Zadania z Geometrii Elementarnej 1
Lista 1. Pole figur wielokątnych.

Pole wielokątów - mniej znane wzory, itp.

1. Wyprowadź wzór na pole
   (a) wypukłego czworokąta, którego przekątne przecinają się pod kątem α i mają długości d_1 i d_2;
   (b) n-kąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu r.
2. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach (równoległych bokach) AB i CD, oraz punkt S przecięcia jego przekątnych. Pole trójkąta ABS wynosi $P_1 = 36$, a pole trójkąta CDS wynosi $P_2 = 4$. Znajdź pole tego trapezu. Znajdź też ogólny wzór na pole całego trapezu, gdy dane są pola P_1 i P_2 jak wyżej, ale bez konkretnych wartości liczbowych.
3. Wypukły czworokąt podzielono na cztery części dwoma odcinkami łączącymi środki przeciwległych boków, i części te ponumerowano cyklicznie I, II, III, IV. Uzasadnij, że suma pól części I i III jest taka sama jak suma pól części II i IV.

Rozcinanie, składanie, równoważność przez rozkład.

4. Przekształć jedną figurę w drugą rozcinając ją na jak najmniejszą liczbę części i składając z nich tą drugą:
   (a) równoległobok w prostokąt (2 części);
   (b) trapez równoramienny w prostokąt (2 części);
   (c) trapez różnoramienny w prostokąt (3 części, ale czy dla każdego takiego trapezu?);
   (d) trójkąt prostokątny w prostokąt (2 części);
   (e) dowolny trójkąt w równoległobok (2 części);
   (f) kwadrat w trójkąt (2 części);
   (g) kwadrat w nieprostokątny trójkąt równoramienny (3 części);
   (h) prostokąt w romb (2 części);
   (i) deltoid wypukły oraz niewypukły w prostokąt (4 części);
   (j) sześciokąt foremny w prostokąt (3 części);
   (k) kwadrat w dwa jednakowe mniejsze kwadraty (4 części);
   (l) trójkąt równoboczny w trzy jednakowe mniejsze trójkąty równoboczne (6 części);
   (m) dowolny trójkąt rozwartokątny w prostokąt, którego jeden bok jest równy jednemu z boków trójkąta przy kącie rozwartym (3 części).
5. Tak jak w zadaniu 4, przekształć:
   (a) prostokąt o wymiarach 2×3 w dwa jednakowe mniejsze prostokąty podobne do wyjściowego (6 części);
   (b) sześciokąt foremny w trzy jednakowe mniejsze sześciokąty foremne (13 części).
6. Opisz dokładnie, w sposób umożliwiający wykonanie całkowicie dokładnego rysunku, części na jakie można rozciąć pierwszą ze wskazanych figur tak, by można z nich złożyć drugą figurę (czyli części realizujące równoważność przez rozkład pomiędzy tymi figurami):
   (a) prostokąt o wymiarach 2×3 i odpowiedniej wielkości kwadrat;
   (b) dowolne dwa różne trójkąty o wspólnej podstawie i jednakowych wysokościach, przy założeniu że oba kąty przy podstawie w każdym z tych trójkątów są ostre.

7. Sporządź w miarę dokładne rysunki ilustrujące etapy realizowania (w kilku kolejnych krokach) równoważności przez rozkład między:
   (a) trójkątem równobocznym i kwadratem;
   (b) sześciokątem foremnym i trójkątem równobocznym.
8. Uzasadnij, że dwa graniastosłupy prostokątne o równych wysokościach i równych polach podstawy są równoważne przez rozkład.
9. Uzasadnij, że każde dwa prostopadłościany mające tą samą objętość są równoważne przez rozkład.
10. Korzystając z poprzednich dwóch zadań uzasadnij, że dowolne dwa graniastosłupy prostkątne o jednakowych objętościach są równoważne przez rozkład.
11. Wykaż, że dowolny równoległościan jest równoważny przez rozkład prostopadłościanowi o takiej samej wysokości i takiej samej (równoległobocznej) podstawie jak wyjściowy równoległościan.
12. Korzystając z poprzednich zadań uzasadnij, że dowolne dwa równoległościany o jednakowych objętościach są równoważne przez rozkład.

Program Wykładu z Geometrii Elementarnej 1

1. Pole figur wielokątnych i równoważność przez rozkład.
2. Mierzalność figur na płaszczyźnie - miara Jordana; metoda wyczerpywania Eudoksosa.
3. Stożki, stożki ścięte, pierścienie stożkowe, i ich zastosowanie do obliczania pól powierzchni obrotowych.
4. Elementarne uzasadnienia wzoru na objętość ostrosłupów.
5. "Przedcalculusowe" metody obliczania objętości i pól - zasada Cavallieri'ego.
6. Wzór Eulera dla wielościanów. Wielościany Archimedesowe.
7. Przekształcenia izometryczne na płaszczyźnie.
8. Symetrie figur na płaszczyźnie i w przestrzeni.