Uniwersytet Wrocławski

Inga Skowrońska

O PRYZMATOIDACH I TOŻSAMOŚCI EULERA

PRACA MAGISTERSKA

pisana pod kierunkiem dr Jacka Świątkowskiego

Wydział Matematyki i Informatyki
Wrocław 2000/2001

Badanie wielościanów zajmowało centralne miejsce w geometrii Greków, ale dopiero Kartezjuszowi i Eulerowi przypadło w udziale odkrycie faktu dotyczącego zależności pomiędzy liczbą krawędzi, wierzchołków i ścian wielościanu prostego. Z notatek Leibniza wynika, że już Kartezjusz znał ten niewątpliwie ważny fakt, ale za jego odkrywcę uznaje się Eulera, który w liście do Goldbacha z 1750 r opisuje swoje odkrycie. Dzisiaj nazywamy je twierdzeniem Eulera. Dowód tego twierdzenia Euler ogłosił drukiem w 1758 r. W literaturze zostało przedstawionych kilka sposobów przeprowadzenia dowodu tego twierdzenia. W książce „ Z geometrią za pan brat"[1] zastosowano zestawienie wielościanu z pewnej ilości czworościanów. Wychodząc od czworościanu, który jak łatwo sprawdzić spełnia wzór Eulera, badano niezmienność wzoru przy dostawianiu następnego czworościanu jedną ścianą do już zestawionej części. W literaturze możemy spotkać też inny dowód, w którym konstruuje się na płaszczyźnie obraz wielościanu, usuwając jedną z jego ścian a pozostałe tak deformując aby upadły na tę samą płaszczyznę[2].

Tematem tej pracy jest przedstawienie nowego sposobu przeprowadzenia dowodu tożsamości Eulera. Aby tego dokonać posłużono się pryzmatoidem, jako rodzajem wielościanu, dla którego wzór Eulera jest łatwy do udowodnienia. W celu przeprowadzenia dowodu rozcięto dowolny wielościan wypukły na pryzmatoidy, rodziną płaszczyzn równoległych. Zbadano możliwe sposoby rozcinania i wpływ ich wyboru na prawdziwość wzoru. Udowodniono, że skoro pryzmatoidy powstałe przez rozcięcie wyjściowego wielościanu wypukłego spełniają tożsamość Eulera, to i wielościan wyjściowy ją spełnia.

---

[1] W.Krzysicki, H.Pisarewski, T.Świątkowski, *Z geometrią za pan brat*, Warszawa 1992.
[2] np. R.Courant, H.Robbins, *Co to jest matematyka*, Warszawa 1962.

Spis treści:

§1 WIELOŚCIANY WYPUKŁE

Istnieje wiele definicji wielościanu. Najpoważniejsze współczesne dzieło o wielościanach, E. Steinitza i H. Redemachera pt. *Vorlesungen über die theorie der Polyeder*, rozpoczyna się od następującej uwagi o definicji wielościanu. „Nie ma jednolitej, ogólnie przyjętej definicji wielościanu , a nawet nie jest wskazane ustalenie takiej definicji"[3] W rozmaitych badaniach definiuje się więc wielościany rozmaicie, w każdym jednak przypadku trzeba się trzymać konsekwentnie obranej definicji.

WIELOŚCIAN

Wielościanem nazywamy każdy układ wielokątów, tak ułożonych, że w każdej krawędzi schodzą się dwa i tyko dwa wielokąty pod pewnym kątem i ponadto z dowolnego wielokąta tego układu można przejść do każdego innego przechodząc przez krawędzie.[4]

Jest to najczęściej stosowana definicja. My jednak posłużymy się następującą definicją.

Wielościan jest to część przestrzeni ograniczona skończoną ilością ścian będących płaskimi wielokątami.

Wielościan nazywamy prostym[5], jeśli spełnione są następujące warunki:

1. Wszystkie ściany są zwykłymi wielobokami.
2. Nie przylegające, czyli nie sąsiadujące ze sobą ściany nie mają wspólnych punktów z wyjątkiem, być może jednego wspólnego wierzchołka.
3. Dwie sąsiednie ściany oprócz wspólnej krawędzi nie mają żadnych wspólnych punktów.
4. Każdy wierzchołek jest wierzchołkiem dokładnie jednego kąta bryłowego.

Wielościan, który nie jest wielościanem prostym, nazywamy związanym lub gwieździstym Wielościan prosty nazywamy wypukłym[6] jeśli leży on całkowicie po jednej stronie każdej ze swych ścian; wielościan taki można położyć każdą ścianą na płaszczyźnie stołu tak, że ściana ta przylega do płaszczyzny wszystkimi swoimi

---

[3] Cytat zaczerpnięty z książki Łomnickiego, *Wielościany umiarowe*, Lwów 1939.
[4] Definicja wielościanu wg książki D.Hilberta, S.Cohn-Vossena, *Geometria poglądowa*, Warszawa 1956.
[5] Definicja wielościanu prostego wg W.Krzysickiego, H.Pisarewskiego, T.Świątkowskiego, *Z geometrią za pan brat*, Warszawa 1992.
[6] Definicja wielościanu wypukłego wg książki Łomnickiego, *Wielościany umiarowe*, Lwów 1939.

punktami. Często w zastosowaniu do brył korzysta się z drugiej definicji wypukłości, bardziej ogólnej mającej zastosowanie nie tylko do wielościanów. Zgodnie z tą definicją bryłę, nazywamy wypukłą, jeśli całkowicie zawiera odcinek prostoliniowy łączący dwa dowolne punkty, należące do niej. Jednak w przypadku wielościanów oba określenia wypukłości są równoważne.

Mimo, że twierdzenie Eulera odnosi się do wszystkich wielościanów jednospójnych zarówno wypukłych jak i niewypukłych my w dalszej części pracy ograniczymy się tylko do wielościanów wypukłych.
Pogląd na konstrukcję wielościanu wypukłego daje nam poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 1

Wielościan wypukły jest przecięciem skończonej liczby półprzestrzeni, mających wspólne wewnętrzne punkty, i odwrotnie przecięcie skończonej liczby półprzestrzeni jeśli jest ograniczone i ma punkty wewnętrzne jest wielościanem wypukłym.

Dowód[7]:

Niech P oznacz bryłę, ograniczoną skończoną liczbą ścian a_k, będących płaskimi wielokątami, czyli dowolny wielościan wypukły. Niech Π_k będzie tą płaszczyzną w której zawarta jest ściana a_k tzn. $a_k \subset \Pi_k$. Niech A oznacza wewnętrzny punkt wielościanu. Każda z płaszczyzn Π_k dzieli przestrzeń na dwie półprzestrzenie. Niech E_k będzie tą półprzestrzenią, do której należy punkt A.(E_k – zamknięta półprzestrzeń , tzn. $a_k \subset E_k$). Twierdzimy, że przecięcie P' wszystkich półprzestrzeni E_k jest wielościanem P. Rzeczywiście niech $X \in P$ tzn. że X należy do każdej E_k, czyli należy do ich przecięcia , zatem $P \subset P'$.

Niech teraz $Y \in P'$. Pokażemy, że $Y \in P$. Tak jak X - punkt należący do wnętrza P, również punkty odcinka XY, bliskie punktowi X także należą do P. Jeśli Y nie należałby do P, to odcinek XY przecina powierzchnię wielościanu P w pewnym punkcie Z. Punkt Z należy do jednej ze ścian a_k. Zatem punkt X i Y leżą po różnych stronach a_k, a to zaprzecza określeniu P'.

Z drugiej strony, przecięcie skończonej liczby półprzestrzeni, jeśli jest ograniczone i ma punkty wewnętrzne, jest bryłą ograniczoną skończoną liczbą płaszczyzn, zatem jest ono wielościanem wypukłym.

---

[7] Dowód zaczerpnięty z książki Pogorelowa, *Geometrja*, Moskwa 1941.

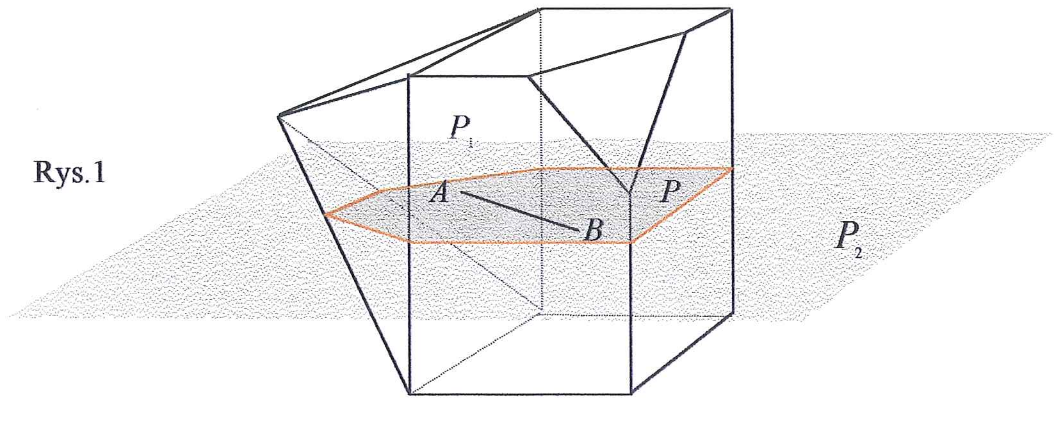
Twierdzenie 2[8]

Jeżeli dowolny wielościan wypukły przetniemy płaszczyzną, to przekrojem będzie figura wypukła, a dokładnie wielokąt wypukły. (rys. 1)

Dowód:

Oznaczmy P_1 – wielościan wypukły, P_2 – płaszczyzna, P – przecięcie wielościanu z płaszczyzną., A i B – dowolne punkty należące do przecięcia. Na mocy definicji przecięcia[9] oba punkty A i B należą zarówno do figury P_1 jak i do figury P_2. Ze względu na to, że figura P_1 jest wypukła, wszystkie punkty odcinka AB należą do figury P_1, a ze względu na to, że figura P_2 jest wypukła, wszystkie te punkty należą również do figury P_2. A więc cały odcinek AB należy do przecięcia P, a to właśnie znaczy, że przecięcie P jest wypukłe.

Rys.1



Przecięcie P jest wielokątem, gdyż jest figurą płaską ograniczoną łamaną zamkniętą, utworzoną z odcinków będących częścią wspólną płaszczyzny P_2 i tych ścian wielościanu, przez które ta płaszczyzna przeszła. Odcinki te nazywamy bokami wielokąta, a liczba ich zależy od tego przez ile ścian poprowadzimy płaszczyznę tnącą.

[8] O wielu innych ciekawych własnościach figur wypukłych możemy przeczytać w książce J.H. Jagłoma, W.C.Bołtianskiego, *Figury wypukłe,* Warszawa 1955. Większość z podanych w książce twierdzeń o figurach wypukłych na płaszczyźnie może być z reguły przeniesione na bryły wypukłe w przestrzeni niemal bez żadnych zmian w sformułowaniach i dowodach. Zagadnienia istotnie „trójwymiarowe" można znaleźć w książce L.Lusternika, *Bryły wypukłe*, Moskwa 1941 i A. Aleksandrowa, *Wielościany wypukłe*, Moskwa 1950

[9] Przecięciem dwóch (lub kilku) figur nazywamy figurę złożoną ze wszystkich punktów, które jednocześnie należą do obu figur (lub do wszystkich figur, jeśli jest ich kilka)

W każdym wieloboku liczba wierzchołków jest równa liczbie boków. Dla wielościanów nie zachodzi tak prosty związek ani między liczbą wierzchołków i ścian, ani między liczbą wierzchołków i krawędzi, ani też między liczbą krawędzi i ścian. Zachodzi natomiast bardzo prosty związek między trzema liczbami, a mianowicie między liczbą wierzchołków, ścian i krawędzi. Zależność tę, od nazwiska twórcy nazywamy tożsamością Eulera.

Oznaczmy:

W – liczba wierzchołków

K – liczba krawędzi

S – liczba ścian

Twierdzenie 3

zwane TWIERDZENIEM EULERA

W każdym wypukłym wielościanie suma liczby ścian i liczby wierzchołków jest o dwa większa od liczby jego krawędzi , tzn.

$$W+S=K+2$$

Jak wspomniano we wstępie znanych jest wiele dowodów tego twierdzenia, począwszy od dowodu Eulera z 1758r. Celem niniejszej pracy jest przedstawienie nowego dowodu tego twierdzenia, opartego na pryzmatoidach, dla których wzór Eulera jest łatwy do uzasadnienia.

§2 DEFINICJE I PRZYKŁADY PRYZMATOIDÓW

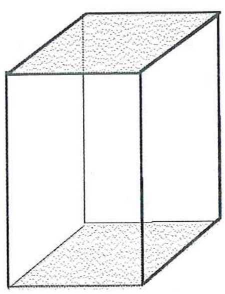
PRYZMATOID

Pryzmatoidem nazywamy wielościan wypukły, którego wszystkie wierzchołki leżą na dwóch płaszczyznach równoległych, z których każda zawiera choć trzy wierzchołki nie leżące na jednej prostej. Płaszczyzny te są płaszczyznami podstaw pryzmatoidu . Ściany pryzmatoidu będące częścią wspólną każdej z płaszczyzn podstaw pryzmatoidu i powierzchni tego pryzmatoidu nazywają się **podstawami pryzmatoidu**. Ściany pryzmatoidu leżące na płaszczyznach podstaw pryzmatoidu nazywają się odpowiednio **podstawą górną i podstawą dolną pryzmatoidu**. Pozostałe płaszczyzny ograniczające pryzmatoid są płaszczyznami ścian bocznych pryzmatoidu. Ściany pryzmatoidu będące częścią wspólną każdej z płaszczyzn ścian bocznych i powierzchni tego pryzmatoidu nazywają się **ścianami bocznymi pryzmatoidu**.

Ściany boczne pryzmatoidu mogą być trójkątami lub czworokątami, bowiem mogą mieć one z każdą z podstaw górną i dolną co najwyżej dwa wspólne wierzchołki.
Ściana boczna może łączyć krawędzie podstaw, wówczas ścianą boczną jest czworokąt. bądź łączyć wierzchołek jednej z podstaw z krawędzią drugiej podstawy, wówczas ścianą boczną jest trójkąt. Łatwo zauważyć, że wielokąt o większej niż 4 liczbie wierzchołków nie może być ścianą boczną pryzmatoidu, gdyż przynajmniej jeden z jego wierzchołków musiałby leżeć na innej płaszczyźnie niż płaszczyzny podstaw, a to jest sprzeczne z definicją pryzmatoidu.

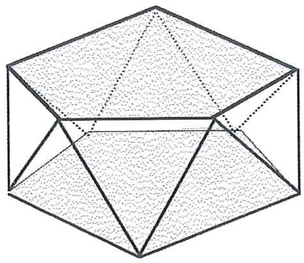
Przykłady pryzmatoidów

1. Każdy *graniastosłup* jest pryzmatoidem



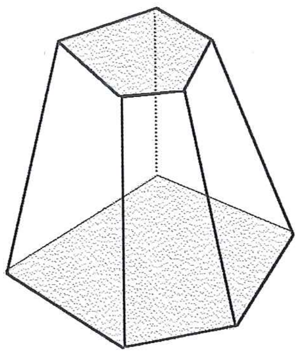
Graniastosłup jest to wielościan, którego wszystkie wierzchołki leżą na dwóch różnych płaszczyznach równoległych, a krawędzie nie zawarte w tych płaszczyznach są równoległe

2. Każdy *antygraniastosłup* jest również pryzmatoidem



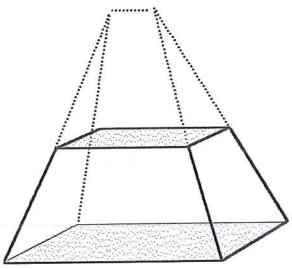
Antygraniastosłup jest to wielościan, którego dwie równoległe ściany są przystającymi n – kątami foremnymi i połączone są „paskiem" z na przemian ułożonych trójkątów równobocznych.

3. *Ostrosłup ścięty*, część ostrosłupa zawarta między płaszczyzną jego podstawy a równoległą doń płaszczyzną przechodzącą przez punkt wewnętrzny ostrosłupa.



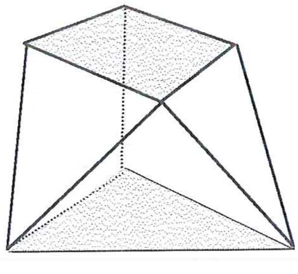
Ostrosłup ścięty jest wielościanem, którego brzeg składa się z dwu wielokątów podobnych F i F' oraz pewnej liczby trapezów (ścian bocznych)

4. *Pryzma* , jak sugeruje nazwa jest również przykładem pryzmatoidu



Pryzma jest wielościanem, którego dwie prostokątne ściany leżą w płaszczyznach równoległych, a przeciwległe ściany boczne są jednakowo nachylone do podstawy, ale po przedłużeniu nie przecinają się w jednym punkcie

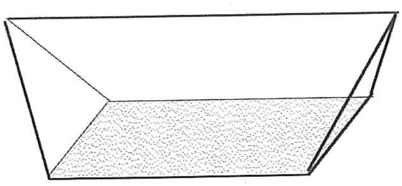
5. Przykład pryzmatoidu, który ma w podstawach wielokąty o różnych ilościach boków.



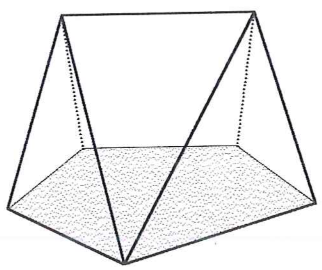
PRYZMATOID ZDEGENEROWANY

Pryzmatoidem zdegenerowanym nazywamy wielościan wypukły, którego wszystkie wierzchołki leżą na dwóch płaszczyznach, przy czym jedna płaszczyzna zawiera $n \geq 3$ wierzchołków wielościanu, a druga płaszczyzna zawiera jeden wierzchołek bądź dwa wierzchołki (czyli krawędź). Wielokąt zawarty w jednej z płaszczyzn będziemy nazywać **podstawą** pryzmatoidu zdegenerowanego, a płaszczyznę, w której jest zawarty płaszczyzną podstawy tego pryzmatoidu. Płaszczyznę, zawierającą pozostałe wierzchołki (1 lub 2) płaszczyzną górną pryzmatoidu.

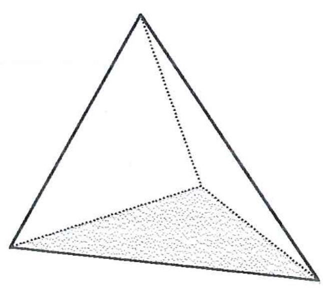
Przykłady pryzmatoidów zdegenerowanych:



Klin jest to wielościan, którego podstawą jest prostokąt, a ścianami bocznymi są dwa trapezy równoramienne i dwa trójkąty równoramienne.



Pryzmatoid zdegenerowany, którego podstawą jest pięciokąt, a płaszczyzna górna zawiera krawędź tego pryzmatoidu.



Ostrosłup jest przykładem pryzmatoidu zdegenerowanego

Ostrosłup jest to wielościan, którego powierzchnia składa się z wielokąta – zwanego podstawą ostrosłupa i pewnej liczby trójkątów – ścian bocznych o wspólnym wierzchołku.

§3 TOŻSAMOŚĆ EULERA DLA PRYZMATOIDÓW

Z poprzedniego rozdziału wiemy już, że pryzmatoid jest pewnym rodzajem wielościanu wypukłego, a twierdzenie 3 z §1 mówi o tym, że każdy wielościan wypukły spełnia tożsamość Eulera. Możemy zatem podejrzewać, że dzieje się tak też dla pryzmatoidów. Nie trudno sprawdzić, że pryzmatoidy przedstawione w poprzednim rozdziale spełniają wzór Eulera. Musimy jednak dowieść, że wzór ten jest prawdziwy dla wszystkich pryzmatoidów. Postaramy się to udowodnić w niniejszym rozdziale.

Dowód tożsamości Eulera dla pryzmatoidów.

Wprowadźmy dodatkowe oznaczenia.

Niech:

m – będzie liczbą wierzchołków jak również krawędzi dolnej podstawy pryzmatoidu.

n – będzie liczbą wierzchołków jak również krawędzi górnej podstawy pryzmatoidu,

k – będzie liczbą krawędzi bocznych pryzmatoidu.

Liczba **k** jest również liczbą ścian bocznych pryzmatoidu[10].

Nasz dowód przeprowadzimy w dwóch etapach, oddzielnie dla pryzmatoidów niezdegenerowanych i zdegenerowanych.

Pierwsza część dowodu,

dotyczy pryzmatoidów niezdegenerowanych.

- licząc wierzchołki pryzmatoidu sumujemy wierzchołki obu podstaw: $W = m + n$;
- licząc krawędzie pryzmatoidu sumujemy krawędzie obu podstaw i krawędzie boczne: $K = m + n + k$;
- licząc ściany sumujemy 2 podstawy i k ścian bocznych: $S = k + 2$;

$W + S = (m + n) + (k + 2) = m + n + k + 2.$

[10] Każda krawędź boczna łączy dwie ściany boczne, ale ściany zliczane są podwójnie, bo każdą ścianę boczną ograniczają dwie krawędzie boczne. Zatem $s = k$.

$K + 2 = m + n + k + 2.$

Mamy zatem: $W + S = K + 2.$

W drugiej części dowodu,

sprawdzimy co dzieje się w przypadku pryzmatoidów zdegenerowanych

I przypadek: $m \geq 3$ i $n = 2$

- licząc wierzchołki pryzmatoidu sumujemy wierzchołki podstawy i 2 wierzchołki podstawy górnej: $W = m + 2;$
- licząc krawędzie pryzmatoidu sumujemy krawędzie obu podstaw i krawędzie boczne: $K = m + k + 1;$
- w tym przypadku mamy jedną ścianę podstawy i k ścian bocznych: $S = k + 1;$

$W + S = (m + 2) + (k + 1) = m + k + 3.$

$K + 2 = m + k + 1 + 2 = m + k + 3.$

Mamy zatem: $W + S = K + 2.$

II przypadek: $m \geq 3$ i $n = 1$

- analogicznie jak w przypadku I: $W = m + 1;$
- licząc krawędzie pryzmatoidu sumujemy krawędzie podstawy i krawędzie boczne: $K = m + k;$
- tak jak w przypadku I: $S = k + 1;$

$W + S = (m + 1) + (k + 1) = m + k + 2.$

$K = m + k + 2.$

Mamy zatem: $W + S = K + 2.$

Jak widzimy wzór Eulera spełniony jest we wszystkich przypadkach.

§4 ROZCINANIE WIELOŚCIANU WYPUKŁEGO PŁASZCZYZNĄ A TOŻSAMOŚĆ EULERA

Pokazaliśmy, że wszystkie pryzmatoidy spełniają tożsamość Eulera.
Zanim rozetniemy nasz wielościan na pryzmatoidy, zobaczymy czy wielościan rozcięty na dwa dowolne wielościany spełniające wzór Eulera, również go spełnia. Sprawdzimy jaki wpływ ma sposób przeprowadzenia płaszczyzny tnącej na prawdziwość wzoru.

Twierdzenie 4

Jeśli wielościany P_1 i P_2 powstałe przez rozcięcie wielościanu wypukłego P płaszczyzną spełniają tożsamość Eulera, to i wielościan P ją spełnia.

Chcemy pokazać, że dla naszego wyjściowego wielościanu zachodzi wzór
$W + S = K + 2$, gdzie:
W – oznacza liczbę wierzchołków wielościanu P,
S – oznacza liczbę ścian wielościanu P,
K –oznacza liczbę krawędzi wielościanu P
Oznaczymy odpowiednio wielkości W_1, S_1, K_1 dla wielościanu P_1 i W_2, S_2, K_2 dla wielościanu P_2.

Zakładamy, że dla P_1: $W_1 + S_1 = K_1 + 2$,

i dla P_2: $W_2 + S_2 = K_2 + 2$,

Zbadamy jakie są wielkości W, S, K w zależności od odpowiednich wielkości w wielościanie P_1 i P_2.

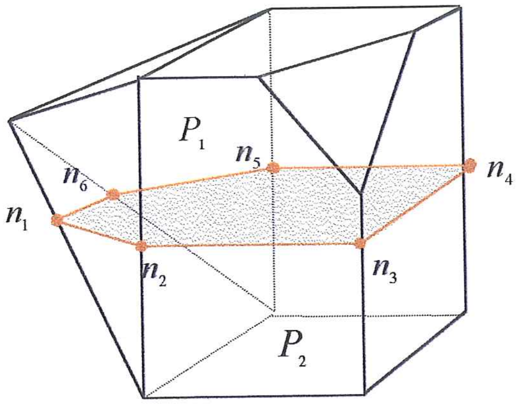
Rozpatrzymy następujące przypadki:

Przypadek I
gdy, płaszczyzna rozcinająca omija wierzchołki i nie zawiera krawędzi wielościanu P

W miejscu przecięcia wielościanu płaszczyzną powstają nam nowe wierzchołki.
Oznaczmy ich liczbę przez n. Przekrój wielościanu jest więc n- kątem i co za tym idzie n jest również liczbą nowo powstałych krawędzi. Widać, że n ścian wyjściowego

wielościanu zostało po rozcięciu podzielonych na dwie części. Zatem obliczając W, S, K sumujemy odpowiednie elementy należące do wielościanów P_1 i P_2 i odejmujemy elementy zliczone podwójnie, raz dla P_1 drugi raz dla P_2, których wielościan P nie posiadał, a które powstały przy rozcinaniu. (rys. 2)

Rys.2



- licząc wierzchołki wielościanu P sumujemy wierzchołki P_1 i P_2, odejmujemy dwukrotnie n nowo powstałych wierzchołków: $W = W_1 + W_2 - 2n$;
- Licząc ściany P musimy pamiętać o odjęciu n ścian, które podzieliła płaszczyzna tnąca i o przekroju wielościanu P, który jest ścianą zarówno P_1 jak i P_2: $S = S_1 + S_2 - n - 2$;
- W przypadku krawędzi tak jak w przypadku wierzchołków musimy pamiętać o dwukrotnym odjęciu n krawędzi przekroju P i n krawędzi, które na dwie części podzieliła płaszczyzna tnąca: $K = K_1 + K_2 - n - 2n = K_1 + K_2 - 3n$;

$$W + S = (W_1 + W_2 - 2n) + (S_1 + S_2 - n - 2) = W_1 + S_1 + W_2 + S_2 - 3n - 2.$$

Ponieważ z założenia P_1 i P_2 spełniają tożsamość Eulera, wiemy że:

$$W_1 + S_1 = K_1 + 2 \text{ oraz } W_2 + S_2 = K_2 + 2.$$

Podstawiając te równości do powyższego wzoru otrzymujemy:

$$W + S = K_1 + 2 + K_2 + 2 - 3n - 2 = K_1 + K_2 - 3n + 2.$$

Z drugiej strony mamy

$$K + 2 = K_1 + K_2 - 3n + 2,$$

a zatem:

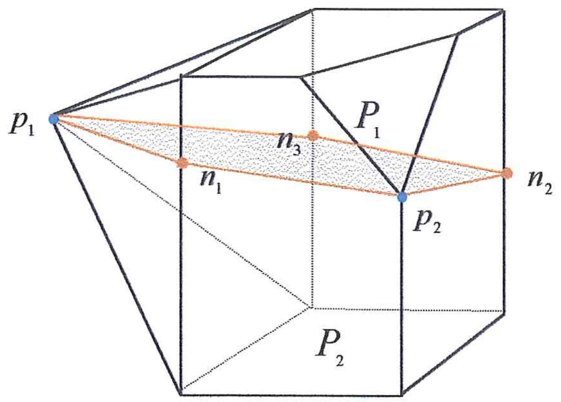
$$W + S = K + 2.$$

Przypadek II

gdy, płaszczyzna rozcinająca zawiera wierzchołki, ale nie zawiera krawędzi wielościanu P.

Oznaczmy przez p ilość wierzchołków, przez które przechodzi płaszczyzna rozcinająca, zaś przez n ilość nowych wierzchołków. Przekrój wielościanu jest (n + p) - kątem. Przy rozcinaniu zostało podzielonych na dwie części n krawędzi (to są te krawędzie na których powstały nowe wierzchołki) i (n + p) ścian. (rys. 3)

Rys.3



- licząc wierzchołki wielościanu P sumujemy wierzchołki P_1 i P_2, odejmujemy dwukrotnie n nowo powstałych wierzchołków i p wierzchołków, które zliczono podwójnie: $W = W_1 + W_2 - 2n - p$;
- licząc ściany P postępujemy analogicznie jak przy liczeniu ścian w przypadku I, pamiętając, że tym razem podzielono (n + p) ścian: $S = S_1 + S_2 - (n + p) - 2$;
- krawędzie również liczymy analogicznie jak w przypadku I:
  $K = K_1 + K_2 - n - 2(n + p)$;

$$W + S = (W_1 + W_2 - 2n - p) + (S_1 + S_2 - (n + p) - 2) =$$
$$W_1 + S_1 + W_2 + S_2 - 3n - 2p - 2.$$

Ponieważ z założenia P_1 i P_2 spełniają tożsamość Eulera, wiemy że:

$$W_1 + S_1 = K_1 + 2 \quad \text{oraz} \quad W_2 + S_2 = K_2 + 2.$$

Podstawiając te równości do powyższego wzoru otrzymujemy:

$$W + S = K_1 + 2 + K_2 + 2 - 3n - 2p - 2 = K_1 + K_2 - 3n - 2p + 2.$$

Z drugiej strony mamy

$K + 2 = K_1 + K_2 - n - 2(n + p) + 2 = K_1 + K_2 - 3n - 2p + 2,$

zatem:

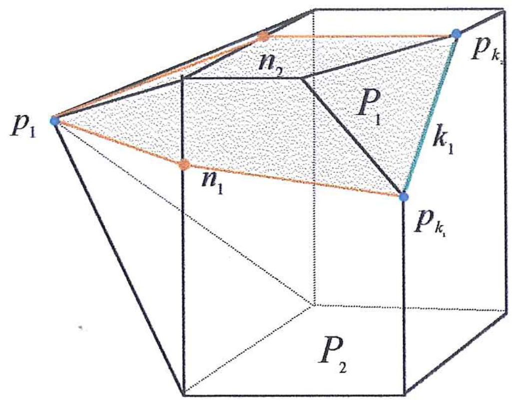
$W + S = K + 2.$

Przypadek III - ogólny

gdy, płaszczyzna rozcinająca przechodzi przez krawędzie i wierzchołki wielościanu P

Załóżmy, że płaszczyzna rozcinająca wyznacza n nowych wierzchołków, przechodzi przez p starych wierzchołków i przez k starych krawędzi. Wśród p starych wierzchołków są również te, które są końcami krawędzi zawartych w płaszczyźnie przekroju, oznaczymy je symbolem p_k. (rys. 4).

Rys.4



- zliczanie wierzchołków odbywa się dokładnie tak samo jak w przypadku II:
  $W = W_1 + W_2 - 2n - p;$
- w tym przypadku należy zwrócić uwagę na to, że zliczono podwójnie (n+p-k) ścian, gdyż przy k krawędziach, przechodząca płaszczyzna tnąca nie dzieliła ścian P:
  $S = S_1 + S_2 - (n + p - k) - 2;$
- licząc krawędzie postępujemy analogicznie jak w poprzednich przypadkach: po zsumowani wszystkich krawędzi P_1 i P_2, odejmujemy n podzielonych krawędzi, odejmujemy dwukrotnie krawędzie należące do przekroju pamiętając o ponownym dodaniu k krawędzi, które należały do wielościanu P:
  $K = K_1 + K_2 - n - 2(n + p) + k;$

$W + S = (W_1 + W_2 - 2n - p) + (S_1 + S_2 - (n + p - k) - 2) =$

$W_1 + W_2 - 2n - p + S_1 + S_2 - (n + p - k) - 2 = W_1 + S_1 + W_2 + S_2 - 3n - 2p + k - 2.$

Korzystając z założenia, że P_1i P_2 spełniają tożsamość Eulera, mamy:

$W_1 + S_1 = K_1 + 2$ i $W_2 + S_2 = K_2 + 2.$

Podstawiając te równości do powyższego wzoru otrzymujemy:

$W + S = K_1 + 2 + K_2 + 2 - 3n - 2p + k - 2 = K_1 + K_2 - 3n - 2p + k + 2.$

Z drugiej strony mamy

$K + 2 = K_1 + K_2 - n - 2(n + p) + k + 2 = K_1 + K_2 - 3n - 2p + k + 2,$

zatem i w tym przypadku:

$W + S = K + 2.$

Tym sposobem udowodniliśmy, że niezależnie od tego jak poprowadzimy płaszczyznę tnącą , wielościan wypukły P spełnia tożsamość Eulera, jeśli wielościany P_1 i P_2 powstałe przez rozcięcie wielościanu P ją spełniają.

§5 ROZCINANIE DOWOLNEGO WIELOŚCIANU WYPUKŁEGO NA PRYZMATOIDY RODZINĄ PŁASZCZYZN RÓWNOLEGŁYCH

W poprzednim paragrafie rozcinaliśmy wielościan płaszczyzną na dwa wielościany. Wyobraźmy sobie, że powtarzamy operację cięcia na tych nowopowstałych wielościanach. Przy odpowiednim poprowadzeniu następnych płaszczyzn tzn. tak by wszystkie płaszczyzny były równoległe i tak by każdy wierzchołek wielościanu zawarty był w którejś z tych płaszczyzn, łatwo pokusić się o stwierdzenie następujących faktów:

Fakt A

Rozcinając dowolny wielościan wypukły rodziną płaszczyzn równoległych, przechodzących przez wierzchołki wyjściowego wielościanu otrzymamy pryzmatoidy.

Fakt B

Każdy wielościan wypukły można rozciąć na pryzmatoidy rodziną płaszczyzn równoległych w taki sposób, by żadna płaszczyzna tnąca nie zawierała jego krawędzi.

Fakt C

Każdy wielościan wypukły można rozciąć na pryzmatoidy rodziną płaszczyzn równoległych w taki sposób, by każda z płaszczyzn rozcinających zawierała dokładnie jeden wierzchołek wielościanu.

Powyższe fakty wskazują nam sposób rozcinania wielościanu P. Zanim jednak je uzasadnimy przedstawimy sposób konstruowania płaszczyzn tnących.

Opis sposobu rozcinania:

1. Weźmy wielościan P.
2. Wybieramy kierunek płaszczyzny
   a) dowolny,
   b) taki, by płaszczyzna o tym kierunku nie była równoległa do żadnej krawędzi wielościanu P (Fakt B),
   c) taki, by płaszczyzna o tym kierunku nie była równoległa do żadnego odcinaka łączącego wierzchołki wielościanu P (Fakt C),
3. Prowadzimy płaszczyzny o wybranym kierunku przez każdy wierzchołek wielościanu P. To daje nam rodzinę płaszczyzn równoległych.

Wybór kierunku płaszczyzny wiąże się z tym w jaki sposób chcemy rozciąć nasz wielościan P. Postaramy się zilustrować możliwości prowadzenia płaszczyzn. Dla przejrzystości rysunków posłużymy się w miarę „prostymi" wielościanami. Ilość płaszczyzn potrzebnych do rozcięcia wielościanu na pryzmatoidy zależy od stopnia „skomplikowania" wielościanu i od sposobu prowadzenia płaszczyzn.

Możemy rozciąć wielościan:

a) dowolnie

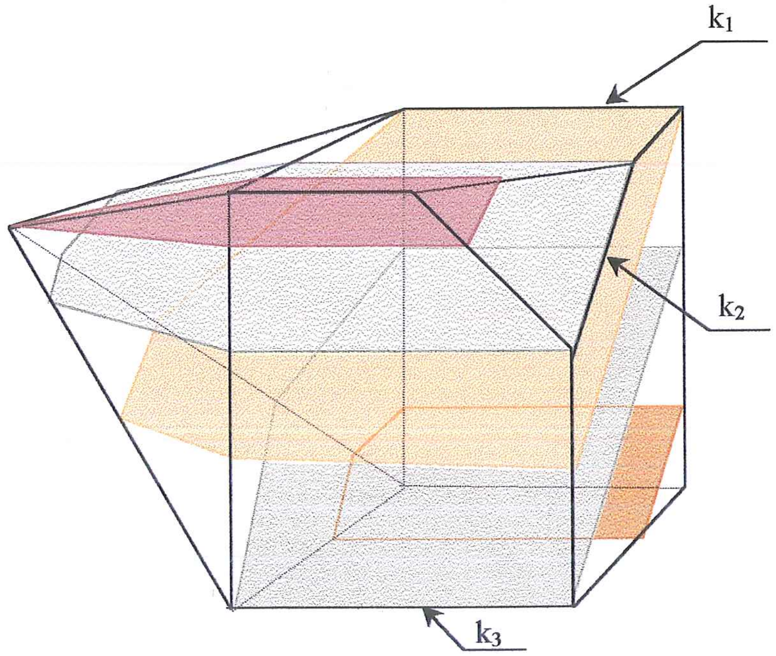
Niezależnie od doboru kierunku płaszczyzny (kierunek dowolny), rodzina płaszczyzn poprowadzonych według powyżej przedstawionego opisu, rozcina wielościan na pryzmatoidy (Fakt A).

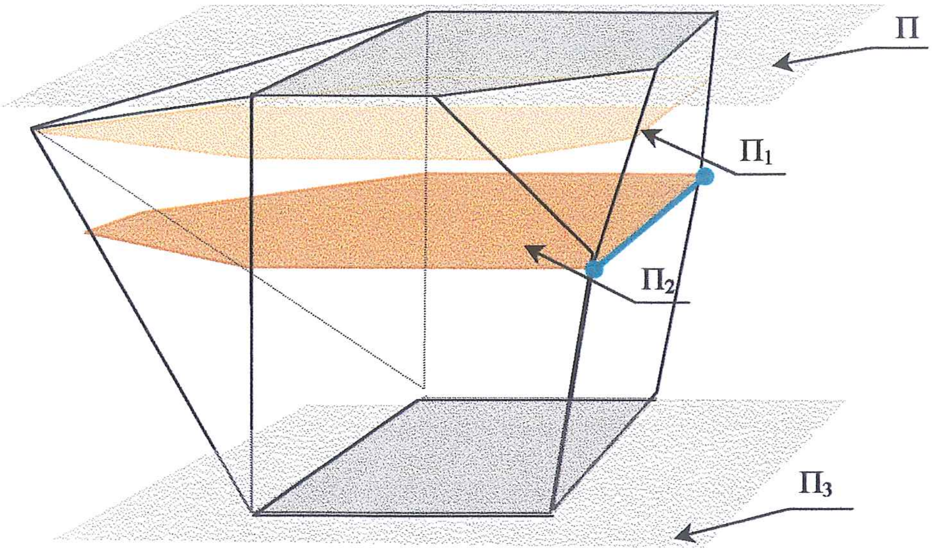
Uzasadnienia faktu A

Prowadząc płaszczyzny równolegle i tak by każdy wierzchołek wielościanu leżał na jednej z tych płaszczyzn, gwarantujemy sobie, że wielościany zawarte między dwiema sąsiednimi płaszczyznami, maja swoje wierzchołki tylko na tych dwóch płaszczyznach, a taki wielościan zgodnie z definicją z §2 jest pryzmatoidem. Gdyby jednak zdarzyło się, że między tymi dwoma płaszczyznami znalazłby się wierzchołek, zawsze możemy poprowadzić następną płaszczyznę równoległą do pozostałych i zawierającą ten wierzchołek.

Rysunki 5a i 5b przedstawiają sytuacje, w których płaszczyzny tnące poprowadzono dowolnie. W przypadku 5a płaszczyzny zawierają krawędzie, a w przypadku 5b ściany wielościanu.

Rys.5a



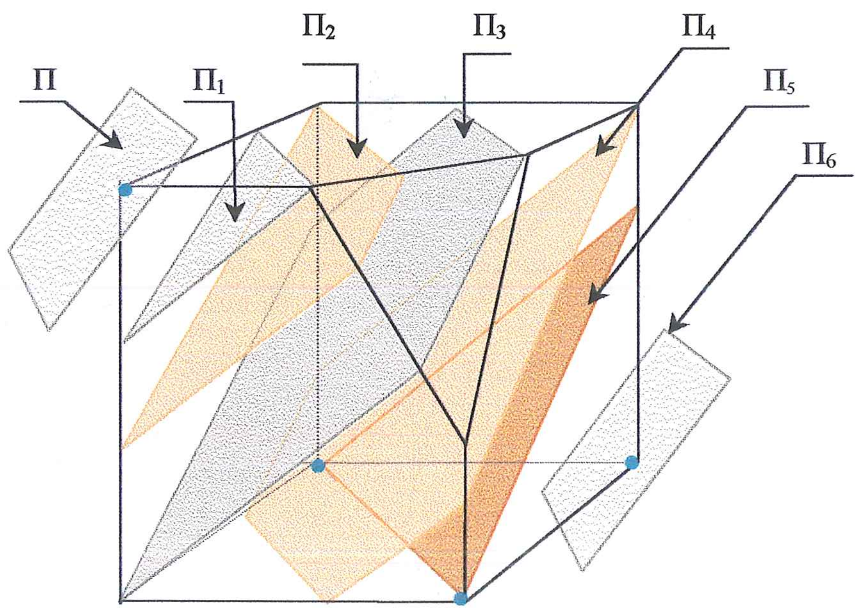


Rys.5b

Fakt B wskazuje na inny sposób rozcinania wielościanu.

b) Tak, by żadna płaszczyzna tnąca nie zawierała krawędzi wielościanu.

W tym celu musimy nieco staranniej dobrać kierunek płaszczyzny, a mianowicie tak, by płaszczyzna o tym kierunku nie była równoległa do żadnej krawędzi naszego wielościanu. (rys. 6)



Rys.6

Dobór kierunku płaszczyzny decyduje czy płaszczyzny tnące nie będą zawierały niepożądanych elementów (w tym wypadku krawędzi). Nasuwa się pytanie, czy zawsze można znaleźć tak dobrze dobraną płaszczyznę, która nam to zagwarantuje.

Uzasadnienie faktu B

Niech S oznacza sferę o środku s i promieniu r, niech n oznacza liczbę krawędzi wielościanu P.

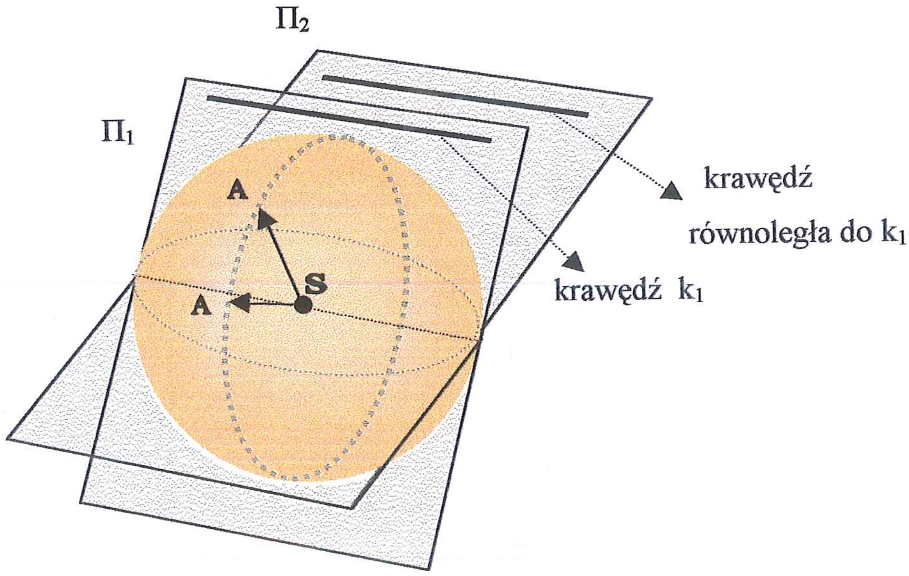
Weźmy dowolną krawędź k_1

Wyznaczmy średnicę d_1 sfery równoległą do krawędzi k_1.

Poprowadźmy płaszczyznę przez średnicę sfery równoległą do krawędź k_1(rys.7a). Wówczas wektor prostopadły do tej płaszczyzny o początku w punkcie s i długości równej promieniowi sfery S wyznaczy na sferze punkt A. Nazwijmy ten wektor wektorem normalnym płaszczyzny i oznaczmy go $\vec{n}$. Jeżeli poprowadzimy przez średnicę d_1 wszystkie płaszczyzny równoległe do krawędzi k_1, to końce wektorów normalnych tych płaszczyzn wyznaczą nam na sferze S okrąg o_1.

Weźmy teraz krawędź k_2 i wszystkie płaszczyzny do niej równoległe. Postępując tak jak z krawędzią k_1 otrzymamy okrąg o_2.

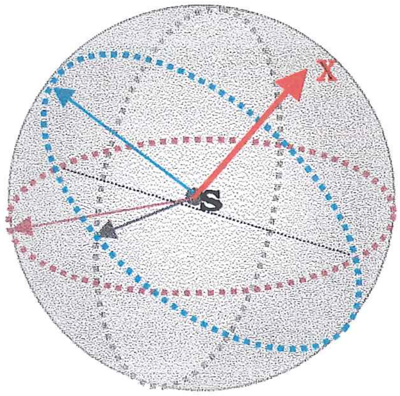
Postępujemy tak z każdą z n krawędzi, otrzymując n okręgów na sferze. Jeżeli, któreś z krawędzi są ze sobą równoległe, wówczas ich okręgi pokryją się.



Rys. 7a

Liczba krawędzi w wielościanie P jest skończona, zatem liczna okręgów utworzonych na sferze S również będzie skończona. Istnieje zatem na sferze punkt X nie należący do żadnego z tych okręgów. Wektor $\vec{sx}$ jest wektorem normalnym pewnej płaszczyzny, tzn. wyznacza nam płaszczyznę, która nie jest równoległa do żadnej z krawędzi wielościanu P.

Rys. 7b



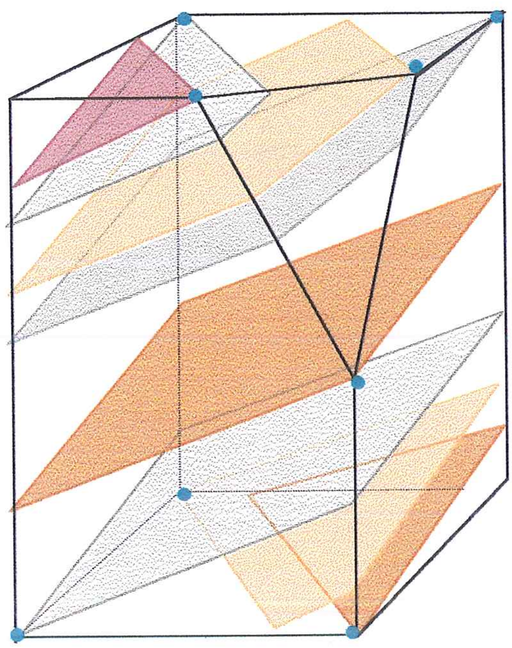
Fakt C wskazuje na jeszcze staranniejsze rozcinanie.

c) Tak, by każda z płaszczyzn tnących zawierała dokładnie jeden wierzchołek.

Kierunek płaszczyzny w tym przypadku musi być taki aby, by płaszczyzna nie była równoległa do żadnego odcinaka łączącego wierzchołki wielościanu. (rys.7)

Ten sposób wymusza na nas największą liczbę cięć.

Rys.7



Tutaj również musimy się zastanowić, czy zawsze znajdziemy taki kierunek płaszczyzny , który pozwoli pociąć wielościan w żądany sposób.

Uzasadnienie faktu C

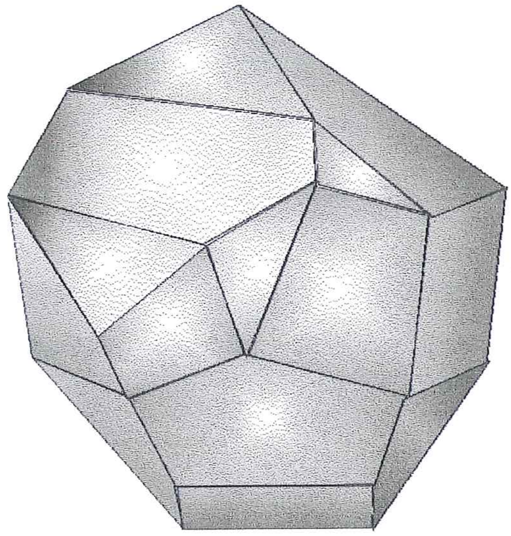
Wystarczy znaleźć taką płaszczyznę, by nie była równoległa do żadnego odcinka łączącego dwa dowolne wierzchołki wielościanu P.

Niech S oznacza sferę o środku s i promieniu r.

Niech n oznacza liczbę krawędzi k wielościanu P, a m oznacza liczbę odcinków q łączących wierzchołki wielościanu, nie należące do jednej krawędzi. Postępując tak jak w uzasadnieniu faktu B rozważamy dla każdej krawędzi k i dla każdego odcinka q płaszczyzny równoległe do nich i przechodzące przez środek sfery. Wektory normalne tych płaszczyzn wyznaczają okręgi na sferze S. Ponieważ jest n+m wszystkich odcinków łączących dwa wierzchołki wielościanu, zatem będzie n+m okręgów na sferze. Jeśli któreś z tych odcinków lub krawędzi są równoległe ich okręgi pokryją się. Zawsze jednak możemy znaleźć punkt X nie należący do n+m okręgów na sferze. Wektor $\vec{sx}$ jest wektorem normalnym pewnej płaszczyzny, która nie jest równoległa do żadnego z n+m odcinków łączących dwa wierzchołki wielościanu P.

§6 DOWÓD TOŻSAMOŚCI EULERA DLA DOWOLNEGO WIELOŚCIANU WYPUKŁEGO.

W poprzednich paragrafach szczegółowo omówiliśmy zagadnienia, które teraz wykorzystamy do przeprowadzenia dowodu tożsamości Eulera dla dowolnego wielościanu. Dowód ten będzie składał się z kilku etapów, w których odwołamy się do rezultatów naszych wcześniejszych rozważań.



rys.8

Dowód:

Niech P będzie dowolnym wielościanem wypukłym.

(przykładowy wielościan przedstawia rys. 8, natomiast rys. 9 obrazuje poniższy dowód)

1. **Rozcinamy wielościan P na pryzmatoidy jednym ze sposobów z rozdziału 5.**

Niech n oznacza liczbę płaszczyzn tnących, a p_k dla $k \in \{1,2,3...,n+1\}$ kolejne pryzmatoidy na które rozpadł się nasz wyjściowy wielościan. Liczba n zależy jak już wcześniej wspomnieliśmy od stopnia „skomplikowania" wielościanu i od sposobu rozcinania. Wielościan który ma w wierzchołków, można pociąć na w-1 pryzmatoidów, gdy wybierzemy trzeci sposób rozcinania, tzn. ten w którym płaszczyzna tnąca zawiera dokładnie jeden wierzchołek wielościanu P. Najmniejszą liczbę pryzmatoidów otrzymamy, gdy wielościan rozetniemy pierwszym sposobem, prowadząc pierwszą płaszczyznę przez jak największą liczbę wierzchołków wielościanu P. Może się zdarzyć, że już pierwsza płaszczyzna przetnie nasz wielościan na dwa pryzmatoidy, ale w większości przypadków wielościan rozpada się na więcej niż dwa pryzmatoidy.

Każdy z tych pryzmatoidów spełnia tożsamość Eulera, co pokazano w rozdziale 3.

Skoro k pryzmatoidów powstało po rozcięciu naszego wielościanu P, to składając te pryzmatoidy ze sobą otrzymamy nasz wyjściowy wielościan P.

2. **Weźmy dwa sąsiednie pryzmatoidy p_1 i p_2.**

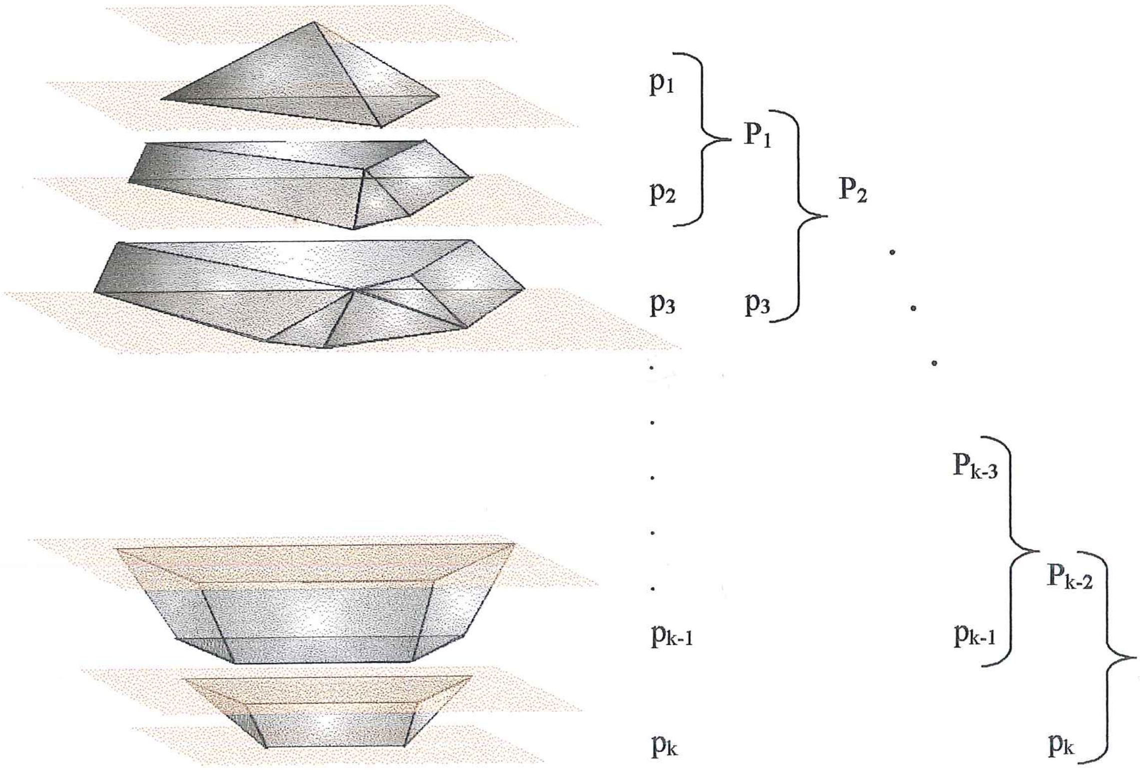
Możemy założyć, że powstały one po rozcięciu pewnego wielościanu P_1 .

3. **Łącząc ze sobą pryzmatoid p_1 i p_2 otrzymamy ponownie wielościan P_1.**
   W rozdziale 4 udowodniliśmy, że taki wielościan spełnia tożsamość Eulera.
   Możemy założyć, że wielościan P_1 i pryzmatoid p_3 powstały po rozcięciu pewnego wielościanu P_2.
4. **Łączymy wielościan P_1 z pryzmatoidem p_3 i otrzymujemy wielościan P_2, itd.**

   •
   •
   •
   •

5. **Łączymy wielościan P_{k-1} z ostatnim pryzmatoidem p_k i otrzymujemy nasz wyjściowy wielościan P, który spełnia tożsamość Eulera,** co było do udowodnienia.

Rys. 9



Powyżej przedstawiony dowód może mieć kilka wariantów.
W zależności, od tego jaki sposób rozcinania wybraliśmy w punkcie 1 dowodu, będziemy argumentować prawdziwość wzoru Eulera dla wielościanu, rozciętego na dwa wielościany spełniające tożsamość Eulera.

- Możemy wybrać najprostsze cięcie, tzn. takie w którym kierunek płaszczyzn tnących jest dowolny. Wówczas płaszczyzna może przejść przez krawędzie wielościanu . W tej sytuacji trudniej jest uzasadnić, że wielościan rozcięty w ten sposób spełnia tożsamość Eulera o ile spełniają go dwa wielościany, które powstały przez to rozcięcie (przypadek III z rozdziału 4)
- Drugim wariantem dowodu jest ten, w którym bardziej starannie rozetniemy wielościan. Wybierając kierunek płaszczyzny tak, by nie była równoległa do żadnej krawędzi, bądź do żadnego odcinka łączącego dwa wierzchołki (Przykład II lub III z paragrafu 5). Płaszczyzny w tym wypadku nie zawierają krawędzi wielościanu, dlatego można przytoczyć prostszy rozumowanie o prawdziwości wzoru Eulera dla wielościanu przy tym sposobie rozcinania (przypadek II w rozdziale 4)

Podsumowując nasze rozważania widzimy, że każdy wielościan wypukły można pociąć rodziną płaszczyzn równoległych tak by podzieliły one ten wielościan na pryzmatoidy. Każdy z pryzmatoidów spełnia tożsamość Eulera i tym samym nasz wielościan również ją spełnia.