Uniwersytet Wrocławski
Instytut Matematyki
2002 rok

Ilości wierzchołków, krawędzi i ścian w wielościanach wypukłych.

Pracę napisała Urszula Karbowska

pod kierunkiem dr hab. Jacka Świątkowskiego

Spis treści

Wstęp

Niniejsza praca poświęcona jest zbadaniu liczby wierzchołków, krawędzi i ścian w wielościanach wypukłych.

Składa się ona z czterech rozdziałów. W pierwszym rozdziale wprowadzone zostają ogólne ograniczenia na liczbę wierzchołków, krawędzi i ścian wielościanu wypukłego.

W drugim, trzecim i czwartym udowadniam kolejno, że każda trójka liczb (W, K, S), gdzie W to liczba wierzchołków, K - liczba krawędzi, a S – liczba ścian, spełniająca wprowadzone w części pierwszej ograniczenia daje się zrealizować za pomocą pewnego wielościanu wypukłego.

Rozdział 1 .

Ogólne ograniczenia na ilość ścian, krawędzi i wierzchołków w wielościanach wypukłych.

Wielościanem (powierzchnią wielościenną) nazywamy zbiór składający się ze skończonej liczby płaskich wieloboków, nazywanych ścianami wielościanu, zestawionych w przestrzeni w ten sposób, że spełnione są trzy następujące własności:

1. dowolny bok każdego z tych wieloboków jest również bokiem dokładnie jeszcze jednego wieloboku;
2. każde dwa wieloboki a, b tego zbioru można połączyć ze sobą za pomocą ciągu $a_1, a_2, \dots, a_k$ takich wieloboków należących do tego zbioru, że wielobok a ma wspólny bok z a_1, a_1 ma wspólny bok z a_2, ... , wielobok a_k ma wspólny bok z b;
3. jeżeli jakiekolwiek dwa wieloboki a, b mają wspólny wierzchołek A, to zawsze można wybrać taki ciąg wieloboków $a_1, a_2, \dots, a_k$ spełniających oba poprzednie warunki, aby każdy z nich miał wierzchołek A.

Powyższą definicję zaczerpnęłam z książki „Z geometrią za pan brat" autorstwa: Włodzimierza Krysickiego, Heleny Pisarewskiej i Tadeusza Świątkowskiego [Wydawnictwo Akapit Press Łódź 2000].

Wieloboki tworzące wielościan nazywamy jego *ścianami*, natomiast boki tych wieloboków nazywać będziemy *krawędziami wielościanu*, a wierzchołki wieloboków - *wierzchołkami wielościanu*. Zatem każdemu wielościanowi możemy przypisać trójkę liczb (W, K, S), gdzie W oznacza liczbę wierzchołków, K liczbę krawędzi, a S liczbę ścian.

W tej pracy pokażę, jakie trójki liczb (W, K, S) realizują się jako ilości wierzchołków, krawędzi i ścian w wielościanach wypukłych.

Dla wielościanów wypukłych zachodzi twierdzenie Eulera, które brzmi następująco:
W każdym wypukłym wielościanie suma liczby wierzchołków W i liczby ścian S jest o dwa większa od liczby jego krawędzi K, tzn.

$$W - K + S = 2 \qquad (1)$$

Zatem jeśli będziemy znać dwie spośród trójki liczb W, K, S, opisujących wielościan, trzecią wyznaczymy ze wzoru Eulera. Jeżeli znamy liczbę wierzchołków (W) i liczbę ścian (S), to liczbę krawędzi możemy wyznaczyć ze wzoru Eulera. Będzie ona wynosiła:

$$K = W + S - 2 \qquad (2)$$

Zamiast więc badać trójki liczb (W, K, S), będę badać pary liczb (S, W) wiedząc, że dla każdej takiej pary (S, W) liczbę krawędzi mogę wyznaczyć wykorzystując wzór Eulera (według wzoru 2).

Będziemy mówić, że jeśli jakaś badana para (S, W) będzie *realizowała się za pomocą wielościanu wypukłego*, to znaczy, że będzie istniał, co najmniej jeden wielościan o S ścianach i W wierzchołkach.

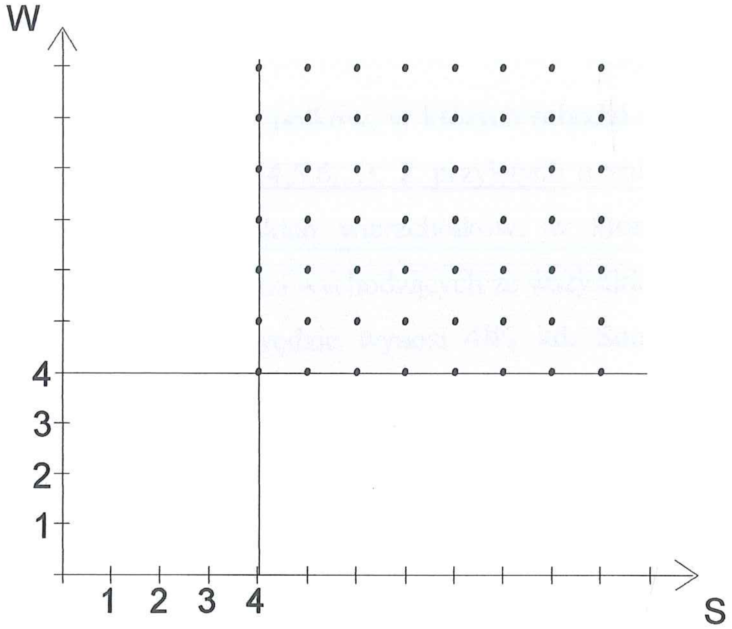
W dalszych rozważaniach pary (S, W), gdzie $S, W \in N$ będę interpretować jako punkty układu współrzędnych (leżące w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych).

Wiemy, że aby zbudować wielościan musi on mieć, co najmniej cztery ściany i co najmniej cztery wierzchołki. Czyli:

$$W \geq 4 \qquad (3)$$

$$S \geq 4 \qquad (4)$$

Zatem pary liczb (S, W) na pewno znajdują się w obszarze wyznaczonym przez powyższe nierówności, ale będą to tylko punkty opisane naturalnymi współrzędnymi ($S, W \in N$). Można to zobrazować w układzie współrzędnych (rysunek 1.1):



Rysunek 1.1

Widać, że jeśli para liczb będzie realizowała się jako ilość wierzchołków i ścian wielościanu wypukłego, to punkt o takich współrzędnych na pewno będzie leżał w zacieniowanym obszarze.

W dalszej części tego rozdziału wyprowadzę nierówności dokładniej określające obszar, z którego punkty (o naturalnych współrzędnych) będą realizowane jako ilości wierzchołków i ścian wielościanów wypukłych.

Oznaczmy przez S_n liczbę ścian n-kątnych (gdzie n=3,4,5,6,...). Z przyjętych oznaczeń wynika, że liczba krawędzi wszystkich trójkątnych ścian wynosi $3S_3$, liczba krawędzi wszystkich ścian czworokątnych $4S_4$ itd. Sumując liczbę krawędzi wszystkich rodzajów ścian otrzymamy podwójną liczbę krawędzi wielościanu:

$$3S_3+ 4S_4 +5S_5+...=2K \qquad (5).$$

Liczba ścian trójkątnych, czworokątnych, pięciokątnych,..., n-kątnych daje razem liczbę wszystkich ścian wielościanu:

$$S=S_3+S_4 +S_5+... \qquad (6).$$

Następnie, wykorzystując zależność (6), przekształcamy i grupujemy równość (5):

$$2K=3S_3+4S_4+5S_5+...=(3S_3+3S_4+3S_5+..)+S_4+2S_5+... \geq 3S_3+3S_4+3S_5+...=$$

$$3(S_3+S_4+S_5+...)=3S$$

Czyli $2K \geq 3S$ (7).

Oznaczmy przez W_n liczbę wierzchołków, w których schodzi się n ścian (tzn. jest to liczba n-ściennych kątów gdzie n=3,4,5,6,...). Z przyjętych oznaczeń wynika, że liczba krawędzi wychodzących ze wszystkich wierzchołków, w których schodzą się trzy krawędzie wynosi $3W_3$, liczba krawędzi wychodzących ze wszystkich wierzchołków, w których schodzą się cztery krawędzie wynosi $4W_4$ itd. Sumując liczbę krawędzi, schodzących się we wszystkich rodzajach wierzchołków, otrzymamy podwójną liczbę krawędzi wielościanu:

$$3W_3 + 4W_4 + 5W_5 + ... = 2K \quad (8).$$

Liczba wierzchołków, w których schodzą się dwie, trzy, cztery, ... ,n ścian, daje razem liczbę wszystkich wierzchołków wielościanu:

$$W = W_3 + W_4 + W_5 + ... \quad (9).$$

Następnie, wykorzystując zależność (9), przekształcamy i grupujemy równość (8):

$$2K = 3W_3 + 4W_4 + 5W_5 + ... = (3W_3 + 3W_4 + 3W_5 + ..) + W_4 + 2W_5 + ... \geq 3W_3 + 3W_4 + 3W_5 + ... =$$

$$3(W_3 + W_4 + W_5 + ...) = 3W$$

Czyli $2K \geq 3W$ (10).

W powyższej nierówności (10) wielkość K zastępujemy, korzystając z równości (2), wynikającej ze wzoru Eulera, przez $W+S$-2, mamy, więc:

$$3W \leq 2(W+S-2).$$

Przekształcając dalej:

$$3W \leq 2W + 2S - 4,$$

otrzymujemy:

$$W \leq 2S - 4 \quad (11).$$

Następnie w nierówności $3S \leq 2K$ wielkość K zastępujemy, korzystając z równości (2), wynikającej ze wzoru Eulera, przez $W+K$-2, mamy, więc:

$$3S \leq 2(W+S-2).$$

Przekształcając dalej:

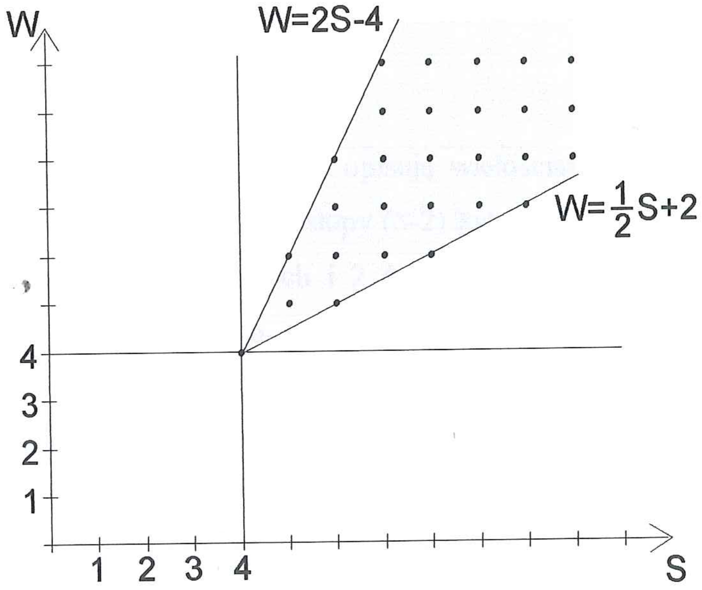
$$3S \leq 2W+2S-4$$

$$2W \geq S+4,$$

otrzymujemy:

$$W \geq \frac{1}{2}S+2 \qquad (12).$$

Zatem pary liczb (S, W) realizujące wielościany wypukłe znajdować się będą w obszarze wyznaczonym przez powyższe nierówności (11) i (12). Będą to punkty o naturalnych współrzędnych leżące w sektorze ograniczonym półprostymi $W=\frac{1}{2}$S+2, dla $S \geq 4$ i W=2S-4, dla $S \geq 4$ oraz na tych półprostych, co pokazuje wykres (rysunek 1.2).



Rysunek 1.2

W dalszej części mojej pracy udowodnię, że każda para liczb (W, S), gdzie $W \in N$ i $S \in N$ leżąca w obszarze wyznaczonym przez nierówności (11) i (12), daje się zrealizować jako ilość wierzchołków i ścian wielościanu wypukłego.

Rozdział 2 .

Trzy półproste i dwa obszary, na które dzielą one obszar wyznaczony przez nierówności (11) i (12).

W tym rozdziale rozważę badane punkty (S, W), gdzie S, $W \in N$, leżące na półprostych opisanych równaniami:

- **W=2S-4, dla $S \geq 4$ (13),**
- **W=S, dla $S \geq 4$ (14),**
- **$W=\frac{1}{2}S+2$, dla $S \geq 4$ (15)**

oraz opiszę jako ilości wierzchołków i ścian jakich wielościanów wypukłych są one realizowane.

Punkty z półprostej W=2S-4, dla $S \geq 4$ opisują wielościany o S ścianach i (2S-4) wierzchołkach. Są to na przykład graniastosłupy (S-2)-kątne, ponieważ taki graniastosłup ma S ścian, w tym (S-2) ścian bocznych i 2 ściany będące podstawami oraz (2S-4) wierzchołków, ponieważ w każdym graniastosłupie o n-kątnej podstawie ilość wierzchołków wynosi 2n, czyli 2(S-2)=2S-4. Na przykład para (6, 8) opisuje graniastosłup o podstawie czworokątnej.

Wszystkie punkty (S, W) leżące na półprostej W=S, dla $S \geq 4$ opisują ostrosłupy o (S-1) kątnej podstawie. Taki ostrosłup ma (S-1) ścian bocznych i jedną ścianę będącą postawą, czyli S wszystkich ścian oraz ((S-1)+1) wierzchołków, czyli W. Na przykład para (8, 8) opisuje ostrosłup o podstawie będącej siedmiokątem.

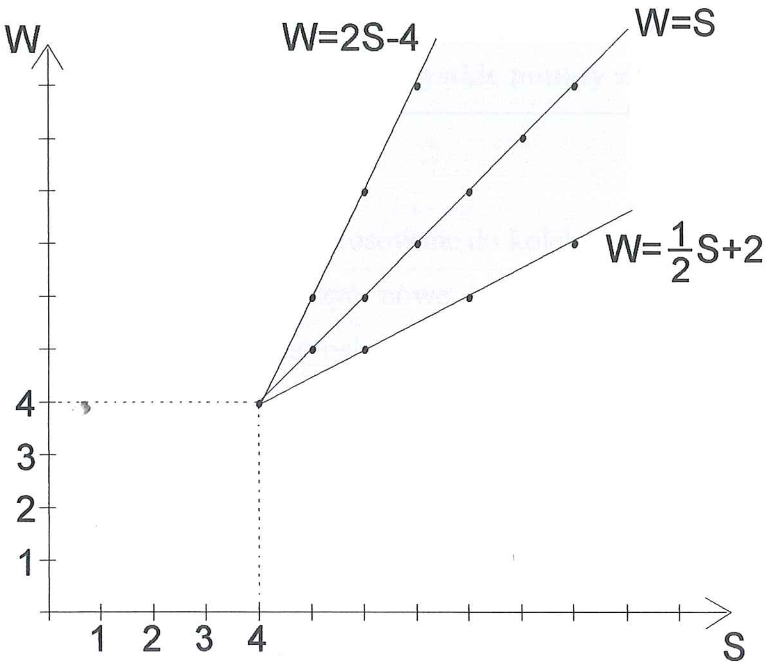
Badamy jedynie punkty o naturalnych współrzędnych, a wszystkie takie punkty leżące na półprostej $W=\frac{1}{2}S+2$, gdzie $S \geq 4$ maja parzystą współrzędną S. Zatem, każdy punkt (S, W) leżący na półprostej $W=\frac{1}{2}S+2$, gdzie $S \geq 4$ opisuje wielościan powstały przez złączenie podstawami dwóch ostrosłupów o $\frac{S}{2}$-kątnych podstawach. Taki wielościan ma $2\cdot\frac{S}{2}$, czyli S ścian i $(\frac{S}{2}+2)$ wierzchołków.

Wiemy już, więc jak punkty (S, W), leżące na półprostych:

- $W=2S-4$, dla $S\geq 4$,
- $W=S$, dla $S\geq 4$,
- $W=\frac{1}{2}S+2$, dla $S\geq 4$

są realizowane jako ilości wierzchołków i ścian w wielościanach wypukłych.

Punkty (S, W), które potrafimy już zrealizować, przedstawia poniższy wykres.



Rysunek 2.1

Rozdział 3 .

Sektor ograniczony półprostymi (13) i (14) (sektor A).

W tym rozdziale:

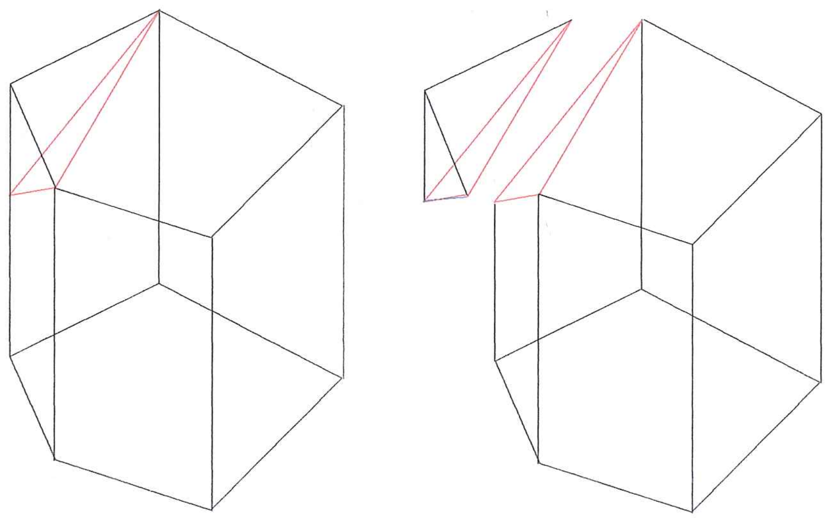
- **w pierwszym kroku opiszę przekształcenie, które zastosuję do wielościanów realizujących jako ilości wierzchołków i ścian punkty leżące na półprostej (13) (otrzymam dzięki niemu nowe wielościany),**
- **w drugim kroku także opiszę przekształcenie, które zastosuję do wielościanów otrzymanych w pierwszym kroku,**
- **w trzecim kroku zdefiniuję pewną grupę wielościanów.**

Dzięki tym trzem krokom skonstruuję lub opiszę wielościany wypukłe, które realizują jako ilości wierzchołków i ścian wszystkie punkty z sektora A.

Krok 1

Tworzę przekształcenie, które zastosowane do kolejnych graniastosłupów o podstawie n-kątnej pozwoli utworzyć nowe wielościany. Polegać ono będzie na odcinaniu od danego graniastosłupa ostrosłupów o podstawie trójkątnej.

Opisywane przekształcenie pokazuje poniższy rysunek dla graniastosłupa o podstawie pięciokąta.

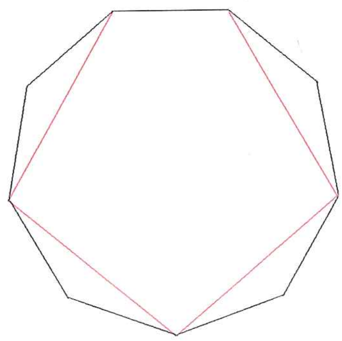


Rysunek 3.1

Wierzchołkiem takiego obcinanego ostrosłupa jest wierzchołek wielościanu (nie zawierający się w przekątnej, według której ścinamy), jedną z krawędzi podstawy jest przekątna, według której ścinamy, a dwie pozostałe krawędzie to odcinki łączące końceprzekątnej z punktem leżącym na krawędzi bocznej graniastosłupa zawierającej wierzchołek obcinanego ostrosłupa.

Każdorazowe zastosowanie przekształcenia spowoduje, że w wielościanie zwiększy się o jeden liczba ścian, a liczba wierzchołków pozostanie nie zmieniona. Ścinając ostrosłup tracimy jeden z wierzchołków, ale po ścięciu powstaje nowy leżący na krawędzi bocznej graniastosłupa. Zatem ilość wierzchołków nie zmienia się. Przyjrzyjmy się, co dzieje się z liczbą ścian nowo powstałego wielościanu. Nie tracimy żadnej ze ścian naszego wielościanu, zyskujemy za to jedną nową trójkątną ścianę. Jak z tego widać, z graniastosłupa realizującego jako ilość wierzchołków i ścian parę liczb (S, W), powstaje wielościan, który realizuje jako ilość wierzchołków i ścian parę liczb (S+1, W). Stosując przekształcenie kolejny raz otrzymujemy wielościany realizujące jako ilości wierzchołków i ścian punkty (S+2, W), (S+3, W),...w zależności od tego, ile razy wykonujemy przekształcenie.

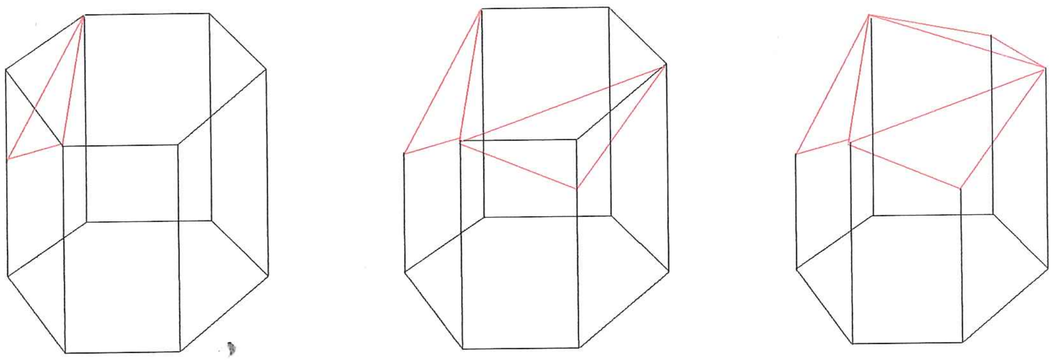
Opiszę, w jaki sposób wybieram przekątne według których odcinam ostrosłup. Numerujemy wierzchołki wielokąta od 1 do n i łączymy wierzchołki ($2i$-1) i ($2i$+1) dla i=1,2,3,..., $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ (gdzie symbol $\lfloor a \rfloor$ oznacza część całkowitą z liczby a zaokrągloną w dół tzn. $\lfloor a \rfloor \leq a$). Każdy wielokąt o n bokach ma $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ takich przekątnych. Na poniższym rysunku zaznaczone są te wybrane przekątne dla dziewięciokąta.



Rysunek 3.2

Zatem, ponieważ graniastosłup ma dwie n-kątne podstawy, nasze przekształcenie możemy wykonać na graniastosłupie $(2 \cdot \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor)$ razy. Czyli dla $n=2k$ (gdzie $k \in N$) możemy wykonać je n razy ($\frac{n}{2}$-razy według przekątnych górnej podstawy i $\frac{n}{2}$-razy według przekątnych dolnej podstawy), a dla $n=2k+1$ (gdzie $k \in N$) możemy je wykonać $(n\text{-}1)$ razy (czyli $\frac{n-1}{2}$-razy według przekątnych górnej podstawy i $\frac{n-1}{2}$-razy według przekątnej dolnej podstawy).

Zaobserwujmy działanie naszego przekształcenia na graniastosłupie, opisanym punktem (8, 12), czyli na graniastosłupie o podstawie sześciokątnej.



Rysunek 3.3

Jak pokazuje powyższy rysunek wykonując jednorazowo przekształcenie na graniastosłupie o podstawie sześciokątnej otrzymujemy wielościan, który ma nadal 12 wierzchołków, ale 9 ścian. Wykonując przekształcenie po raz drugi otrzymamy wielościan także o 12 wierzchołkach, ale już teraz o 10 ścianach. Wykonując przekształcenie po raz trzeci zauważymy, że otrzymaliśmy wielościan też o 12 wierzchołkach, ale o 11 ścianach.

Zatem otrzymaliśmy wszystkie wielościany o 12 wierzchołkach opisane punktami leżącymi pomiędzy półprostymi: $W=2S\text{-}4$ i $W=S$.

Jak już wcześniej napisałam, cięć możemy dokonywać według przekątnych dolnej i górnej podstawy graniastosłupa. Jeśli obetniemy ostrosłupy według wszystkich wcześniej opisanych przekątnych górnej podstawy graniastosłupa (o podstawie n-kątnej) i nie otrzymamy jeszcze wielościanów realizujących jako ilości wierzchołków i ścian wszystkie punkty (S, W), gdzie $S, W \in N$ i $W=2n$ (z sektora ograniczonego półprostymi (13) i (14)) to resztę punktów otrzymamy obcinając ostrosłupy według przekątnych dolnej podstawy graniastosłupa.

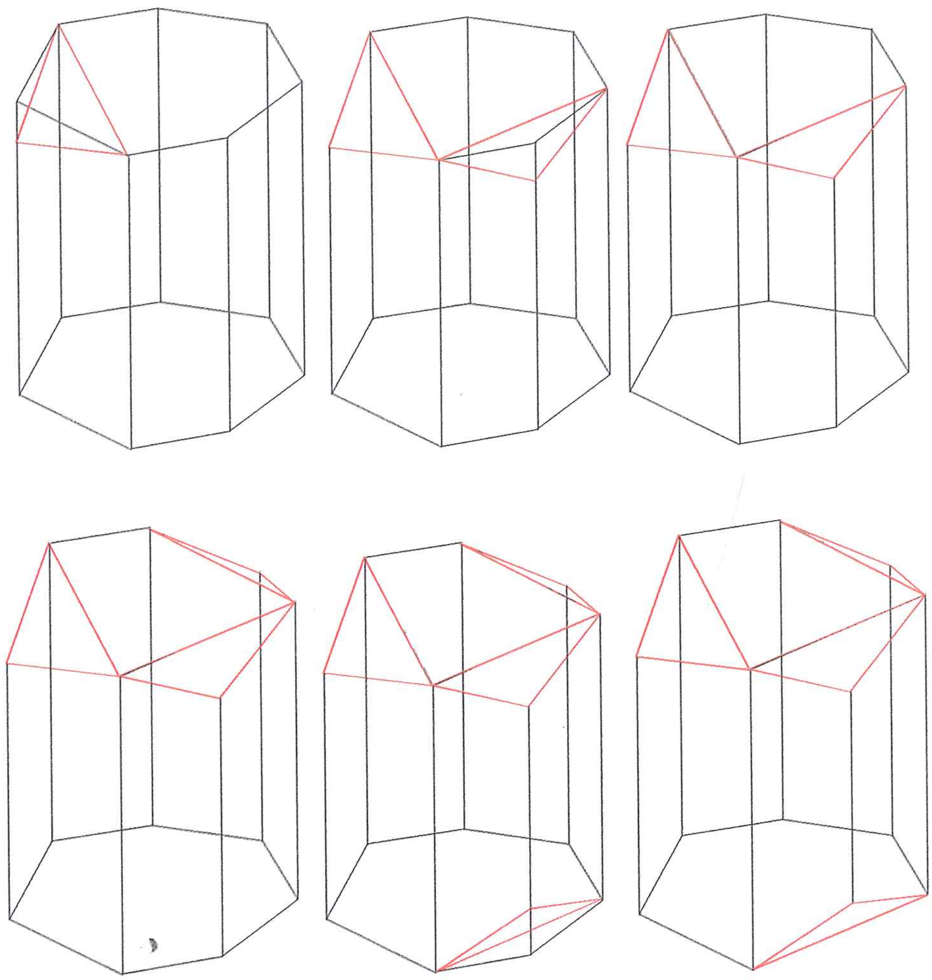
Poniżej opiszę i pokażę na rysunku, jak dokonujemy odcięcia ostrosłupów według przekątnych dolnej podstawy graniastosłupa (gdy mamy już odcięte ostrosłupy według przekątnych górnej podstawy).

Wierzchołkiem takiego ostrosłupa jest wierzchołek dolnej podstawy (nie zawierający się w przekątnych, według których ścinamy), jedną z krawędzi tego ostrosłupa jest przekątna, według której ścinamy. Dwie pozostałe krawędzie podstawy ostrosłupa to odcinki łączące końce przekątnej z punktem, leżącym na krawędzi bocznej graniastosłupa (zawierającej wierzchołek ścinanego ostrosłupa), ale nie będącym końcami tej krawędzi.

Zaobserwujmy, jak działa opisane przekształcenie na graniastosłupie, w którym trzeba będzie, oprócz ścinania górnej podstawy, ścinać dolną podstawę.

Weźmy graniastosłup o podstawie siedmiokąta, czyli wielokąt wypukły, który realizuje jako ilość wierzchołków i ścian punkt (9, 14). Opisywane przekształcenie mogę zastosować na tym graniastosłupie 6 razy (3 razy na górnej podstawie i 3 razy na dolnej podstawie). Po trzykrotnym odcięciu ostrosłupów, według przekątnych górnej podstawy, otrzymamy wielościany realizujące jako ilości wierzchołków i ścian wielościanu wypukłego punkty (10, 14), (11, 14), (12, 14). Wielościan realizujący punkt (13, 14) otrzymamy wykonując przekształcenie czwarty raz, to znaczy odcinając ostrosłup według przekątnej dolnej podstawy.

Cztery wykonane przekształcenia obrazuje kolejny rysunek (rysunek 3.4):



Rysunek 3.4

Aby uzyskać wszystkie żądane wielościany, opisywane przekształcenie musimy zastosować do wszystkich graniastosłupów leżących na prostej $W=2S-4$. Poniżej pokażę, ile dokładnie razy musimy je zastosować.

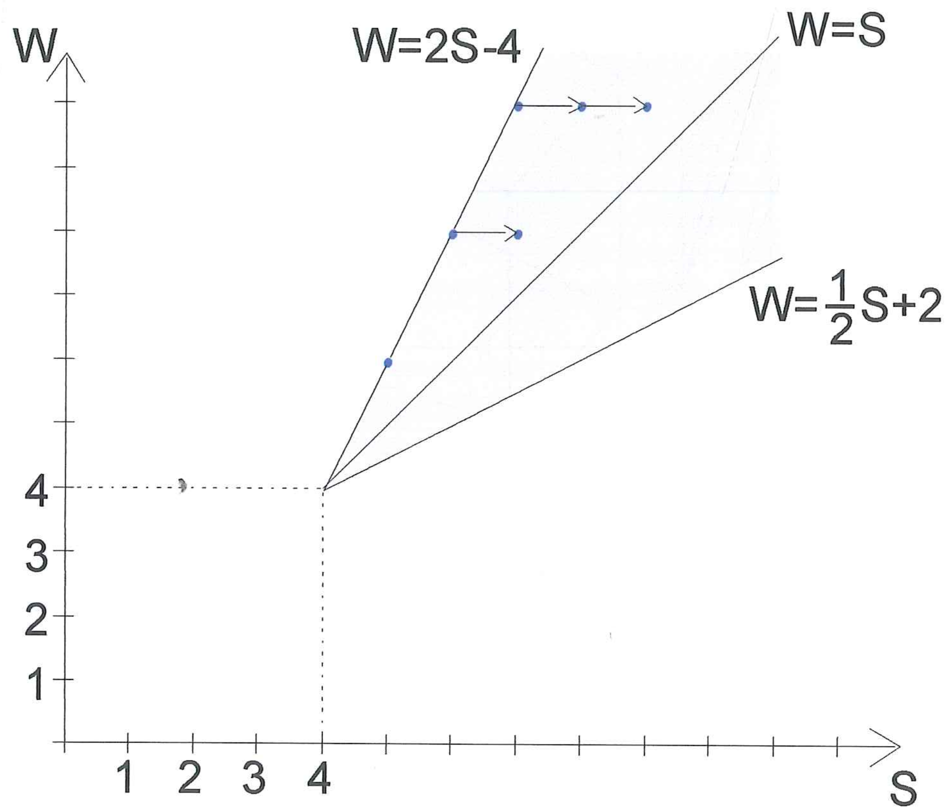
Odległość między dwoma punktami o tej samej współrzędnej W, leżącymi na półprostych: $W=2S-4$ i $W=S$, dla $S\geq 4$ wynosi: $W-(\frac{1}{2}W+2)=W-\frac{1}{2}W-2=\frac{1}{2}W-2$.

A ponieważ ilość wierzchołków graniastosłupów realizujących punkty z półprostej $W=2S-4$ wynosi $2n$ (gdzie n to ilość wierzchołków jednej podstawy graniastosłupa), opisana odległość wynosi $\frac{1}{2}\cdot 2n-2=n-2$. Na odcinku o takiej długości punktów o naturalnych współrzędnych (nie będących końcami tego odcinka) będzie o jeden mniej, czyli $n-3$.

Przekształcenie musimy, więc zastosować n-3 razy, ale zawsze możemy to zrobić, ponieważ jest ono wykonalne dla $n=2k$ (gdzie $k \in N$) n razy, a dla $n=2k+1$ (gdzie $k \in N$) n-1 razy.

Jak pokazałam, w sektorze ograniczonym półprostymi (13) i (14), każdy punkt (W, S), gdzie S, $W \in N$ i W jest parzyste, realizuje się jako ilość wierzchołków i krawędzi wielościanu wypukłego.

Punkty z sektora A, które potrafimy zrealizować dzięki opisanemu przekształceniu, przedstawia wykres (rysunek 3.5).

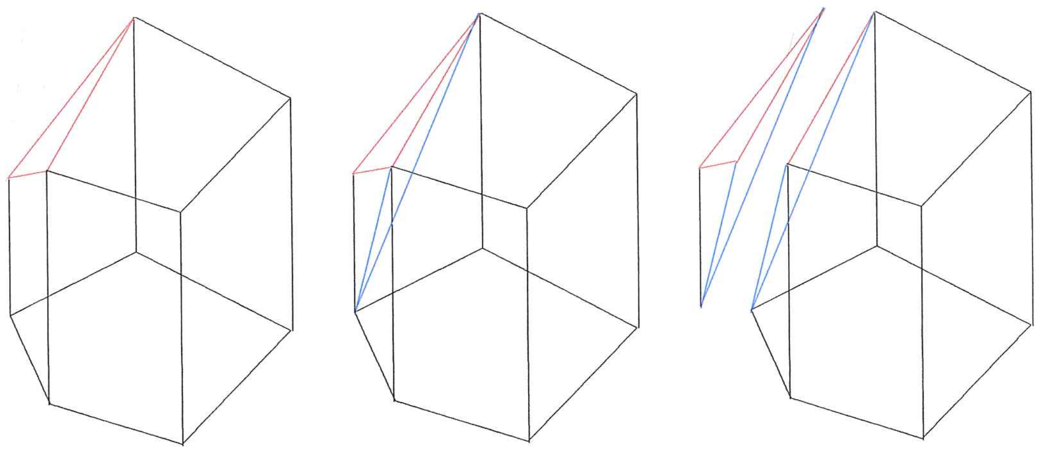


Rysunek 3.5

Krok 2

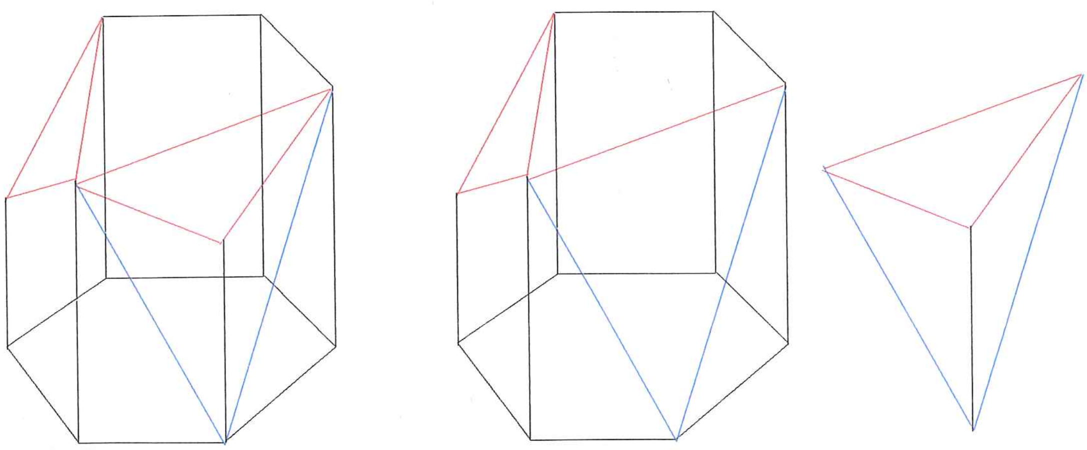
Tworzę przekształcenie, które zastosuję do otrzymania nowych wielościanów realizujących nie opisywane wcześniej pary (S, W). Polegać ono będzie także na odcinaniu ostrosłupa o podstawie trójkąta. Przekształcenie to musi spowodować, że nie zmieni się liczba ścian, a liczba wierzchołków zmniejszy się o jeden. Stosujemy je do wielościanów powstałych po wykonaniu poprzedniego przekształcenia. Graniastosłupy ścięte wcześniej płaszczyzną przechodzącą przez przekątną i punkt leżący na krawędzi bocznej graniastosłupa (ale nie będący końcem tej krawędzi), ścinamy ponownie. Płaszczyzna cięcia przechodzi także przez przekątną i przez wierzchołek dolnej podstawy (ten wierzchołek jest jednocześnie końcem krawędzi, na której poprzednio wybieraliśmy punkt).

Zaobserwujmy, jak działa to przekształcenie na wielościanie opisanym parą liczb (12, 9), czyli na wielościanie powstałym przez jednokrotne wykonanie poprzedniego przekształcenia na graniastosłupie o podstawie sześciokątnej. Jak pokazuje rysunek 3.6, wykonanie tego przekształcenia spowoduje powstanie wielościanu opisanego parą liczb (11, 9).



Rysunek 3.6

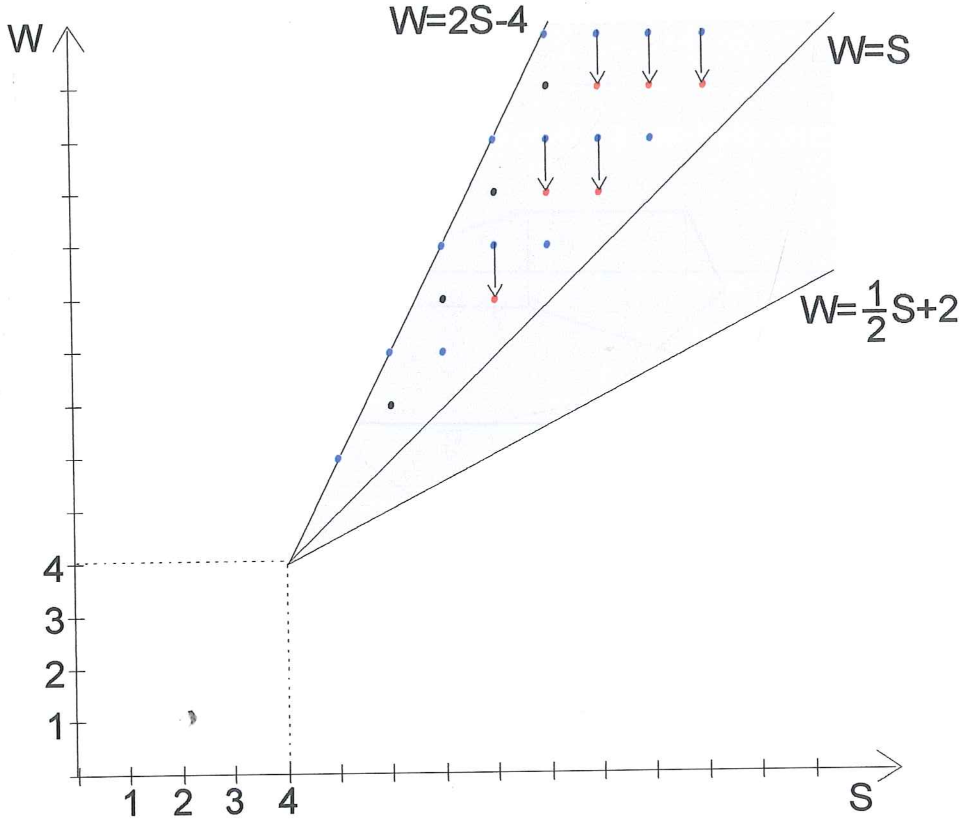
Następnie wykonujemy to przekształcenie na poprzednio utworzonym wielościanie opisanym parą liczb (12, 10). Otrzymujemy, jak pokazuje poniższy rysunek (3.7), wielościan o 11 wierzchołkach i 10 ścianach.



Rysunek 3.7

Stosując to przekształcenie do wszystkich otrzymanych poprzednio wielościanów o parzystej liczbie wierzchołków, otrzymamy już prawie wszystkie pary (o nieparzystej liczbie wierzchołków) z obszaru wyznaczonego przez proste: $W=2S-4$ i $W=S$.

Punkty ilustrujące te otrzymane pary (oznaczone kolorem czerwonym) przedstawia następujący wykres (rysunek 3.8).

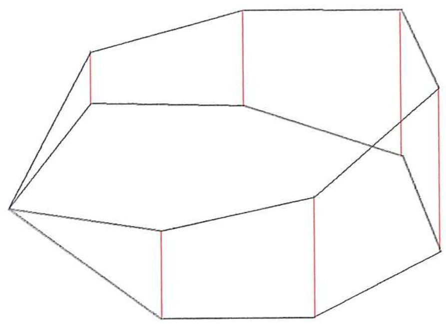


Rysunek 3.8

Krok 3

Pozostaje pokazać, jak realizowane są za pomocą wielościanów wypukłych punkty (S, W), gdzie $S,W \in N$, leżące na prostej $W=2S-5$, dla $S, W \geq 4$. Wielościany realizujące te punkty będą miały o jeden wierzchołek mniej w stosunku do graniastosłupów realizujących punkty na półprostej $W=2S-4$, gdzie $S \geq 4$ (są to punkty zaznaczone na powyższym rysunku na czarno).

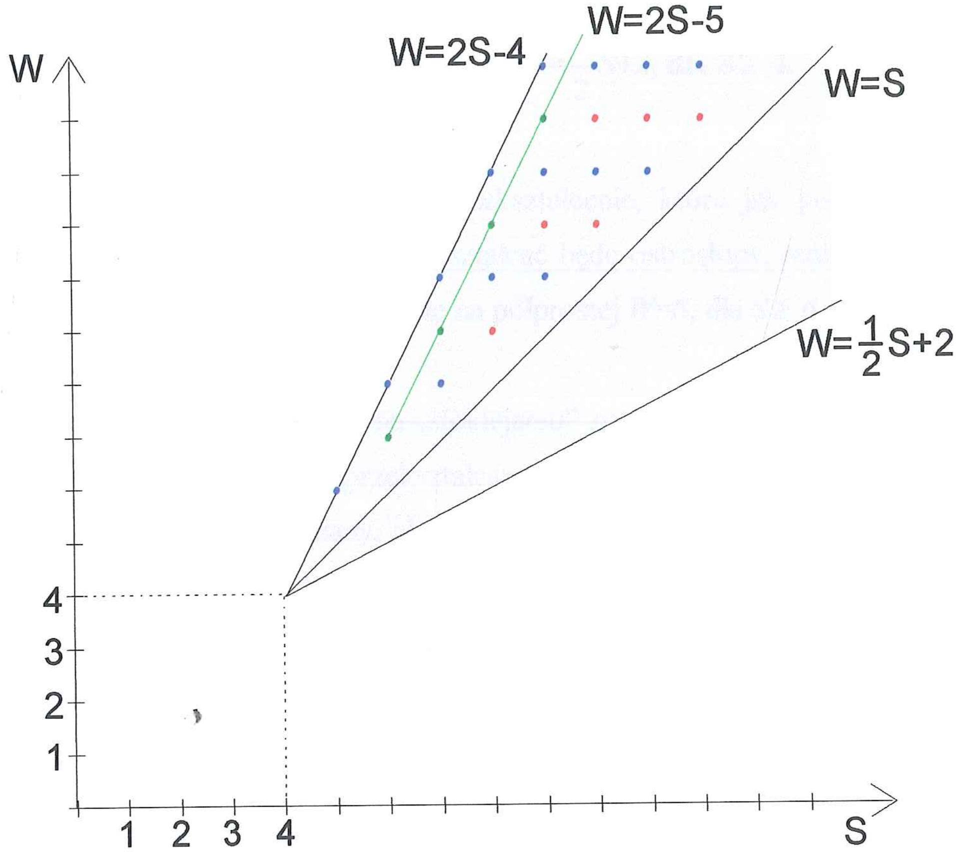
Bierzemy dwa przystające n-kąty. Numerujemy ich wierzchołki od 1 do n. Następnie łączymy te wielokąty wierzchołkiem o numerze 1 pod dowolnym katem z przedziału $(0, \frac{\pi}{2})$. Następnie łączymy odcinkiem każdy k-ty wierzchołek jednego n-kąta z k-tym wierzchołkiem drugiego n-kąta. Na następnym rysunku (rysunek 3.9) widać, jak utworzyć taki wielościan dla siedmiokąta, czyli jak realizowany jest za pomocą wielościanu punkt (13, 9).



Rysunek 3.9

Na wykresie (rysunek 3.10) punkty, które potrafimy dzięki konstrukcji opisanej w kroku 3 zrealizować za pomocą wielościanów, oznaczone są kolorem zielonym. Mają o jeden mniejszą współrzędną W od punktów leżących na półprostej W=2S-4, dla $S \geq 4$. Zatem półprostą, na której się zbierają opisujemy wzorem W=2S-5, gdzie $S \geq 4$.

Wiemy już, więc jak realizowane są jako ilości wierzchołków i ścian wszystkie punkty (S, W) z sektora A. Punkty otrzymane dzięki przekształceniom lub konstrukcjom zaznaczone są odpowiednio na rysunku 3.10 (krok 1 – punkty zaznaczone na niebiesko, krok 2 – punkty zaznaczone na czerwono, krok 3 – punkty zaznaczone na zielono).



Rysunek 3.10

Rozdział 4 .

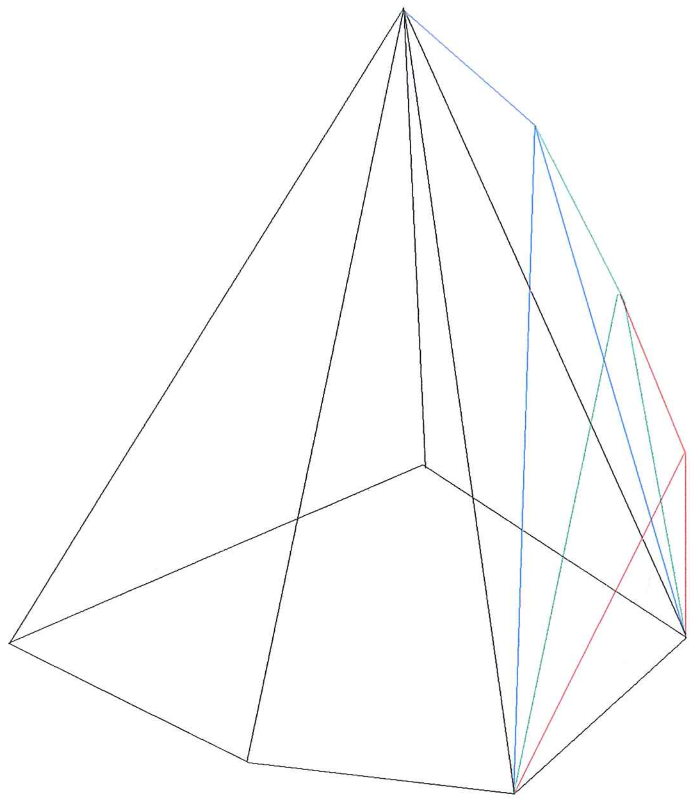
Sektor ograniczony półprostymi (14) i (15) (sektor B).

W tym rozdziale zajmę się tym, jak realizowane są punkty z obszaru ograniczonego półprostymi: W=S, dla $S \geq 4$ i $W=\frac{1}{2}S+2$, dla $S \geq 4$.

W tym przypadku także wyznaczę przekształcenie, które jak poprzednio pozwoli skonstruować szukane wielościany. Przekształcać będę ostrosłupy, realizujące jako ilości wierzchołków i ścian punkty zbierające się na półprostej W=S, dla $S \geq 4$.

Przekształcenie polegać będzie na „doklejaniu" ostrosłupów o podstawie trójkątnej do trójkątnej ściany bocznej przekształcanego ostrosłupa o podstawie n-katnej. Spowoduje ono utratę jednej ściany, ale w jej miejsce zyskamy trzy nowe ściany (ściany boczne doklejanego ostrosłupa). Zatem zastosowanie tego przekształcenia zwiększy liczbę ścian o dwie, a liczbę wierzchołków o jeden.

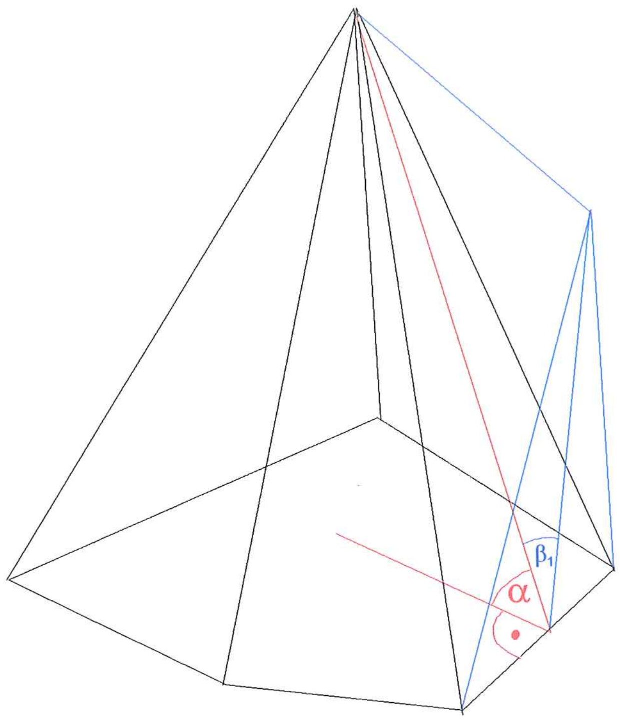
Następnym krokiem będzie ponowne „doklejenie" ostrosłupa o podstawie trójkątnej. Doklejamy ten ostrosłup do trójkątnej ściany bocznej poprzednio dostawianego ostrosłupa (do ściany, której jedną z krawędzi jest krawędź podstawy wyjściowego ostrosłupa). Zaobserwujmy, jak wygląda kolejno przekształcany wielościan na rysunku 4.1 (dotyczy on przekształcania wielościanu opisanego parą liczb (6,6)).



Rysunek 4.1

Musimy jednak cały czas pamiętać, aby nowo powstały wielościan zachowywał wypukłość. Jeśli jeden raz „dokleimy" ostrosłup, wtedy kąt nachylenia mających wspólną krawędź ścian bocznych doklejanego ostrosłupa do ścian wyjściowego ostrosłupa musi być mniejszy od 180°, czyli używając oznaczeń z rysunku 4.2 otrzymujemy:

$$\alpha + \beta_1 < 180°.$$

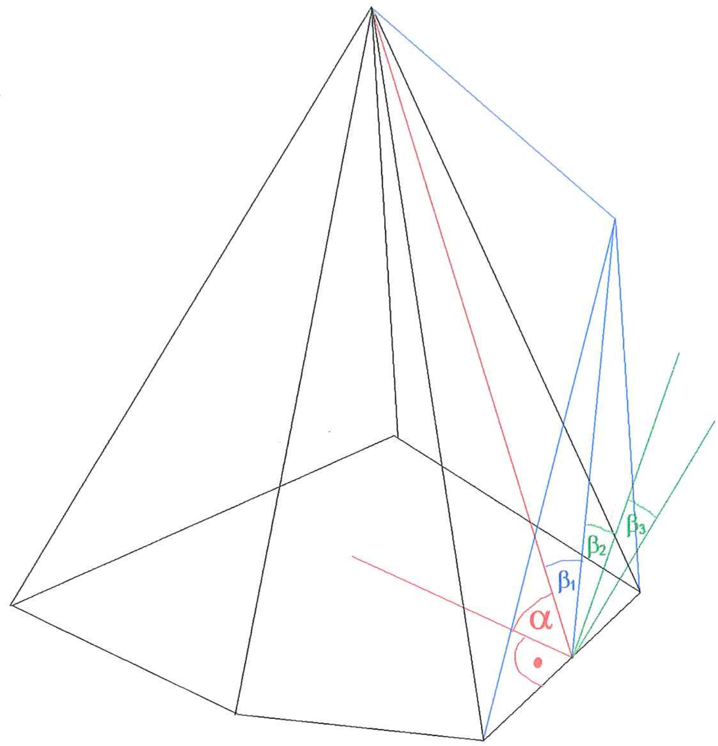


Rysunek 4.2

Kolejny raz „doklejamy" ostrosłup do trójkątnej ściany bocznej poprzednio dostawianego ostrosłupa (do ściany, której jedną z krawędzi jest krawędź podstawy wyjściowego ostrosłupa). Nadal kąt nachylenia mających wspólną krawędź ścian bocznych doklejanego ostrosłupa do ścian poprzednio utworzonego wielościanu musi być mniejszy od 180°. Ponieważ zawsze jedna ze ścian bocznych doklejanego ostrosłupa ma wspólną krawędź ze ścianą wyjściowego ostrosłupa (jest to jedna z krawędzi podstawy), zatem kąt nachylenia takiej ściany (należącej do ostatniego z dostawianych ostrosłupów) do płaszczyzny podstawy musi być mniejszy od 180°. Z tego wynika, że suma kątów nachylenia każdej takiej ściany dostawianego ostrosłupa do poprzedniej oraz kąta nachylenia ściany bocznej wyjściowego ostrosłupa (ściany, na której dokonujemy opisywanego przekształcenia) do płaszczyzny podstawy musi być mniejsza od 180°. Używając oznaczeń z następnego rysunku (rysunek 4.3) otrzymujemy równość:

$$\alpha+\beta_1+\beta_2+\beta_3+\ldots<180°,$$

gdzie $\beta_1, \beta_2, \beta_3,\ldots$ to kąty nachylenia kolejnych ścian bocznych doklejanych ostrosłupów (mających wspólną krawędź z płaszczyzną podstawy) do poprzedniej takiej ściany, a α to kąt nachylenia ściany bocznej wyjściowego ostrosłupa do płaszczyzny podstawy. Doklejając kolejne ostrosłupy musimy pamiętać, aby zachowana była ta nierówność.



Rysunek 4.3

Poniżej uzasadnię, że każdy punkt (S, W) z sektora B będzie zrealizowany przez wielościan, który powstaje przez k-krotne zastosowanie opisanego przekształcenia, gdzie k jest pewną liczbą naturalną.

Weźmy dowolny punkt (S_B, W_B) z sektora B. Jeżeli będzie on realizowany przez wielościan, który powstaje przez k-krotne zastosowanie opisywanego przekształcenia do ostrosłupa realizującego punkt (S, W) leżący na prostej $W=S$, to współrzędna S_B będzie postaci:

$$S_B=S+k\cdot 2 \qquad (16),$$

a współrzędna W_B:

$$W_B=W+k\cdot 1 \qquad (17).$$

Rozwiązując układ równań $\begin{cases} (16) \\ (17) \end{cases}$, gdzie w równaniu (17) podstawiamy $W=S$, otrzymamy $S=W=2W_B-S_B$ i $k=S_B-W_B$, a ponieważ $S_B,W_B\in N$ czyli S, W, $k\in N$.

Dodatkowo, ponieważ punkty z sektora B ograniczone są półprostymi: $W=S$, dla $S\geq 4$ i $W=\frac{1}{2}S+2$, dla $S\geq 4$ dlatego spełniać będą dwie nierówności:

$$W_B>\frac{1}{2}S_B+2 \qquad (17)$$

$$\text{i } W_B<S_B \qquad (18).$$

Przekształcając nierówność (17) otrzymujemy:

$$2W_B-S_B>4,$$

a ponieważ $S=W=2W_B-S_B$,

czyli $S=W>4$.

Przekształcając zaś nierówność (18) otrzymujemy:

$$S_B-W_B>0$$

a ponieważ k$=S_B-W_B$,

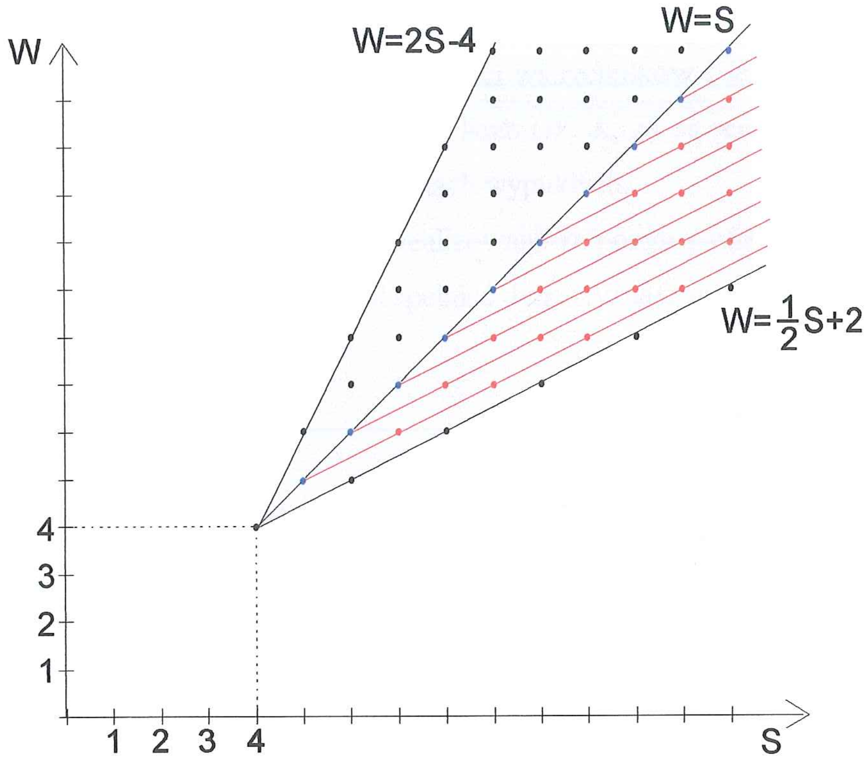
czyli $k>0$.

Zatem wielościan realizujący punkt (S_B, W_B) powstaje przez k-krotne (gdzie $k>0$ i $k\in N$) zastosowanie przekształcenia opisanego na początku rozdziału czwartego na ostrosłupie opisanym parą (S, W) (gdzie $S, W\in N$ i $S=W>4$) wyznaczoną z układu $\begin{cases} (16) \\ (17) \end{cases}$.

Zastosowanie k-krotne tego przekształcenia do ostrosłupa opisanego parą liczb (S, W) spowoduje powstanie wielościanu opisanego parą liczb $(S+k\cdot 2, W+k\cdot 1)$, gdzie S i W to współrzędne wyjściowego ostrosłupa.

Zastosowanie tego przekształcenia do ostrosłupów realizujących, jako ilości wierzchołków i ścian wielościanu wypukłego, kolejne punkty na prostej $S=W$, spowoduje utworzenie wielościanów, które zrealizują jako ilości wierzchołków i ścian wszystkie punkty z sektora ograniczonego półprostymi (14) i (15). Punkty realizujące te wielościany będą zbierać się na półprostych, rozpoczynających się w punktach, oznaczających wyjściowe ostrosłupy. Ilustruje te półproste kolejny wykres (rysunek 4.4.).

Zatem potrafimy zrealizować jako ilości wierzchołków i ścian wszystkie punkty (S, W) z sektora B.



Rysunek 4.4

Podsumowanie.

Opisane w mojej pracy przekształcenia i konstrukcje pozwoliły mi udowodnić, jakie pary liczb (S, W) są realizowane jako ilości wierzchołków i ścian w wielościanach wypukłych, a co z tego wynika, jakie trójki liczb (W, K, S) są realizowane jako ilości wierzchołków, krawędzi i ścian w wielościanach wypukłych.

Zatem jeśli trójka liczb (W, K, S) jest realizowana za pomocą wielościanu wypukłego, to dwie spośród nich - para (S, W) - musi spełniać dwie wyznaczone nierówności:

- $W \leq 2S-4$ (11)
- $W \geq \frac{1}{2}S+2$ (12).

A jeśli para (S, W) spełnia opisane zależności, wystarczy sprawdzić, czy dla trójki (W, K, S) zachodzi wzór Eulera, jeśli tak to trójka taka realizuje się jako wielościan wypukły. Nie spełnienie przez trójkę liczb jednego z dwóch warunków mówi nam, że nie realizuje się ona jako ilość wierzchołków, krawędzi i ścian żadnego wielościanu wypukłego.