Metoda wyczerpywania jest procedurą bardzo prostą w opisie i niewiele bardziej skomplikowany jest dowód jej poprawności. W stosowaniu wymaga jednak często dużej inwencji – z tego też względu została w czasach nowożytnych zastąpiona metodami znacznie mniej błyskotliwymi, ale niewymagającymi prawie nic od użytkownika: całką Riemanna i całką Lebesgue'a.

Metoda wyczerpywania to następująca procedura.

Z figury, którą chcemy zmierzyć, wyjmujemy jej część, której miarę znamy (na ogół wielokąt czy wielościan), przy czym musi być ona większa od połowy całej figury (co trzeba udowodnić, a to może być nietrywialne, skoro przecież nie znamy miary całej figury). Miarę tej części oznaczmy przez S_1. Z pozostałą częścią figury postępujemy tak samo, otrzymując kolejno S_2, S_3 itd., za każdym razem wyjmując więcej niż połowę tego, co jeszcze zostało. Eudoksos twierdzi, że suma

$$S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_n$$

tym lepiej przybliża miarę figury, im większe jest n, oraz że nieskończona suma daje miarę figury.

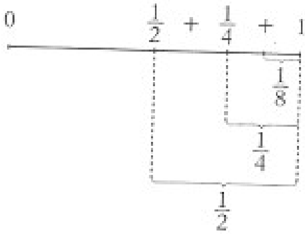
Dla udowodnienia poprawności metody Eudoksosa niezbędne jest stwierdzenie, że

$$(*) \qquad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 1.$$

Dziś nie każdy nauczyciel umie wytłumaczyć uczniom, że ułamek nieskończony 0,99999... jest równy 1.

Jest to jednak informacja, którą już wtedy Grecy posiedli. Rozumieli ten trudny do przekazania i dzisiaj fakt, że jeśli dwie liczby różnią się dowolnie mało, to są równe – gdyby bowiem równe nie były, istniałaby między nimi konkretna różnica, powiedzmy r: nie różniłyby się więc dowolnie mało – na pewno ich różnica byłaby większa od $r/2$. Ponieważ (co jest oczywistym wnioskiem z rysunku VI.3)

$$1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)=\frac{1}{2^n},$$



Rys. VI.3

więc wystarczy stwierdzić, że liczba $1/2^n$ może być dowolnie mała. To zaś niezbicie stwierdza aksjomat Archimedesa zastosowany do liczb (dodatnie liczby to też są wielkości). Weźmy bowiem bardzo małą (dodatnią) liczbę x i liczbę 1. Aksjomat Archimedesa orzeka (patrz początek wykładu), że istnieje taka liczba (naturalna) k, że $1/x < k$, ale $k < 2^k$, więc $1/x < 2^k$, czyli $1/2^k < x$. A to, wobec dowolności obrania liczby x oraz wobec faktu, że lewa strona wzoru (*) nie może przekroczyć jedynki (rys. VI.3), dowodzi równości w tym wzorze. Przy tych informacjach dowód poprawności metody wyczerpywania jest następujący: oznaczmy przez S poszukiwaną miarę (przy założeniu, że taka istnieje) – wówczas

$$S \geq S_1+S_2+S_3+\cdots \geq \frac{S}{2}+\frac{S}{4}+\frac{S}{8}+\cdots=S.$$

Pierwsza nierówność wynika z faktu, że wyjmowaliśmy zawsze części mierzonej figury (i były one rozłączne), równość jest konsekwencją wzoru (*). Pozostaje pytanie, skąd wzięła się druga nierówność.

Z założenia mamy $S_1 > S/2$. Następnie

$$S_1+S_2 > S_1+\frac{1}{2}(S-S_1)=\frac{S}{2}+\frac{1}{2}S_1 > \frac{S}{2}+\frac{S}{4},$$

$$S_1+S_2+S_3 > (S_1+S_2)+\frac{1}{2}(S-(S_1+S_2))=\frac{S}{2}+\frac{1}{2}(S_1+S_2) >$$

$$> \frac{S}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{S}{2}+\frac{S}{4}\right)=\frac{S}{2}+\frac{S}{4}+\frac{S}{8}$$

i dalej w ten sam sposób:

$$S_1+\ldots+S_{n-1}+S_n > (S_1+\ldots+S_{n-1})+\frac{1}{2}(S-(S_1+\ldots+S_{n-1}+S_n))=$$

$$=\frac{S}{2}+\frac{1}{2}(S_1+\ldots+S_{n-1}) >$$

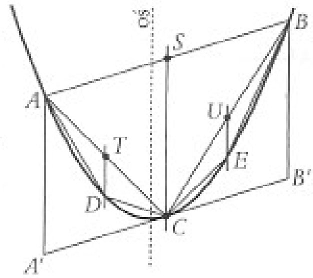
$$> \frac{S}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{S}{2}+\cdots+\frac{S}{2^{n-1}}\right)=\frac{S}{2}+\frac{S}{4}+\cdots+\frac{S}{2^n}$$

To, jak wiadomo, kończy dowód potrzebnej nierówności (dziś dodalibyśmy: przez indukcję).

Myślę, że wielu spośród Czytelników zadaje sobie pytanie, po co tak szczegółowo przedstawiam uzasadnienie metody wyczerpywania. Powód jest prosty – nie widzę innego sposobu przekazania informacji o tym, jak bardzo precyzyjne i pozbawione luk były rozważania matematyków okresu wojny peloponeskiej, jak dalece matematyka, którą oni uprawiali, jest tą samą matematyką, którą uprawia się dzisiaj.

Tak więc uzasadniona została słuszność metody wyczerpywania. Pozostaje pokazać, jak się nią posługiwano w praktyce.

Pierwszy przykład pochodzi z pracy Archimedesa *Kwadratura paraboli*. Zadanie, które należy rozwiązać, to zmierzenie pola odcinka paraboli, czyli figury ograniczonej przez parabolę i jej cięciwę. Archimedes postępuje w następujący sposób. Przez środek S cięciwy AB prowadzi prostą równoległą do osi paraboli, która to prosta przecina parabolę w punkcie C (rys. VI.4). Pole odcinka paraboli jest równe $4/3 \cdot \Delta\, ABC$.



Rys. VI.4

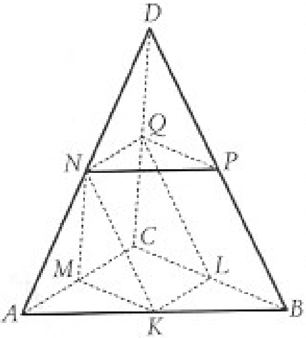
Tak też jest w istocie. Pozostaje jeszcze kwestia, jak to wykazać. Potrzebne są do tego pewne informacje o paraboli – uwaga! – niemieszczące się w programie szkoły średniej, a o ile mi wiadomo, również w programach uczelni wyższych – tam problem pola odcinka paraboli rozwiązuje się za pomocą całkowania, co daje wynik w postaci nienadającej się nawet do porównania z podanym przez Archimedesa. Jakie są to wiadomości? Pierwsza z nich to fakt, że styczna do paraboli w punkcie C jest równoległa do cięciwy AB. Dalsze podam za chwilę.

Wyczerpywanie paraboli przeprowadza Archimedes w ten sposób, że jako S_1 bierze trójkąt ABC. Aby wykazać, że wyjął więcej niż połowę odcinka paraboli, prowadzi w punkcie C styczną do paraboli, a w punktach A i B – proste równoległe do osi paraboli. W ten sposób powstaje równoległobok $AA'B'B$ (patrz rys. VI.4) o polu równym dokładnie podwojonemu polu trójkąta ABC. Ale odcinek paraboli zawiera się istotnie w tym równoległoboku. Trójkąt ABC stanowi więc więcej niż połowę odcinka paraboli. To, co z paraboli zostało, to dwa jej odcinki (ograniczone cięciwami AC i BC). Archimedes stosuje do każdego z nich ten sam zabieg co poprzednio, otrzymując S_2 w postaci dwóch trójkątów (ACD i BCE) – nigdzie nie było powiedziane, że to, co wyjmujemy, ma być w jednym kawałku. Dowód poprawności wyjęcia S_2 jest identyczny jak poprzednio – sytuacja jest przecież taka sama. W następnym kroku Archimedes wyjmuje (równocześnie) cztery trójkąty z powstałych czterech odcinków paraboli, w następnym osiem itd.

Druga informacja, w której posiadanie przez znaczącą część Czytelników powątpiewam, to fakt, że trójkąty wyjmowane w kolejnym kroku są 8 razy mniejsze (pamiętajmy – chodzi o pole). Archimedes to wiedział, mógł więc zauważyć, że w kolejnych krokach wyjmuje cztery razy mniej pola (bo trójkątów tych jest dwa razy więcej) niż w poprzednich. Prowadzi to do konkluzji, że

$$S_1 + S_2 + S_3 + \cdots = \Delta\, ABC \cdot \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots\right) = \frac{4}{3} \cdot \Delta\, ABC.$$

Przykład ten jest pouczający również z tego względu, że może przekonać



Rys. VI.5

nas, iż wiedza niekoniecznie powiększa się, że są obszary (np. umiejętność rozwiązywania zadań geometrycznych), gdzie moglibyśmy z kretesem przegrać z naszymi poprzednikami sprzed 2200 lat.

Drugi przykład ma nawet swoją historię. Rozwiązane z okazji demonstracji teorii proporcji zadania umożliwiają wprowadzenie znanych wzorów na pole trójkąta. Sądzono, że podobnie można uzyskać wzór na objętość czworościanu. Tymczasem Euklides wzór ten uzyskał, posługując się metodą wyczerpywania, co jest (nie ma co ukrywać) metodą bardziej zawiłą, choćby przez użycie w niej przejścia nieskończonego. Przez wieki uważano to za fanaberię Euklidesa, ale elementarnego sposobu znaleźć nie umiano. Waga problemu przez to rosła – postawiono pytanie, czy taki sposób w ogóle istnieje. Pytanie takie znalazło się nawet wśród sławnych problemów Hilberta z 1900 roku (patrz wykład XXII). I dopiero wtedy, w tymże 1900 roku Dehn znalazł odpowiedź – była ona negatywna: wzoru na objętość czworościanu nie można uzyskać elementarnie, trzeba użyć jakichś przejść granicznych, jakichś całek. Na przykład postąpić tak jak Euklides i użyć metody wyczerpywania.

Przedstawione niżej zastosowanie metody wyczerpywania do tego problemu jest nieco zmienione w stosunku do *Elementów* – połączyłem kilka twierdzeń i przedstawiam to tutaj w postaci bardziej współczesnej (w nadziei, że jest słuszną decyzją przedstawić pomysł, a nie zagubić się w mereżkach i okrętkach).

W stosunku do graniastosłupów metody cięcia i układania z kawałków innych brył pozwalają na znalezienie odpowiedniego wzoru na objętość. Euklides istotnie korzysta z tego faktu. Wyczerpuje mianowicie czworościan, wyjmując z niego (jako S_1) dwa graniastosłupy. Są one przedstawione na rysunku VI.5 – punkty K, L, M, N, P, Q są środkami odpowiednich krawędzi. Graniastosłupy $KLBNQP$ i $KMNLCQ$ stanowią więcej niż połowę czworościanu $ABCD$, gdyż „pozostałości" – czworościany $AKMN$ i $NPQD$ można zmieścić w wyjmowanych graniastosłupach (pierwszy z nich przesunięty wzdłuż AC zmieści się w $KMNLCQ$, drugi, podobnie, przesunięty wzdłuż DB – w $KLBNQP$). Następnie powtarza tę operację dla każdego z pozostawionych czworościanów, otrzymując jako S_2 cztery graniastosłupy itd. Każdy z pozostawionych czworościanów jest podobny do wyjściowego (nawet jednokładny) w stosunku 1:2, a więc objętości ich są w stosunku 1:8. Tym sposobem, zupełnie tak, jak w poprzednim przykładzie, za kolejnym razem wyjmuje się 1/4 tego, co wyjmowało się za poprzednim razem. Ostateczny więc wynik stanowi i tu $4S_1/3$. Pozostaje się zainteresować, ile też to jest. Graniastosłup $KLBNQP$ ma podstawę równą podstawy czworościanu $ABCD$, a wysokość równą 1/2 wysokości tego czworościanu – jego objętość jest zatem równa 1/8 iloczynu tych wielkości. Na graniastosłup $KMNLCQ$ można spojrzeć jak na połowę graniastosłupa o podstawie $KMCL$ i wysokości takiej, jak poprzedniego graniastosłupa. Ponieważ jednak równoległobok $KLMN$ to połowa podstawy czworościanu $ABCD$, więc i ten graniastosłup ma objętość równą 1/8 iloczynu podstawy czworościanu $ABCD$ przez jego wysokość.

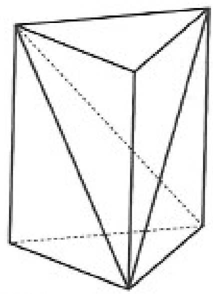
Ostatecznie mamy

$$\frac{4}{3}\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{3} \text{ iloczynu pola podstawy przez wysokość.}$$

Metoda wyczerpywania jest matematycznie prostsza od późniejszych koncepcji miary. Ma jednak tę niedogodność, o czym już pisałem, że wymaga „artystycznego" talentu, aby ją zastosować. Tam, gdzie umiemy ją zastosować do figury, dla której określona jest miara Peano-Jordana (miarowy odpowiednik całki Riemanna) i miara Lebesgue'a, wynik każdego z tych trzech sposobów mierzenia będzie taki sam. Tam jednak, gdzie miara Peano-Jordana jest nieokreślona, wyniki uzyskane metodą Eudoksosa są różne (mniejsze) od wyników uzyskanych metodą Lebesgue'a.

Wyposażenie matematyki w tak potężny oręż, jak liczby i mierzenie, musiało spowodować bardzo szybki skok naprzód. Tak się też stało, głównie za sprawą wymienianych tu wielokrotnie Euklidesa i Archimedesa, którym poświęcony jest następny wykład.

W rzeczywistości problem polega na wykazaniu, że objętość czworościanu jest postaci *coś · pole podstawy · wysokość*, przy czym to *coś* jest stałe. I tego właśnie dowodził Euklides. Jeśli się wie, że ten stały współczynnik istnieje, to sprawdzić, iż jest on równy akurat 1/3, można bardzo efektownie. Euklides użył w tym celu rysunku takiego, jak rysunek VI.6.



Rys. VI.6