Uniwersytet Wrocławski
Wydział Matematyki i Informatyki

Praca magisterska

Graniastosłupy skręcone

Barbara Kuźnar

Praca napisana
pod kierunkiem
dr hab. Jacka Świątkowskiego

WROCŁAW 2002

Spis treści

Wstęp.

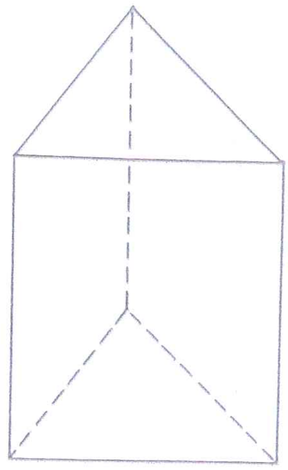
W trakcie nauki szkolnej poznajemy różne bryły, a pośród nich graniastosłupy prawidłowe.

Znając już dobrze pojęcie graniastosłupów prawidłowych i ich własności możemy z nich tworzyć nowe bryły. Weźmy dwa przystające wielokąty foremne i nałóżmy je na siebie, tak aby boki się pokrywały. Następnie jeden z tych wielokątów skręcamy o kąt $\frac{\pi}{n}$ (gdzie n to ilość wierzchołków wielokąta foremnego) i podnieśmy go prostopadle w górę na wysokość h. Łącząc każdy wierzchołek jednej z podstaw z dwoma najbliższymi wierzchołkami drugiej podstawy otrzymujemy krawędzie boczne.

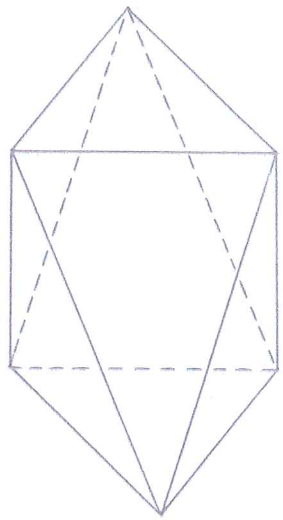
Otrzymana figura przestrzenna to graniastosłup skręcony składająca się z podstaw, które są przystającymi wielokątami foremnymi a ściany boczne są przystającymi trójkątami równoramiennymi.

Można zauważyć pewne podobieństwo między graniastosłupem prawidłowym a graniastosłupem skręconym. W obu bryłach podstawy są wielokątami foremnymi a ściany boczne są przystające. Różnica polega na tym, że w graniastosłupie skręconym ściany boczne są trójkątami równoramiennymi i jest ich dwa razy więcej niż w graniastosłupie prawidłowym.

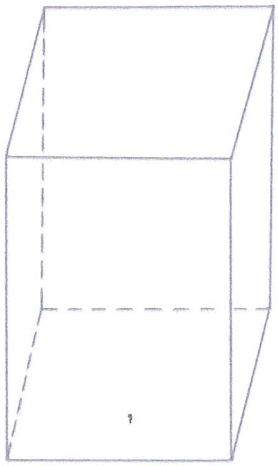
Oto niektóre przykłady graniastosłupów prawidłowych i skręconych o tych samych podstawach.



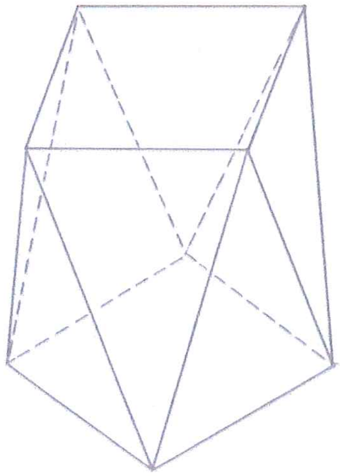
graniastosłup prawidłowy trójkątny



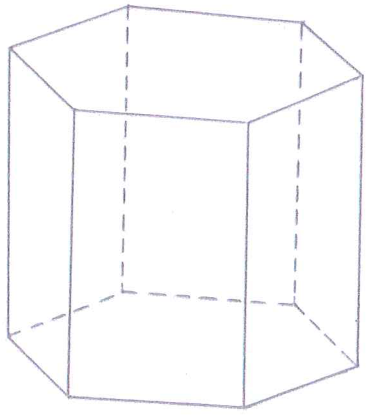
graniastosłup skręcony trójkątny



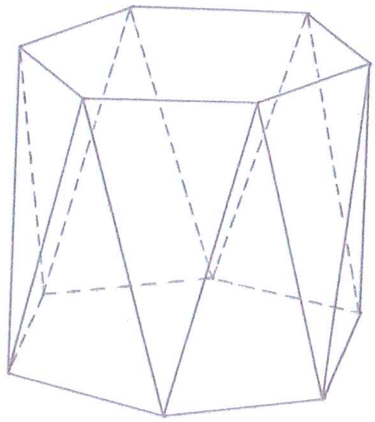
graniastosłup prawidłowy czworokątny



graniastosłup skręcony czworokątny



graniastosłup prawidłowy sześciokątny



graniastosłup skręcony sześciokątny

W niniejszej pracy zajmiemy się własnościami graniastosłupów skręconych.

W rozdziale I podamy definicję graniastosłupa skręconego i wyznaczymy pewne wielkości potrzebne do opisania jego własności.

W rozdziale II policzymy pole powierzchni bocznej graniastosłupa skręconego a w III pokażemy jak obliczyć jego objętość.

W rozdziale IV podamy definicję bryły Archimedesowej i wyznaczymy taką własność graniastosłupa skręconego, aby jego ściany boczne były trójkątami równobocznymi.

W rozdziale V pokażemy, jaki musi być promień sfery, aby można ją było opisać na graniastosłupie skręconym.

W rozdziale VI wyliczymy, jak należy dobrać wysokość graniastosłupa skręconego, aby w ten graniastosłup można było wpisać kulę.

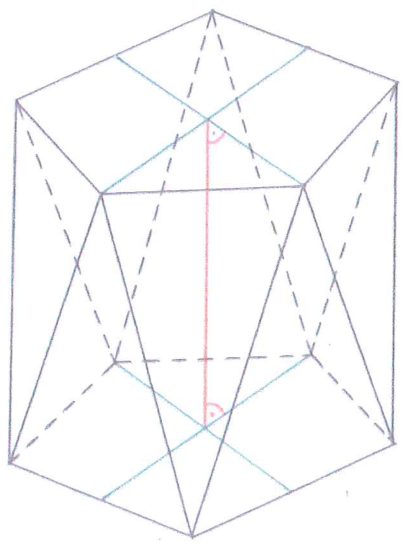
W rozdziale VII rozpatrzymy symetrie graniastosłupa skręconego.

W rozdziale VIII podamy warunek na to, aby można było wpisać kulę w krawędzie graniastosłupa skręconego oraz wyliczymy promień tej kuli.

I. Definiowanie pojęć.

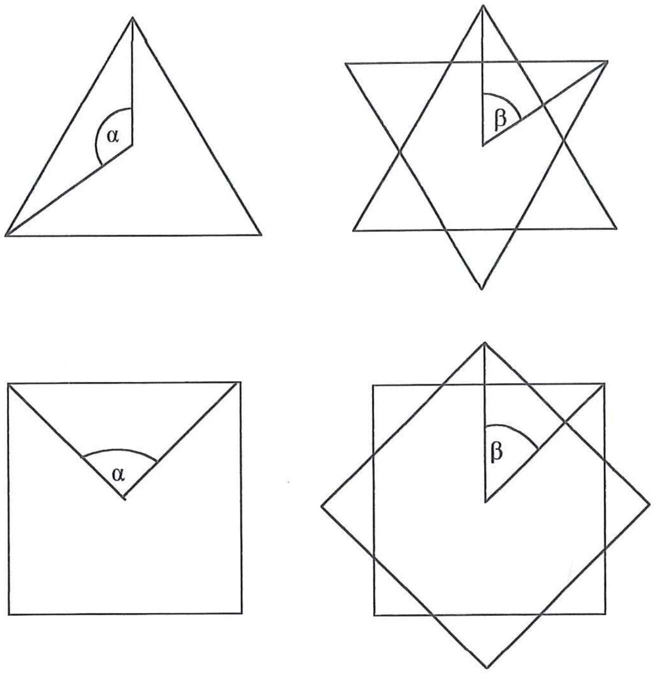
Graniastosłup skręcony jest to wielościan, którego podstawy, są przystającymi wielokątami foremnymi, leżącymi w płaszczyznach równoległych, z których jeden obrócony jest w stosunku do drugiego o pewien kąt β tak, że ściany boczne są przystającymi trójkątami równoramiennymi a krawędzie boczne są odcinkami łączącymi wierzchołek jednej z podstaw z dwoma sąsiadującymi wierzchołkami drugiej podstawy.

Wysokością graniastosłupa skręconego h jest odcinek łączący środki górnej i dolnej podstawy pod kątem prostym do obu tych podstaw. *(rys. 1)*



rys.. 1

Dla pełnej definicji brakuje wartości kąta β, o który jedna podstawa jest obrócona w stosunku do drugiej. Skoro z definicji ściany boczne są trójkątami równoramiennymi, to sposób obrócenia podstaw musi wyglądać jak na rys.unku 2.



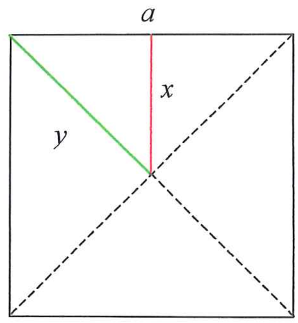
rys.. 2

Z rys.unków wynika, że kąt β stanowi połowę kąta $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ będącego najmniejszym kątem obrotu będącego symetrią *n–kąta* foremnego czyli:

$$\beta = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{n} = \frac{\pi}{n}.$$

W kolejnych działach będziemy wprowadzać wzory opisujące poszczególne własności graniastosłupów skręconych. Skorzystamy w nich z dwóch wielkości: x i y.

Przez y oznaczyliśmy odcinek, który łączy środek podstawy z wierzchołkiem, przez x, odcinek łączący środek podstawy ze środkiem krawędzi podstawy *(rys. 3)*



rys.. 3

Wyraźmy wielkości x i y wzorami korzystając z własności trójkąta.

$$\beta = \frac{\pi}{n}$$

$$tg\frac{\pi}{n} = \frac{sin\frac{\pi}{n}}{cos\frac{\pi}{n}}$$

$$tg\frac{\pi}{n} = \frac{\frac{a}{2}}{x}$$

$$x\,tg\frac{\pi}{n} = \frac{a}{n}$$

$$x = \frac{a}{2}\cdot\frac{1}{tg\frac{\pi}{n}} = \frac{a}{2}\cdot\frac{cos\frac{\pi}{n}}{sin\frac{\pi}{n}} = \frac{a\,cos\frac{\pi}{n}}{2\,sin\frac{\pi}{n}}$$

$$sin\frac{\pi}{n} = \frac{\frac{a}{2}}{y}$$

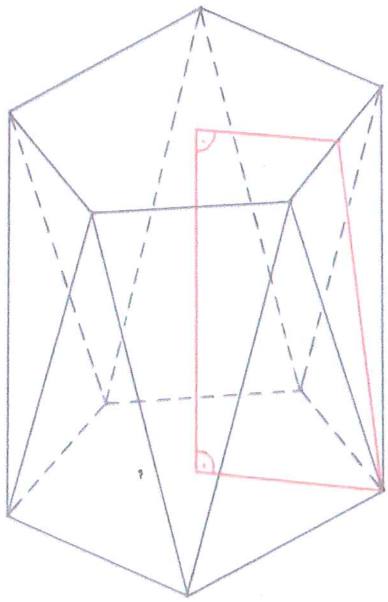
$$y = \frac{a}{2}\cdot\frac{1}{sin\frac{\pi}{n}} = \frac{a}{2\,sin\frac{\pi}{n}}.$$

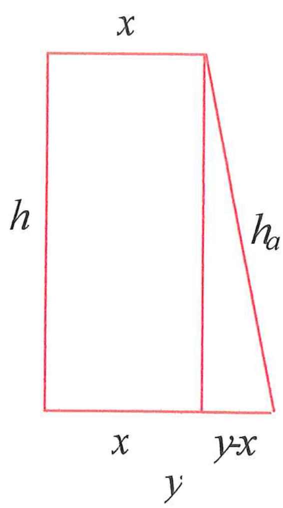
Zatem

$$x = \frac{a\,cos\frac{\pi}{n}}{2\,sin\frac{\pi}{n}}, \quad \text{a} \quad y = \frac{a}{2\,sin\frac{\pi}{n}}.$$

II. Pole powierzchni bocznej.

Powierzchnia boczna graniastosłupa skręconego składa się z $2n$ (n– ilość wierzchołków w podstawie) przystających trójkątów równoramiennych o podstawie a. Aby obliczyć ich pole należy wyznaczyć wysokość ściany bocznej. Rozważmy przekrój graniastosłupa płaszczyzną prostopadłą do podstaw, dzielącą je na dwie równe części. Fragment przekroju przedstawiony jest na rys.unku 4.





rys. 4

W tym przekroju można wyróżnić trójkąt prostokątny. Przeciwprostokątna jest wysokością ściany bocznej h_a, jedna z przyprostokątnych to wysokość graniastosłupa skręconego h (odcinek łączący środki górnej i dolnej podstawy) a druga odcinek będący różnicą odcinków y i x opisanych w rozdziale I. Korzystając z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy:

$$h_a^2 = h^2 + (y - x)^2,$$

gdzie $$(y-x)^2 = \left(\frac{a\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)}{2\sin\frac{\pi}{n}}\right)^2 = \frac{a^2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2}{4\sin^2\frac{\pi}{n}}.$$

Wykorzystując wyznaczone w rozdziale I wielkości x i y, wyznaczymy wysokość ściany bocznej:

$$h_a = \sqrt{h^2 + \frac{a^2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2}{4\sin^2\frac{\pi}{n}}}.$$

Zatem pole powierzchni bocznej P_b wynosi:

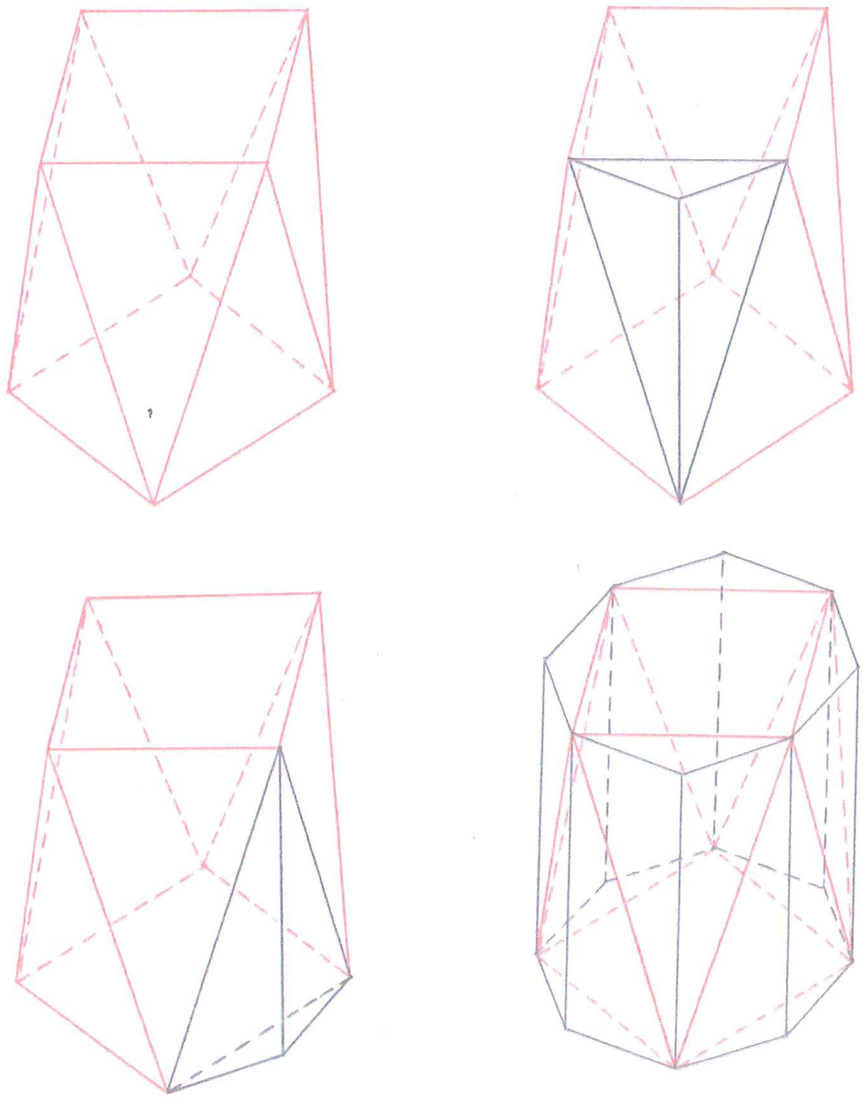
$$P_b = 2n\cdot P_s = 2n\cdot\frac{1}{2}\cdot a\sqrt{h^2 + \frac{a^2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2}{4\sin^2\frac{\pi}{n}}} = a\cdot n\sqrt{h^2 + \frac{a^2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2}{4\sin^2\frac{\pi}{n}}}$$

P_s – pole trójkątnej ściany bocznej.

III. Objętość.

Aby obliczyć objętość V graniastosłupa skręconego, przedstawimy ją jako różnicę objętości brył, które łatwo jest policzyć.

Do graniastosłupa dobudujemy wzdłuż każdej spośród $2n$ ścian bocznych pewne ostrosłupy, aby otrzymać graniastosłup prawidłowy. Następnie policzymy objętość V_g powstałego graniastosłupa i odejmiemy od niej objętość $2n \cdot V_o$ ostrosłupów dobudowanych. Sposób dobudowania ostrosłupów, przedstawia rys.unek 5:



rys..5

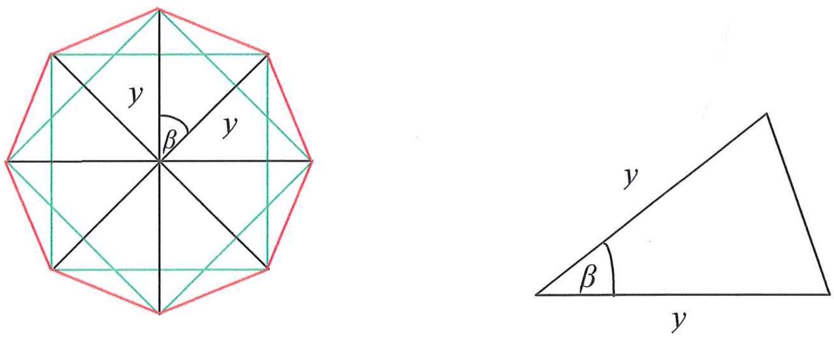
W ten sposób otrzymaliśmy objętość graniastosłupa skręconego, którą wyrażamy wzorem:

$$(*) \qquad V = V_g - 2n \cdot V_o.$$

Policzymy teraz objętość graniastosłupa prawidłowego :

$$V_g = P_p \cdot h.$$

Po dobudowaniu ostrosłupów powstał graniastosłup prawidłowy o podstawach *2n*–kąta foremnego.



rys.. 6

Aby obliczyć pole podstawy podzieliliśmy ja na $2n$ trójkątów równoramiennych, których ramiona są równe y. Rozważmy jeden z tych trójkątów *(rys. 6)* i obliczmy jego pole P_Δ. Ponieważ wiemy, że $\beta = \frac{\pi}{n}$, skorzystamy z ogólnego wzoru na pole trójkąta

$$P_\Delta = \frac{1}{2} c \cdot b \cdot \sin \gamma.$$

Podstawiając nasze dane otrzymujemy:

$$P_\Delta = \frac{1}{2} \cdot y \cdot y \cdot \sin \frac{\pi}{n}.$$

Stąd pole podstawy graniastosłupa prawidłowego wynosi:

$$P_p = 2n\left(\frac{1}{2} \cdot y^2 \cdot \sin\frac{\pi}{n}\right) = n \cdot y^2 \cdot \sin\frac{\pi}{n}.$$

Wiedząc, że
$$y = \frac{a}{2\sin\frac{\pi}{n}}$$

otrzymujemy ostatecznie
$$P_p = n \cdot \frac{a^2}{4\sin^2\frac{\pi}{n}} \cdot \sin\frac{\pi}{n} = \frac{n \cdot a^2}{4\sin\frac{\pi}{n}}.$$

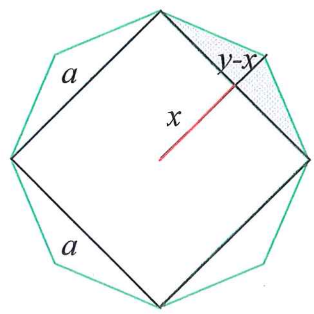
Mając pole podstawy możemy policzyć objętość graniastosłupa prawidłowego:

$$V_g = \frac{n \cdot a^2}{4\sin\frac{\pi}{n}} \cdot h.$$

Policzmy teraz objętość dobudowanych ostrosłupów. Wszystkie dobudowane ostrosłupy mają taką samą objętość, która wyraża się wzorem:

$$V_o = \frac{1}{3} P_{p_o} \cdot h.$$

Wyliczymy teraz pole P_{p_o} podstawy ostrosłupa, która jest trójkątem równoramiennym o podstawie a i wysokości $y - x$ *(rys.. 7)*.



rys.. 7

Wstawiając dane do wzoru na pole trójkąta:

$$P_{p_o} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (y - x)$$

$$y-x=\frac{a\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)}{2\sin\frac{\pi}{n}}-\frac{a\cdot\cos\frac{\pi}{n}}{2\sin\frac{\pi}{n}}=\frac{a\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)}{2\sin\frac{\pi}{n}}$$

otrzymujemy

$$P_{p_o}=\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{a\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)}{2\sin\frac{\pi}{n}}=\frac{a^2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)}{4\sin\frac{\pi}{n}}.$$

Mając pole podstawy możemy policzyć objętość ostrosłupa:

$$V_o=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)}{4\sin\frac{\pi}{n}}\cdot h=\frac{a^2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)}{12\sin\frac{\pi}{n}}.$$

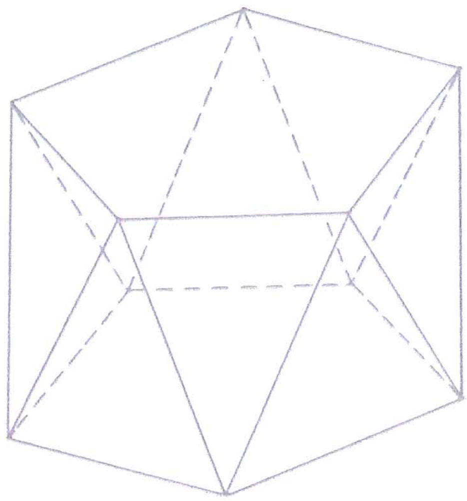
Znając już objętość graniastosłupa prawidłowego i ostrosłupa policzymy objętość graniastosłupa skręconego, wyrażoną wzorem $(*)$

$$V=\frac{n\cdot a^2}{4\cdot\sin\frac{\pi}{n}}\cdot h-2n\cdot\frac{a^2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)}{12\sin\frac{\pi}{n}}=\frac{3a^2n\cdot h-2a^2n\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)}{12\sin\frac{\pi}{n}}=\frac{a^2n\left[3h-2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)\right]}{12\sin\frac{\pi}{n}}$$

Otrzymaliśmy ogólny wzór na objętość graniastosłupa skręconego.

IV. Dla jakiej wysokości ściany boczne są trójkątami równobocznymi?

Graniastosłup skręcony, którego ściany boczne są trójkątami równobocznymi, nazywamy graniastosłupem skręconym **Archimedesowym**. Jest on jednym z przykładów brył archimedesowych *(rys.. 8)*.



rys.. 8

Bryła archimedesowa, to wielościan wypukły, którego kąty wielościenne są przystające, krawędzie są jednakowej długości, a ściany to wielokąty foremne.

Aby wyznaczyć wysokość graniastosłupa skręconego archimedesowego skorzystamy z tego, że jego ściany boczne są trójkątami równobocznymi, więc znana jest ich wysokość, która wynosi $h_a = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Przypomnijmy, że w II rozdziale wyliczyliśmy zależność $h_a^2 = h^2 + (y-x)^2$, którą możemy zastosować do wyliczenia wysokości graniastosłupa skręconego h. Wstawiając wartości za h_a i $(y-x)^2$ wyliczone w II rozdziale otrzymujemy:

$$h^2 = h_a^2 - (y-x)^2$$

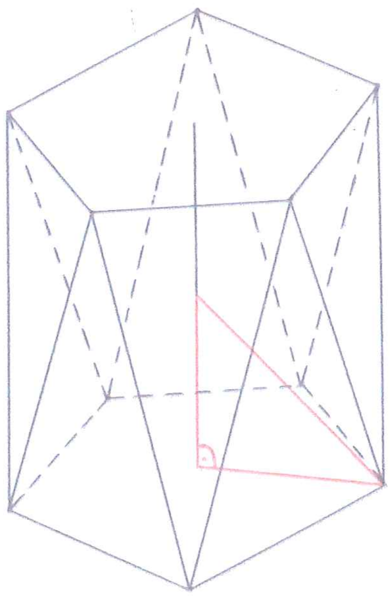
$$h^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2}{4\sin^2\frac{\pi}{n}} = \frac{3a^2\left(\sin^2\frac{\pi}{n}\right) - a^2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2}{4\sin^2\frac{\pi}{n}} = \frac{2a^2\left(1-2\cos^2\frac{\pi}{n}+\cos\frac{\pi}{n}\right)}{4\sin^2\frac{\pi}{n}}$$

stąd

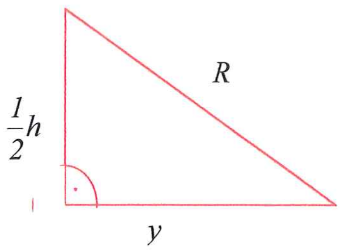
$$h = \sqrt{\frac{2a^2\left(1-2\cos^2\frac{\pi}{n}+\cos\frac{\pi}{n}\right)}{4\sin^2\frac{\pi}{n}}} = \frac{a}{2\sin\frac{\pi}{n}} \cdot \sqrt{2\left(1-2\cos^2\frac{\pi}{n}+\cos\frac{\pi}{n}\right)}.$$

V. Promień sfery opisanej.

Sfera opisana na graniastosłupie skręconym zawiera wszystkie jego wierzchołki. Promień sfery R jest równy odcinkowi łączącemu środek wysokości graniastosłupa z dowolnym wierzchołkiem *(rys.. 9a)*.



rys.. 9a



rys. 9b

Powstaje trójkąt prostokątny o przyprostokątnych równych połowie wysokości graniastosłupa i odcinkowi o długości y (zdefiniowanemu w rozdziale I). Przeciwprostokątna jest szukanym promieniem sfery opisanej *(rys. 9b)*.

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa mamy zależność:

$$R^2 = y^2 + \left(\frac{1}{2}h\right)^2$$

a podstawiając do niej wyliczony w rozdziale I związek $y = \dfrac{a}{2\sin\frac{\pi}{n}}$ otrzymamy:

$$R=\sqrt{\left(\frac{a}{2sin\frac{\pi}{n}}\right)^2+\left(\frac{h}{2}\right)^2}\,.$$

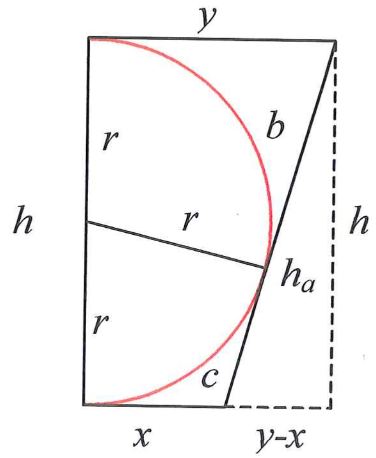
Po przekształceniach otrzymujemy następujący wzór na promień sfery opisanej na graniastosłupie skręconym:

$$R=\sqrt{\frac{a^2}{4sin^2\frac{\pi}{n}}+\frac{h^2}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{sin^2\frac{\pi}{n}}+h^2}\,.$$

VI. Kula wpisana w graniastosłup skręcony.

Nie w każdy graniastosłup skręcony (podobnie jak to ma miejsce dla zwykłych graniastosłupów) można wpisać kulę. W tym rozdziale wyliczymy, jak należy dobrać wysokość h graniastosłupa skręconego (do z góry zadanej długości krawędzi), aby w ten graniastosłup można było wpisać kulę.

Kula wpisana w graniastosłup skręcony jest styczna do jego ścian. Wysokość graniastosłupa skręconego jest równa średnicy kuli $2r$. Aby obliczyć jej długość rozważmy fragment przekroju graniastosłupa skręconego płaszczyzną prostopadłą do podstaw, przechodzącą przez wysokość graniastosłupa skręconego oraz przez wysokość jednej ze ścian bocznych *(rys. 10)*.



rys.. 10

Powstaje trójkąt prostokątny w którym jedna przyprostokątna jest równa h, druga odcinkowi $y - x$. Przeciwprostokątna w tym trójkącie, to wysokość ściany bocznej h_a. Chcąc wyznaczyć jej długość zauważmy, że punkt styczności promienia z wysokością ściany podzielił ją na odcinki c i b. Korzystając z własności stycznej do okręgu otrzymujemy $c = x$, $b = y$. Wysokość ściany bocznej jest zatem równa $h_a = x + y$. Stosując twierdzenie Pitagorasa wyznaczymy wzór na wysokość graniastosłupa skręconego, w który można wpisać kulę:

$$h^2 = h_a^2 - (y-x)^2$$

$$h^2 = x^2 + 2xy + y^2 - y^2 + 2xy - x^2$$

$$h = \sqrt{4xy}\,.$$

Wyliczmy teraz iloczyn $x \cdot y$:

$$x \cdot y = \frac{a\cos\frac{\pi}{n}}{2\sin\frac{\pi}{n}} \cdot \frac{a}{2\sin\frac{\pi}{n}} = \frac{a^2\cos\frac{\pi}{n}}{4\sin^2\frac{\pi}{n}}$$

stąd

$$h = \sqrt{4 \cdot \frac{a^2\cos\frac{\pi}{n}}{4\sin^2\frac{\pi}{n}}} = \frac{a\sqrt{\cos\frac{\pi}{n}}}{\sin\frac{\pi}{n}}.$$

Aby w graniastosłup skręcony o podstawie *n–kąta* o boku długości *a* można było wpisać kulę wysokość powinna wynosić:

$$h = a\frac{\sqrt{\cos\frac{\pi}{n}}}{\sin\frac{\pi}{n}}.$$

Teraz policzymy promień kuli wpisanej, który jest równy połowie wysokości i wynosi:

$$r = \frac{1}{2}h = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{\cos\frac{\pi}{n}}}{\sin\frac{\pi}{n}} = \frac{a\sqrt{\cos\frac{\pi}{n}}}{2\sin\frac{\pi}{n}}.$$

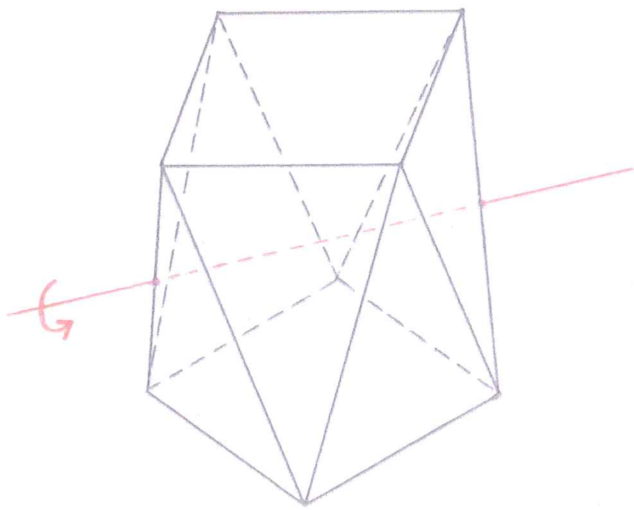
VII. Symetrie.

W tym rozdziale rozpatrzymy wszystkie symetrie graniastosłupów skręconych. Symetrie bryły są to takie przekształcenia przestrzeni, które zachowują odległości między punktami oraz przekształcają daną bryłę na samą siebie.

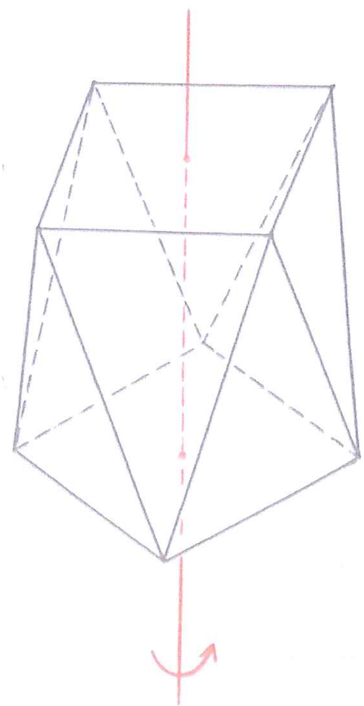
Omówimy teraz przykłady symetrii graniastosłupów skręconych *n-kątnych*.

1. Obroty.

Graniastosłup skręcony ma *2n* symetrii będących obrotami. Są to: *n* obrotów o 180° dookoła prostych łączących środki przeciwległych krawędzi bocznych *(rys. 11a)* i *n* obrotów dookoła prostej łączącej środki podstaw o kąty $k \cdot \frac{2\pi}{n}$, dla $k = 0, 1, \ldots, n-1$ *(rys. 11b)*. Dla $k = 0$ otrzymuje obrót o kąt zerowy, czyli przekształcenie tożsamościowe.



rys. 11a

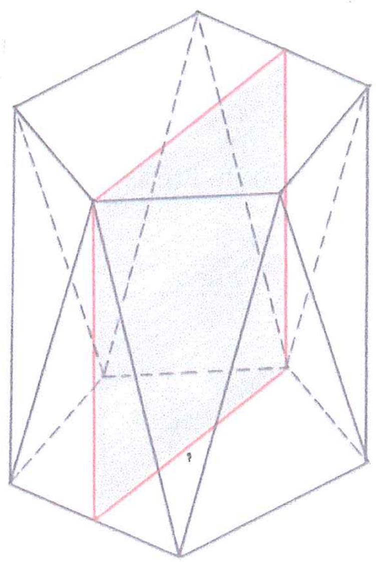


rys. 11 b

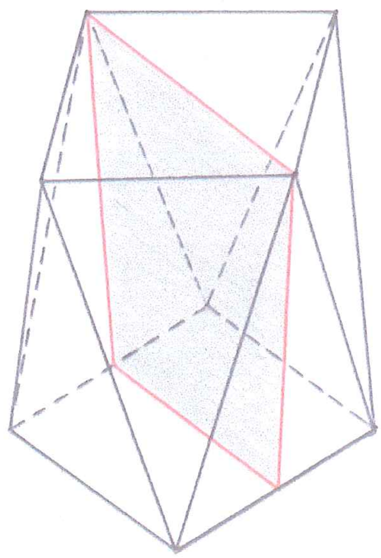
2. Odbicia względem płaszczyzny.

Aby znaleźć wszystkie symetrie graniastosłupa skręconego będące odbiciami względem płaszczyzn, przeanalizujemy dwa rodzaje graniastosłupów skręconych.

Pierwszy to graniastosłup skręcony, który ma w podstawie wielokąt o nieparzystej liczbie wierzchołków. Prowadzimy w nim płaszczyzny przez równoległe odcinki podstaw łączące wierzchołek ze środkiem przeciwległego boku podstawy *(rys. 12a)*. W ten sposób otrzymujemy n płaszczyzn symetrii.



rys. 12a



rys. 12b

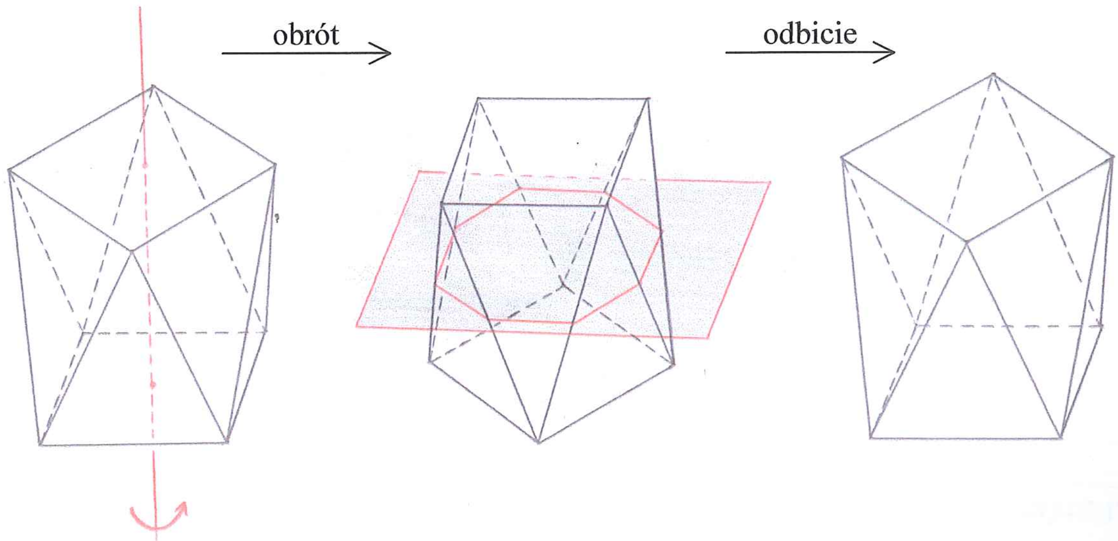
Drugi przypadek to graniastosłup skręcony, który ma w podstawie wielokąt o parzystej liczbie wierzchołków. Prowadzimy w nim płaszczyzny prostopadłe do podstaw, przechodzące przez przekątną jednej z podstaw i odcinek łączący środki jednej z par przeciwległych boków drugiej podstawy *(rys. 12b)*. Otrzymujemy n płaszczyzn symetrii.

W obu przypadkach ilość odbić względem płaszczyzn jest równa n. Dla każdego graniastosłupa skręconego potrafimy wskazać n płaszczyzn symetrii.

3. Odbicia obrotowe.

Symetria z obrotem jest to przekształcenie przestrzeni, które jest złożeniem symetrii względem pewnej płaszczyzny oraz obrotu wokół pewnej prostej prostopadłej do tej płaszczyzny.

Obracamy graniastosłup skręcony dookoła prostej łączącej środki podstaw *(rys. 13a)* o kąt $\frac{\pi}{n} + k\frac{2\pi}{n}$ dla $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Otrzymujemy graniastosłup skręcony w nowym położeniu *(rys. 13b)*. Następnie odbijamy graniastosłup skręcony względem płaszczyzny równoległej do podstaw i przechodzącej przez środek jego wysokości. Otrzymujemy w ten sposób bryłę pokrywającą się z bryłą wyjściową *(rys. 13c)*. Z tego wniosek, że graniastosłup skręcony został przekształcony sam na siebie i takich przekształceń jest n.



rys. 13a *rys. 13b* *rys. 13c*

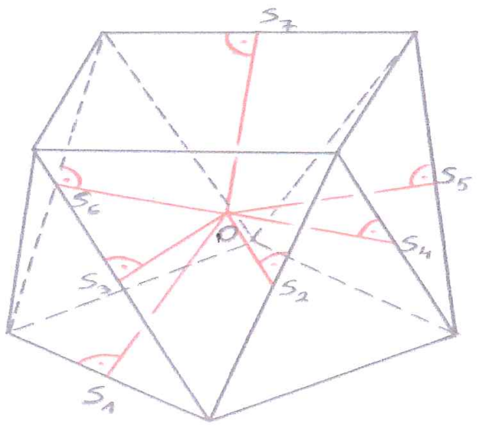
Rozpatrując przykłady symetrii otrzymaliśmy kolejno $2n$, n, i n przekształceń symetrycznych, czyli dla każdego graniastosłupa skręconego wskazaliśmy $4n$ przykładów jego symetrii. Jest to pełna lista graniastosłupów skręconych choć w tej pracy nie będziemy tego udowadniać.

VIII. Kula wpisana w krawędzie.

Kula wpisana w krawędzie, to kula która jest styczna do wszystkich krawędzi bryły. Graniastosłup skręcony posiada kulę wpisaną w krawędzie tylko wtedy, gdy jego wysokość jest odpowiednio dobrana. W tym rozdziale znajdziemy warunek na to, aby w krawędzie graniastosłupa skręconego można było wpisać kulę.

Jeśli wielościan posiada kulę wpisaną w krawędzie, to odległość tych krawędzi od środka kuli jest stała i równa promieniowi r_k tej kuli.

Jeśli kula jest wpisana w krawędzie, to punkty styczności krawędzi z tą kulą są rzutami prostokątnymi środka tej kuli na proste zawierające te krawędzie *(rys. 14)*.

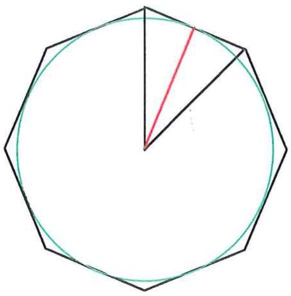


$|OS_1| = |OS_2| = \ldots = |OS_7| = r.$

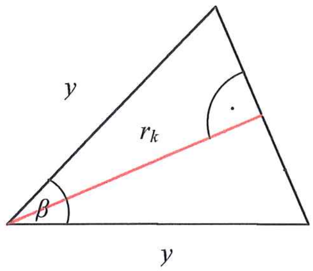
rys. 14

Środek wysokości graniastosłupa skręconego jest jedynym punktem stałym jego symetrii (opisanych w rozdziale VII). Ponieważ środek kuli wpisanej w krawędzie musi być punktem stałym wszystkich symetrii, to środek ten musi wypaść w środku wysokości graniastosłupa. Zauważmy, że w graniastosłupie skręconym rzuty prostokątne środka wysokości na poszczególne krawędzie wypadają w środkach tych krawędzi. Stąd punkty styczności z kulą wpisaną w krawędzie będą środkami tych krawędzi.

Teraz policzymy promień kuli wpisanej w krawędzie. W tym celu przyjrzyjmy się przekrojowi graniastosłupa skręconego i kuli wpisanej w jego krawędzie, płaszczyzną równoległą do podstaw i przechodzącą przez środek wysokości graniastosłupa *(rys. 15a)*.



rys. 15a



rys. 15b

Przekrój graniastosłupa jest *2n–kątem* foremnym i jest on opisany na okręgu, będącym przekrojem kuli. Odcinki *y* dzielą wielokąt foremny na trójkąty równoramienne. Promień kuli jest wysokością trójkąta równoramiennego *(rys. 15b)*. Korzystając z własności trójkątów, otrzymujemy:

$$\frac{1}{2}\beta = \frac{\pi}{2n}$$

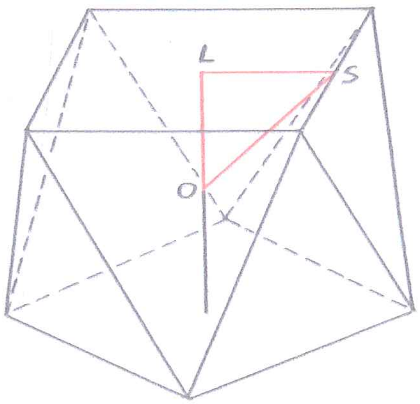
$$\cos\frac{\pi}{2n} = \frac{r_k}{y}$$

$$r_k = y \cdot \cos\frac{\pi}{2n}, \quad gdzie \ y = \frac{a}{2\sin\frac{\pi}{n}}.$$

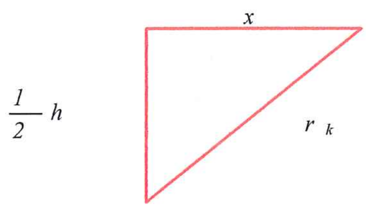
Po wstawieniu, promień kuli wpisanej w krawędzie graniastosłupa skręconego jest równy

$$r_k = \frac{a}{2\sin\frac{\pi}{n}} \cdot \cos\frac{\pi}{2n} = \frac{a \cdot \cos\frac{\pi}{2n}}{2\sin\frac{\pi}{n}}.$$

Teraz obliczymy wysokość *h* graniastosłupa skręconego, dla której będzie możliwe wpisanie kuli w jej krawędzie. W tym celu rozważmy trójkąt o następujących wierzchołkach: jednym z nich jest środek kuli *O*, który jest jednocześnie środkiem wysokości graniastosłupa skręconego, drugim punkt *S*, który jest środkiem krawędzi podstawy, zaś trzecim jest punkt *L*, będący środkiem podstawy. *(rys. 16a)* Jest to trójkąt prostokątny, w którym jedną z przyprostokątnych jest odcinek $\frac{1}{2}h$ (równy połowie wysokości graniastosłupa skręconego), drugą odcinek x (odcinek łączący środek podstawy ze środkiem krawędzi podstawy), a przeciwprostokątna jest promieniem kuli wpisanej *(rys. 16b)*



rys. 16 a



rys. 16 b

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy zależność:

$$\left(\frac{1}{2}h\right)^2 = r_k^2 - x^2$$

$$\text{gdzie } r_k^2 = \frac{a^2 \cdot cos^2 \frac{\pi}{2n}}{4\,sin^2 \frac{\pi}{2n}} \quad \text{i} \quad x^2 = \frac{a^2 \cdot cos^2 \frac{\pi}{n}}{4\,sin^2 \frac{\pi}{n}}.$$

Po podstawieniu otrzymujemy

$$\frac{1}{4}h^2 = \frac{a^2 \cdot cos^2 \frac{\pi}{2n}}{4\,sin^2 \frac{\pi}{2n}} - \frac{a^2 \cdot cos \frac{\pi}{n}}{4\,sin^2 \frac{\pi}{n}}$$

więc wysokość jest równa

$$h=\sqrt{\frac{a^2\left(\cos^2\frac{\pi}{2n}-\cos^2\frac{\pi}{n}\right)}{\sin^2\frac{\pi}{n}}}=\frac{a\sqrt{\cos^2\frac{\pi}{2n}-\cos^2\frac{\pi}{n}}}{\sin\frac{\pi}{n}}.$$

Zatem, aby wpisać kulę w krawędzie graniastosłupa skręconego wysokość graniastosłupa musi wynosić

$$h=\frac{a\sqrt{\cos^2\frac{\pi}{2n}-\cos^2\frac{\pi}{n}}}{\sin\frac{\pi}{n}}.$$

Wówczas promień kuli wpisanej w krawędzi tego graniastosłupa skręconego wynosi

$$r_k=\frac{a\cdot\cos\frac{\pi}{2n}}{2\sin\frac{\pi}{n}}.$$