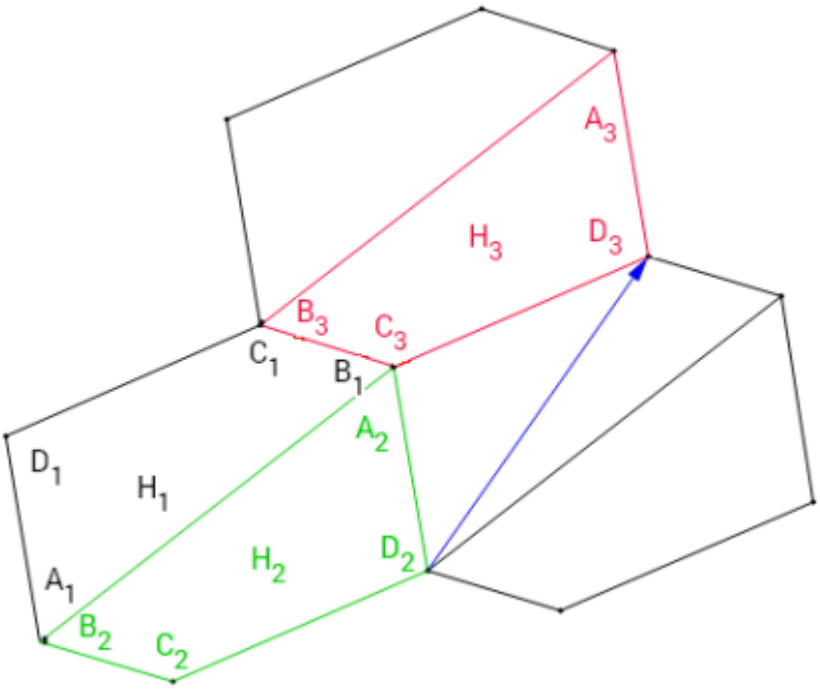
Kolejnym krokiem konstrukcji jest poprowadzenie przekątnej każdej płytki parkietażu π tak, aby podzieliła ona dany sześciokąt na dwa czworokąty przystające do wyjściowego H (zobacz *Rysunek 17*).W ten sposób powstał parkietaż τ z czworokątów przystających do H. Wykażemy, że tak uzyskany parkietaż jest parkietażem półobrotowym.



Rysunek 17

Aby to wykazać, po pierwsze musimy uzasadnić, że każda para przyległych czworokątów tego parkietażu, znajdująca się w tym samym sześciokącie jest ułożona zgodnie z warunkami na półobrotowość. Przypomnijmy, w jaki sposób powstał sześciokąt P. Na początku skopiowaliśmy płytkę H i otrzymaną kopię nazwaliśmy H_1. Następnie dokonaliśmy półobrotu płytki H wokół środka jednego z jego boków, otrzymując w ten sposób interesujący nas sześciokąt. Po otrzymaniu parkietażu π, dzieliliśmy każdą sześciokątną płytkę w ten sposób, aby uzyskać płytki przystające do wyjściowego czworokąta H. Z tej konstrukcji widać, że każda para czworokątów, znajdująca się w tym samym sześciokącie jest ułożona zgodnie z warunkami na półobrotowość (patrz *Rysunek 16*).

Po drugie, uzasadnienia wymaga fakt, że czworokąty przyległe, zawarte w sąsiednich sześciokątach parkietażu π również spełniają warunki na półobrotowość. Weźmy dowolny fragment parkietażu, składający się z sześciu kopi płytki H, zawartych w trzech przyległych sześciokątach parkietażu π (patrz *Rysunek 18*). Celem rozważań będzie uzasadnienie, że płytki H_1 oraz H_3 spełniają warunki na półobrotowość.



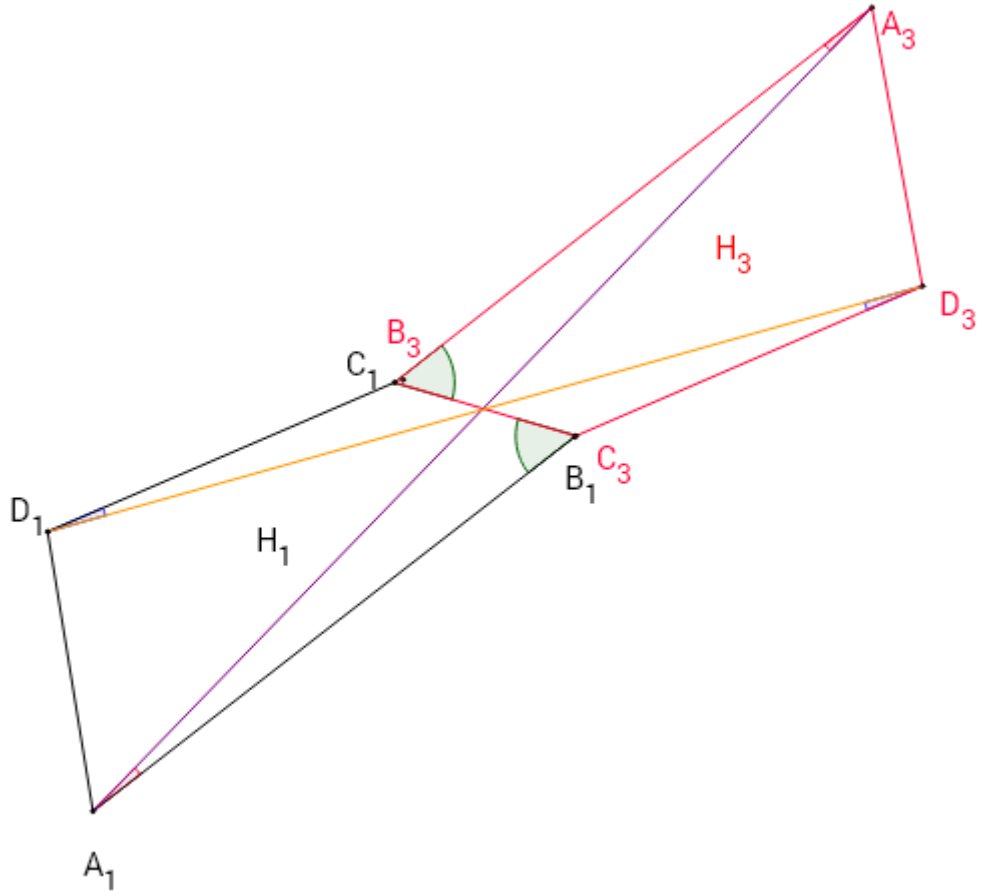
Rysunek 18

Oznaczmy wierzchołki klepki H_1 przez A_1, B_1, C_1, D_1. Niech kąty α, β, γ, δ będą kątami odpowiednio przy wierzchołkach A_1, B_1, C_1, D_1. Wiemy już, że płytka H_2 jest obrazem płytki H_1 w obrocie o $180°$ wokół środka ich wspólnego boku zatem A_2, B_2, C_2, D_2 będą oznaczać odpowiednie wierzchołki klepki H_2 będące obrazami wierzchołków A_1, B_1, C_1, D_1 przez ten obrót. Z konstrukcji „paska" wynika, że płytka H_3 jest obrazem płytki H_2 przez translację. Oznacza to, że płytki H_2 i H_3 są przystające. Nazwijmy wierzchołki płytki H_3 odpowiednio przez A_3, B_3, C_3, D_3 w ten sposób, że A_3 jest obrazem wierzchołka A_2, B_3 jest obrazem B_2, C_3 obrazem C_2 i D_3 jest obrazem D_2 względem odpowiedniej translacji. Wiemy, że płytki H_1 i H_2 oraz H_2 i H_3 są przystające, zatem z relacji przechodniości wnioskujemy, że płytki H_1 oraz H_3 również są przystające. Oznacza to, że wierzchołkowi A_1 odpowiada wierzchołek A_3, wierzchołkowi B_1 wierzchołek B_3, wierzchołkowi C_1 wierzchołek C_3 i wierzchołkowi D_1 wierzchołek D_3.

Aby przekonać się o tym, że istotnie płytka H_1 i H_3 są ułożone względem siebie półobrotowo, poprowadźmy odcinek łączący wierzchołek A_1 z wierzchołkiem A_3(patrz Rysunek 19). Odcinek ten przecina bok B_1C_1 czworokąta $A_1B_1C_1D_1$ w punkcie X. W ten sposób powstały dwa trójkąty: $\triangle A_1B_1X$ oraz $\triangle A_3B_3X$. Zauważmy, że $\sphericalangle A_1B_1X = \sphericalangle A_3B_3X = \beta$, $\sphericalangle A_1XB_1 = \sphericalangle A_3XB_3$ (kąty wierzchołkowe), $\sphericalangle B_1A_1X = \sphericalangle B_3A_3X$ (suma miar kątów w trójkącie), $|A_1B_1| = |A_3B_3|$ (przystawanie czworokątów H_1i H_3). Ponieważ $\sphericalangle B_1A_1X = \sphericalangle B_3A_3X$, $|A_1B_1| = |A_3B_3|$, $\sphericalangle A_1XB_1 = \sphericalangle A_3XB_3$, to z cechy przystawania trójkątów (kbk) stwierdzamy, że trójkąty $\triangle A_1B_1X$ oraz $\triangle A_3B_3X$ są przystające, co oznacza, że odcinek A_1A_3 przecina bok B_1C_1 w połowie (odpowiednie boki trójkąta są przystające), czyli $|B_1X| = |B_3X|$ - oznacza to, że punkty B_1, B_3 są położone symetrycznie względem środka boku B_1C_1. Z tego też wynika, że $|A_1X| = |A_3X|$ (odpowiednie boki trójkąta są przystające). Stąd otrzymujemy, że punkty A_1 oraz A_3 są położone symetrycznie względem środka boku B_1C_1 (wspólnego boku tych czworokątów).

Poprowadźmy teraz odciek D_1D_3. Przecina on bok B_1C_1 w punkcie Y. Otrzymaliśmy w ten sposób cztery trójkąty. Przyjrzyjmy się dwóm z nich: $\triangle C_3D_3Y$ oraz $\triangle C_1D_1Y$. Zauważmy, że $\measuredangle YC_3D_3 = \measuredangle YC_1D_1 = \gamma$, $\measuredangle C_3YD_3 = \measuredangle C_1YD_1$ (kąty wierzchołkowe), $\measuredangle C_3D_3Y = \measuredangle C_1D_1Y$ (suma miar kątów w trójkącie), $|C_3D_3| = |C_1D_1|$ (przystawanie czworokątów H_1i H_3). Ponieważ $\measuredangle YC_3D_3 = \measuredangle YC_1D_1 = \gamma$, $|C_3D_3| = |C_1D_1|$, $\measuredangle C_3D_3Y = \measuredangle C_1D_1Y$, to z cechy przystawania trójkątów (kbk) stwierdzamy, że trójkąty $\triangle C_3D_3Y$ oraz $\triangle C_1D_1Y$ są przystające, że punkt $Y = X$, co oznacza, że przecina bok B_1C_1 w połowie, czyli $|C_1X| = |C_3X|$ oraz, że $|D_1X| = |D_3X|$. Stąd otrzymujemy, że punkty C_1, C_3 oraz punkty D_1, D_3 są położone symetrycznie względem środka boku B_1C_1.

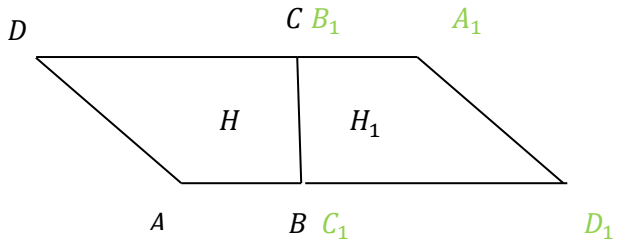
W ten sposób uzasadniliśmy, że płytka H_3 jest położona względem płytki H_1 zgodnie z warunkami na półobrotowość. Po zastosowaniu analogicznego rozumowania do pozostałych przypadków stwierdzamy, że przyległe do siebie czworokąty, zawarte w sąsiednich sześciokątach spełniają warunki na półobrotowość. Oznacza to, że parkietaż τ jest parkietażem półobrotowym.



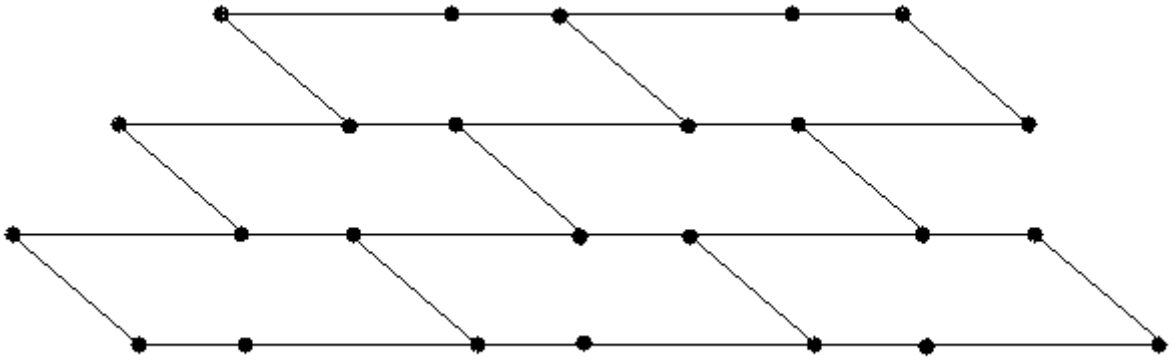
Rysunek 19

Uwaga 3.3.1. Po chwili zastanowienia zauważamy, że powyższy argument nie bardzo ma zastosowanie do sytuacji, gdy suma czworokątów H i H_1 nie tworzy sześciokąta. Taka sytuacja będzie miała miejsce, gdy suma dwóch kolejnych kątów czworokąta H wynosi $180°$. Niech H będzie takim czworokątem. Niech A, B, C, D będą kolejnymi wierzchołkami rozważanego czworokąta H oraz niech $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ będą kolejnymi kątami tego czworokąta, leżącymi odpowiednio przy wierzchołkach A, B, C, D. Dokonajmy obrotu tego czworokąta względem środka boku przy którym kąty sumują się do $180°$. Powstaje nam kopia płytki H. Nazwiemy ją H_1 oraz boki i kąty odpowiednio A_1, B_1, C_1, D_1

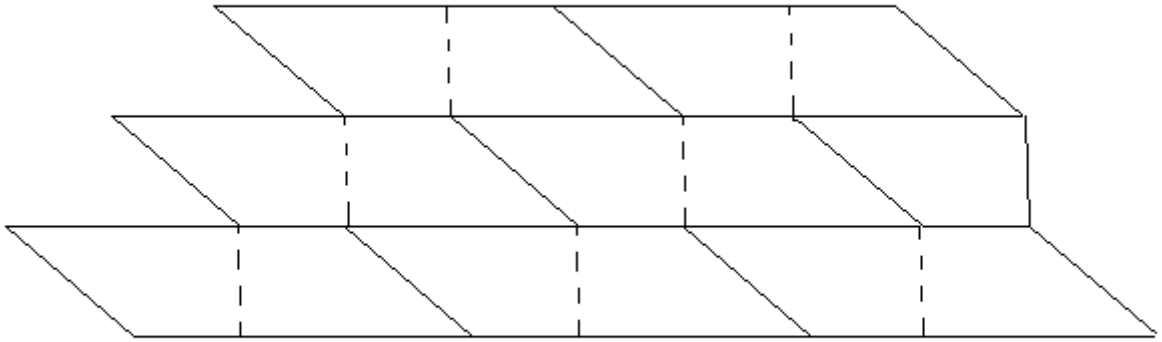
oraz $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Zauważmy, że powstała figura nie jest sześciokątem, a równoległobokiem. Jednak nazwiemy tę figurę sześciokątem sztucznym. Możemy w ten sposób postąpić, gdy myślimy, że boki sześciokąta są dawnymi bokami czworokątów. Wtedy bok, który normalnie traktowalibyśmy jako jeden traktujemy jako dwa oddzielne boki (patrz *Rysunek 20*). Punkty podziału boków równoległoboku na boki sztucznego sześciokąta będziemy nazywać wierzchołkami tego sześciokąta (wraz z czterema wierzchołkami równoległoboku). Przeciwległe boki mają te same długości: $|AB| = |A_1B_1|, |CD| = |C_1D_1|, |AD| = |A_1D_1|$ oraz przeciwległe kąty mają równe miary: $\measuredangle CDA = \delta = \measuredangle C_1D_1A_1$, $\measuredangle DAB = \alpha = \measuredangle D_1A_1$, $\measuredangle ABD_1 = \beta + \gamma = \measuredangle A_1B_1D = 180°$, więc faktycznie powstały sześciokąt sztuczny również spełnia warunki konieczne na sześciokąt. Również dla niego można zrealizować te same etapy konstrukcji, co poprzednio, czyli na samym początku utworzyć parkietaż π z płytek przystających do sztucznego sześciokąta (patrz *Rysunek 21*). Następnie dokonać podziału każdego sześciokąta na czworokąty przystające do wyjściowego. W ten sposób otrzymamy parkietaż τ (patrz *Rysunek 22*). Uzasadnienie, że parkietaż τ jest półobrotowy przebiega w sposób analogiczny do poprzedniego.



Rysunek 20



Rysunek 21



Rysunek 22

Powyższe rozważania prowadzą do stwierdzenia, że każdy czworokąt H jest płytka parkietażu półobrotowego.

Warto zapoznać się z programem interaktywnym, znajdującym się na stronie: https://www.geogebra.org/m/jhn8DYjZ [3], który umożliwia podgląd czworokątnego parkietażu półobrotowego. Płytką takiego parkietażu jest osobiście wybrany kształt czworokąta.

Bibliografia

[1] M. Kordos, *Nadzwyczajne kafelki*, Delta nr 1, styczeń 2011.

[2] H. Steinhaus, *Kalejdoskop matematyczn*, wyd. PZWS, 1954.

[3] Oficjalna strona programu GeoGebra, która zawiera interaktywne ilustracje do książki H. Steinhausa, *Kalejdoskop matematyczny:*

https://www.geogebra.org/m/jhn8DYjZ