[Matematyka] *dzieli się na tendencje do linii prostej i tendencje do linii krzywej. Epoki linii prostej trwają zwykle krócej niż linii krzywej.*

Stanisław Mackiewicz [1]

Rozdział V

O wielkościach geometrycznych • Porównywanie wielokątów co do pola • Porównywanie przez rozkład skończony • Porównywanie przez dopełnienie • Rola postulatu Archimedesa • O kwadraturach • Przypisy

W starożytności klasycznej — już była o tym mowa — długości odcinków, pola i objętości figur, ciężary etc. nie były traktowane jak liczby. Stanowiły odrębne rodzaje wielkości i były specyficzne dla każdego rodzaju wielkości sposoby porównywania. Posługiwano się nimi tak, jak my się posługujemy tzw. *liczbami mianowanymi*: nie mieszamy rozmaitych ich rodzajów przy dodawaniu i odejmowaniu; także przy mnożeniu i dzieleniu, i za niesensowne uważamy pytanie np. o to, ile razy droga przebyta w danym ruchu jest większa od czasu.

Niezbędną cechą każdego rodzaju wielkości jest możliwość porównywania, a więc istnienie kryteriów orzekających o równości i nierówności, od których wymaga się spełnienia pewnego minimum warunków formalnych.

Do warunków wykraczających poza ten prosty formalizm, należy wymaganie, by wielkości stosowały się do *postulatu Archimedesa*.

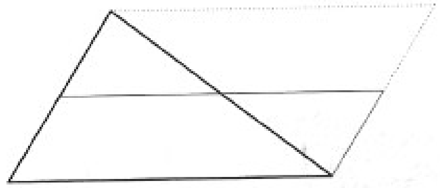
Bez tego wymagania nie zawsze byłoby sensownym przekonanie, że jeden odcinek, jeśli mieści się w drugim, mieści się w nim określoną maksymalną ilość razy.

Była mowa już o tym, że nazwa postulatu jest umowna. Znał go i stosował już Euklides, a — według Archimedesa — jego sformułowanie i pierwsze zastosowanie pochodzi od Eudoksosa.

Dwie figury uważa się za równe co do pola, jeśli przy pewnych rozkładach tych figur — na skończenie wiele wielokątów stykających się co najwyżej brzegami — daje się ustalić odpowiedniość wzajemnie jednoznaczną między elementami obu rozkładów taką, że odpowiadające sobie części są przystające. Figury uznane za równe co do pola na zasadzie tego kryterium są nazywane *przystającymi przez rozkład* [2].

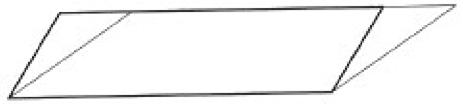
Twierdzenie Pitagorasa głosi, że kwadrat zbudowany na przeciwprostokątni trójkąta prostokątnego jest równy co do pola figurze złożonej z kwadratów zbudowanych na przeciwprostokątniach. Dowód, podany w poprzednim rozdziale (Rys. 1), polegał na ustaleniu przystawania obu figur przez rozkład.

W ten sposób trójkąt jest równy co do pola równoległobokowi o tej samej co trójkąt podstawie i o połowie jego wysokości (Rys. 1).



Rys. 1. Trójkąt i równoległobok równe co do pola przez rozkład.

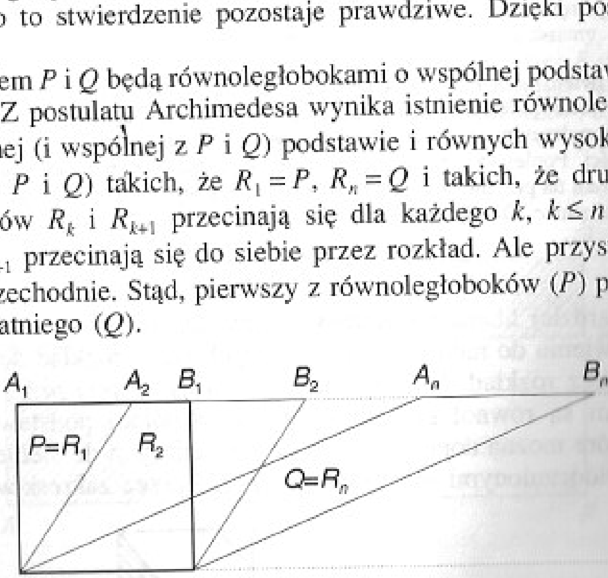
Równoległobok przystaje przez rozkład do innego równoległoboku o tej samej co dany podstawie i tej samej wysokości (Rys. 2), jeśli ich drugie podstawy się przecinają.



Rys. 2. Dwa równoległoboki równe co do pola przez rozkład.

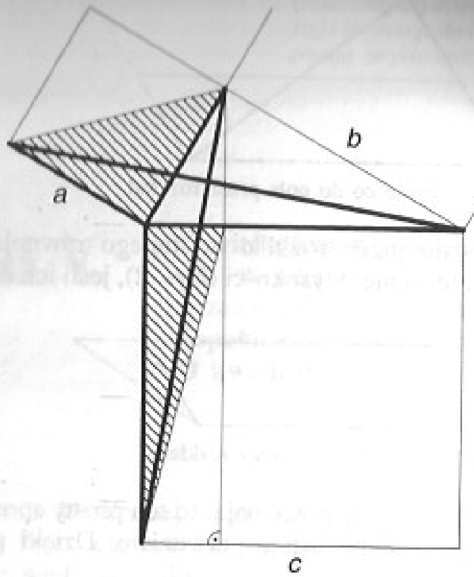
Ale jeśli drugie podstawy się nie przecinają, to ten prosty sposób porównania zawodzi. Mimo to stwierdzenie pozostaje prawdziwe. Dzięki postulatowi Archimedesa.

Niech bowiem P i Q będą równoległobokami o wspólnej podstawie i równych wysokościach. Z postulatu Archimedesa wynika istnienie równoległoboków R_1, ..., R_n o wspólnej (i wspólnej z P i Q) podstawie i równych wysokościach (tych samych co dla P i Q) takich, że $R_1 = P$, $R_n = Q$ i takich, że drugie podstawy równoległoboków R_k i R_{k+1} przecinają się dla każdego k, $k \leq n-1$ (Rys. 3). Wtedy R_k i R_{k+1} przecinają się do siebie przez rozkład. Ale przystawanie przez rozkład jest przechodnie. Stąd, pierwszy z równoległoboków (P) przystaje przez rozkład do ostatniego (Q).



Rys. 3. $A_1B_1 = A_2B_2 = \ldots = A_nB_n$. Równoległoboki R_1, R_2, ..., R_n mają przecinające się górne podstawy; — są równe kolejno co do pola przez rozkład.

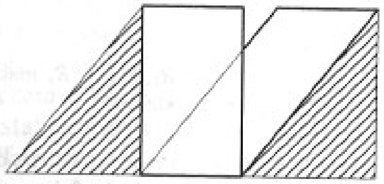
W szczególności, *równoległobok przystaje przez rozkład do prostokąta o tych samych, co równoległobok podstawie i wysokości*, a dalszym wnioskiem jest ten, że *trójkąty o tych samych podstawach i wysokościach przystają do siebie przez rozkład*, bo przystają przez rozkład do tego samego prostokąta. Dowód — wykorzystujący postulat Archimedesa — nie podaje wszakże żadnego konkretnego rozkładu. Dowód jest *nieefektywny* — jak się w naszych czasach zwykło mówić: liczba n pojawiająca się w rezultacie tego dowodu, nie jest przez postępowanie użyte w tym dowodzie wyznaczona.



Rys. 4. Dowód twierdzenia Pitagorasa według Euklidesa; Ks. I *Elementów*. W odróżnieniu od poprzedniego dowodu (p. Rozdział IV, Rys. 1) jest to dowód nieefektywny. Trójkąty zakreskowane są równe co do pola odpowiednim trójkątom pogrubionym mając te same z nimi podstawy i równe wysokości. Ponieważ trójkąty pogrubione są przystające, więc stąd już wynika równość co do pola kwadratu na przyprostokątni a i prostokąta, jednego z dwu składających się na kwadrat na przeciwprostokątni c. Dowód dopełnia analogiczne rozumowanie dla przyprostokątni b.

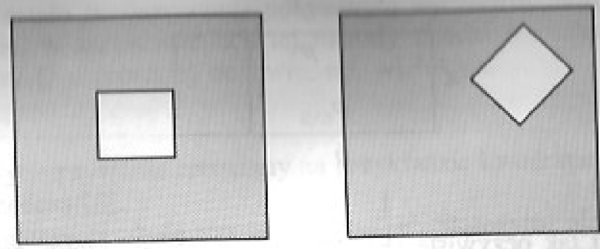
Według bardziej liberalnej umowy, figury uznane są za równe co do pola, jeśli po dostawieniu do nich figur przystających przez rozkład dostaje się figury przystające przez rozkład. Nazywa się to *porównywaniem przez dopełnienie*.

Przykładem są równoległoboki P i Q o wspólnej podstawie i tej samej wysokości, które można dopełnić do figur przystających do siebie przez rozkład trójkątami uwidocznionymi na rysunku (Rys. 5) przez zakreskowanie.



Rys. 5

Powstaje pytanie: *czy wielokąty równe co do pola przez dopełnienie są równe co do pola przez rozkład?* W szczególnym przypadku — równoległoboków o tych samych podstawach i równych wysokościach — daliśmy odpowiedź twierdzącą. Trudność ogólnego pytania widać na przykładzie dwu figur — zacieniowanych na rysunku 6 — które dopełniają się do tego samego okalającego je kwadratu kwadratami przystającymi.



Rys. 6

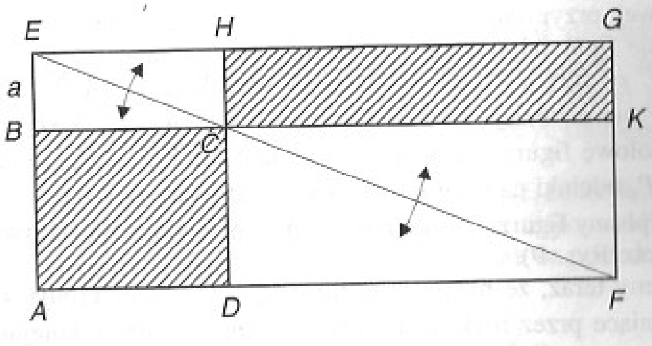
To ogólne pytanie jest późniejszej daty niż starożytność. Twierdząco odpowiedzieli na nie Wolfgang (Farkas) Bolyai i P. Gerwien. Środkiem dowodowym jest — użyty już w przypadku szczególnym — postulat Archimedesa [3].

Prostokąt jest równy co do pola pewnemu prostokątowi wśród takich, których jeden z boków jest ustalony.

Oto dowód znany Euklidesowi [4], ale przy wspomnianym bardziej liberalnym rozumieniu porównywania.

D o w ó d. Niech a będzie danym odcinkiem. Niech $ABCD$ będzie danym prostokątem.

Odłóżmy odcinek a wzdłuż boku AB jako odcinek BE. Przedłużmy odcinek EC do przecięcia się z przedłużeniem boku AD w punkcie oznaczonym przez F (Rys. 7). Weźmy pod uwagę prostokąt $AEGF$, dla którego EF jest przekątnią (trójkąt AEF jest jego połową). Przedłużmy odcinki BC i CD do przecięcia się z bokami prostokąta $AEGF$. Dostajemy punkty H (na boku EG) i K (na boku GF). Prostokąt $CHGK$, którego bok CH jest równy danemu odcinkowi a, jest równy co do pola danemu prostokątowi $ABCD$.

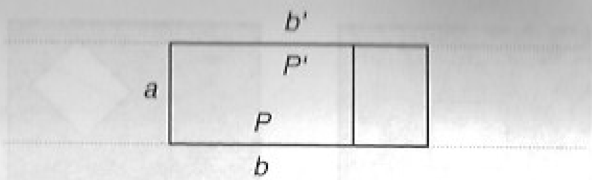


Rys. 7

Dowód polega na zauważeniu, że na dołączeniu do prostokątów $CHGK$ i $ABCD$ odpowiednich połówek prostokątów $BEHC$ i $DCKF$ otrzymuje się trójkąty AEF i EFG przystające do siebie. □

Twierdzenie dowiedzione dla prostokątów przenosi się na wszelkie wielokąty: *każdy wielokąt jest równy co do pola pewnemu prostokątowi wśród prostokątów mających wspólny bok*. Przypomnijmy: równość co do pola znaczy przystawanie przez dopełnienie, a w rezultacie — na mocy twierdzenia Bolyaia–Gerwiena — przystawanie przez rozkład.

Sam dowód istnienia nie zamyka problemu. Powstaje pytanie, czy znaleziony prostokąt jest tylko jeden? Odpowiedź jest twierdząca: prostokąty mające jeden bok wspólny a drugie boki różne nie mogą przystawać do siebie przez rozkład.



Rys. 8

Twierdzenie jest tak oczywiste (Rys. 8), że są autorzy, którzy przyjmują je za aksjomat [5].

W ten sposób, porównywanie wielokątów co do pola sprowadza się do porównywania odcinków — drugich boków prostokątów wyznaczonych przez wspomniane wyżej twierdzenia. Te odcinki — odkładane na prostej z ustalonego punktu — tworzą skalę dla pól wielokątów.

Jest to zasadniczy rezultat teorii przystawania wielokątów przez rozkład. Często bywa przesłonięty bardziej spektakularnym problemem kwadratury, polegającej na znalezieniu dla danego wielokąta kwadratu przystającego doń przez rozkład. O kwadraturach będzie wzmianka przy końcu rozdziału.

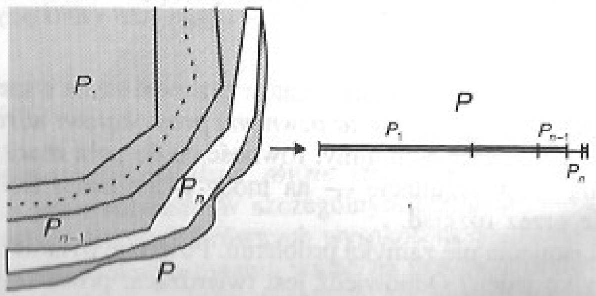
∽

A co z figurami — takimi jak koło — ograniczonymi liniami krzywymi? Nie mają one rozkładów na skończenie wiele wielokątów, ale można je takimi rozkładami wyczerpać — jak mówili Grecy.

Zakładamy — co zrobił już Euklides — że porównywanie odcinków podporządkowane jest postulatowi Archimedesa. Zakładamy ponadto, że polu figury krzywoliniowej przypisany jest odcinek na przyjętej przez nas skali pól i że zawieraniu się figur odpowiada relacja mniejszości na skali odcinków.

Mówimy, że figura P jest *wyczerpana* wielokątami P_1, P_2, ... (zakładamy, że wielokąty nie nakładają się na siebie), jeśli wielokąt P_n pokrywa co do pola więcej niż połowę figury nie nakrytej wielokątami P_1, ..., P_{n-1}. Odpowiadające wielokątom P_k odcinki na skali pól — odkładane jeden za drugim — wyczerpują odcinek przypisany figurze P, zgodnie z lematem Eudoksosa znanym nam z rozdziału III (zob. Rys. 9).

Przypuśćmy teraz, że mamy inną figurę Q, którą wyczerpują wielokąty Q_1, Q_2, ... przystające przez rozkład do, odpowiadających im w kolejności w jakiej są zapisane, wielokątów P_1, P_2, ... Figury P i Q uznajemy za równe co do pola.



Rys. 9. Metoda wyczerpywania: wielokąt P_n jest więcej niż połową pozostałości po P_1, ..., P_{n-1}.

Opisane zostało *porównywanie pól metodą wyczerpywania*. Oczywiście, w zastosowaniach tej metody chodzi o znalezienie dla danej figury P figury Q o prostszej budowie, np. wielokąta.

∽

Metodę wyczerpywania zobaczmy na przykładzie kwadratury paraboli, danej przez Archimedesa [6].

My zapisujemy parabolę równaniem $y = ax^2$. Starożytni nie znali tego równania, znali jednak własności paraboli wynikające z opisu przez to równanie [7]. Dla obliczeń Archimedesa ważne są następujące własności odcinków paraboli.

(1) *Jeśli poprowadzić styczną równoległą do danej cięciwy AB i połączyć punkt styczności P ze środkiem M cięciwy, to odcinek PM ma kierunek jednakowy dla wszystkich cięciw.* (Rys. 10.)

Wspomniany kierunek nazywa się kierunkiem głównym paraboli.

Odcinek paraboli odcięty cięciwą AB zamknijmy w równoległobok, którego połową jest na rysunku niżej (Rys. 10) równoległobok $MBNP$, gdzie BN ma kierunek główny, a PN ma kierunek stycznej. Wtedy:

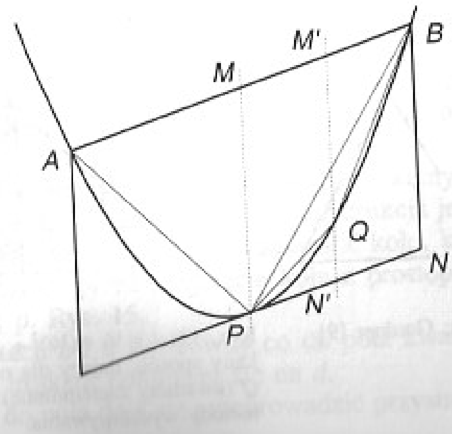
(2) *Jeśli odcinek MB przepołowić prostą M′N′ o kierunku głównym, to odcinek M′N′ (który ma końce na MB i PN) jest dzielony przez łuk paraboli (w punkcie Q na rysunku) w stosunku* 3 : 1. (Rys.10.)

Trójkąt APB jest więcej niż połową odcinka APB paraboli, a ponieważ, co wynika z (1), dla cięciwy PB i punktu Q sytuacja się powtórzy, trójkąt PBQ jest więcej niż połową odcinka PBQ.

Postępowanie można kontynuować, stosując najpierw do cięciw PQ i QB, a potem do dalszych. Na mocy lematu Eudoksosa, wyjmując z odcinka paraboli kolejno wspomniane trójkąty, wyczerpiemy odcinek APB co do pola.

Pokażemy, że ze wspomnianych trójkątów da się złożyć figurę o polu równym $\frac{4}{3}$ pola trójkąta APB.

W tym celu skorzystamy z własności (2), zauważając, że trójkąt PBQ stanowi $\frac{1}{4}$ trójkąta PMB co do pola. Jeśli więc wielkość pola trójkąta APB oznaczymy przez e, to w następnym kroku postępowania naddatek w postaci trójkąta PBQ

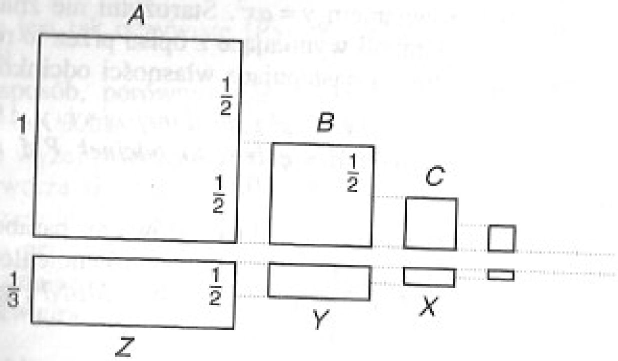


Rys. 10

i odpowiadającego mu trójkąta w lewej części ABP wynosi $e/4$, a w następnym kroku $e/4^2$ etc., co w sumie daje wraz z polem e wielkość równą $4/3$ wielkości e.

Dopuściliśmy się pewnego anachronizmu w zakończeniu rozumowania posługując się gotowym wzorem $1/4 + (1/4)^2 + (1/4)^3 + \ldots = 1/3$ na sumę postępu geometrycznego.

Oto jak Archimedes [8] radził sobie z tym sumowaniem.



Rys. 11. $1 + 1/4 + (1/4)^2 + \ldots = 4/3$ według Archimedesa.

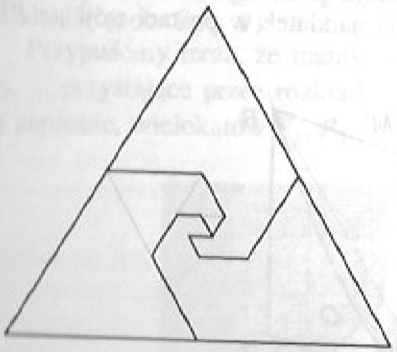
Rozważmy wielkości A, B, C ..., z których każda jest czterokrotnie większa od następnej, oraz wielkości Z, Y, X, ... takie, że $Z = A/3$, $Y = B/3$, $X = C/3$, ... (Rys. 11). Mamy $Y + X + \ldots = 1/3\,(B + C + \ldots)$.

Mamy $B + Y = A/3$, $C + X = B/3$, ..., skąd po dodaniu stronami dostajemy

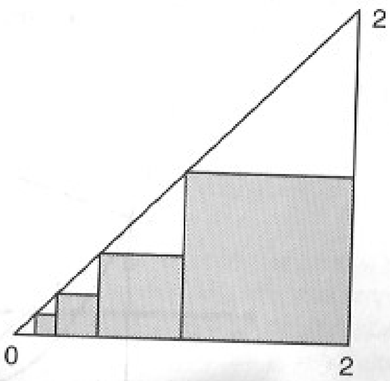
$$(B + C + \ldots) + (Y + X + \ldots) = 1/3\,(A + B + \ldots)\,.$$

Stąd, $4/3\,(B + C + \ldots) = 1/3\,(B + C + \ldots) + A/3$, a więc $B + C + \ldots = A/3$; w rezultacie,

$$A + B + C + \ldots = 4A/3\,.$$



Rys. 12. $1/4 + (1/4)^2 + \ldots = 1/3$; Gardner [9].

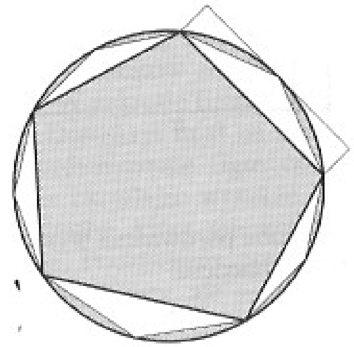


Rys. 13. $1 + 1/4 + (1/4)^2 + \ldots = 4/3$; mniej wyszukany sposób, dający dla odcinka paraboli figurę Q (kwadraty zaciemnione) wspomnianą w opisie metody wyczerpywania.

∽

Koło można wyczerpać wielokątami.

Wpiszmy w tym celu w koło wielokąt K_0. Nie pokryta przez K_0 pozostałość składa się z odcinków koła. W każdy z tych odcinków wpiszemy trójkąt równoramienny, którego podstawą jest bok wielokąta K_0, z wierzchołkiem na kole (Rys. 14). Wycięliśmy w ten sposób więcej niż połowę odcinka, co wynika stąd, że trójkąt ten jest co do pola połową prostokąta zawierającego ten odcinek (bokami prostokąta są bok wielokąta i odcinek stycznej do koła w wierzchołku trójkąta). Sumę tak odciętych trójkątów oznaczmy przez K_1. Z pozostałością, która również składa się z odcinków koła, postępujemy w ten sam sposób; figura K_{n+1} wycina z nie pokrytej przez figury K_0, ..., K_n części koła więcej niż jej połowę co do pola.



Rys. 14

Gdybyśmy mogli znaleźć wielokąt i wyczerpać ten wielokąt ciągiem wielokątów (figur) L_0, L_1, ... , przystających przez rozkład do odpowiednich figur K_0, K_1, ... (L_n odpowiada figurze K_n) — tak jak się to nam udało w przypadku paraboli — mielibyśmy otwartą drogę ku kwadraturze koła.

∽

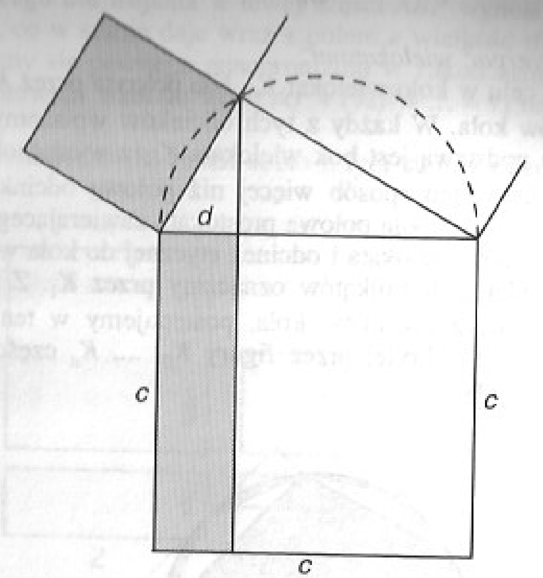
Znalezienie dla danej figury kwadratu równego jej co do pola nazywa się *kwadraturą* tej figury.

Wystarczy znaleźć wielokąt, bo ten jest równy co do pola prostokątowi, a prostokąt można zamienić na kwadrat równy co do pola w pewien dobrze znany sposób.

Dane są odcinki c i d. Zbudujemy trójkąt prostokątny o przeciwprostokątni c, którego wysokość odcina na c odcinek d. Konstrukcja jest wykonalna cyrklem i linijką: wystarczy ze środka odcinka c zakreślić koło, którego średnicą jest c. Trójkąt jest wyznaczony przez przecięcie koła z prostopadłą do c wystawioną z końca odcinka d; p. Rys. 15.

Prostokąt o bokach c i d jest równy co do pola kwadratowi zbudowanemu na przyprostokątni trójkąta rzutującej się na d.

Porównanie co do pola daje się przeprowadzić przystawaniem przez rozkład,



Rys. 15

ale doprowadzenie do tego sposobu porównania wymaga na ogół nieefektywnego środka, jakim jest postulat Archimedesa.

ᔓ

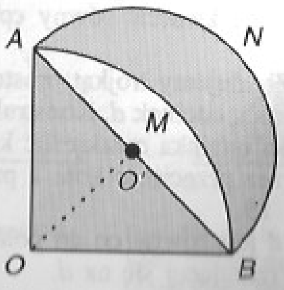
Nieobojętne są środki użyte do konstrukcji kwadratu. Jeśli konstrukcja jest wykonalna za pomocą cyrkla i linijki, to jest to *kwadratura w sensie klasycznym* — platońskim.

W ten sposób rozumiano zawsze to, co przyjęło nazwę *kwadratury koła*. Kwadratura koła okazała się — ale stało się to wiadome dopiero w dziewiętnastym stuleciu — niewykonalna **[10]**.

Starożytni mogli mieć początkowo pewne nadzieje.

Hipokrates z Chios, żyjący w V wieku p.n.e., Pitagorejczyk, wskazał na pewne figury ograniczone liniami krzywymi, które są równe co do pola wielokątom. Były to słynne *księżyce Hipokratesa*.

Zobaczmy najprostszy z nich (Rys. 16).



Rys. 16

Kwadrant *OAMB* koła jest równy co do pola połówce *ANB* koła zbudowanego na cięciwie zamykającej kwadrant. Wynika to stąd, że pola kół mają się do siebie jak kwadraty ich promieni, a kwadraty zbudowane na tych promieniach, tj. na *OB* i na *O'B*, mają się do siebie jak 2 : 1. Po odjęciu odcinka *ABM* kwadrantu od obu równych co do pola figur *OAMB* i *ANB*, pozostaną trójkąt *OAB* i księżyc *AMBN*. Trójkąt i księżyc są więc równe co do pola, na zasadzie porównywania pól przez dopełnienie.

Dowód miał istotną lukę. To, że proporcja pól kół jest taka jak proporcja kwadratów ich promieni, jest twierdzeniem. Ale w czasach Hipokratesa nie znano dowodu. Nie znano także ściślejszego rozumienia proporcji wielkości geometrycznych.

ᔓ

Prównywanie figur co do pola nie wymagało liczb. Nie pytamy, jak wielkie jest pole. Pytamy się jedynie, czy figury są równe co do pola. Ten zwrot „równe co do pola" ma w zakresie wielokątów znaczenie przystawania przez rozkład (na skończenie wiele części). W zakresie figur krzywoliniowych trzeba się uciec do metody wyczerpywania. Demokryt miał na myśli jeszcze bardziej liberalne kryteria. Sprowadziliśmy porównywanie figur co do pola do *porównywania odcinków co do długości*, nie określając wszakże, czym mogłaby być długość. Nie wprowadzamy pojęcia liczby, która mierzyłaby wielkości ciągłe, chociaż pojęcie to jest w zasięgu ręki. Podziwiamy powściągliwość Greków w pójściu o ten jeden — wydawałoby się prosty, ale — co nam wiadomo — jakże niebezpieczny, krok dalej.

Przypisy

[1] Stanisław Mackiewicz *Muchy chodzą po mózgu*, Kraków 1957; oczywiście Mackiewicz nie miał na myśli matematyki, lecz sztukę.

[2] Jeżeli zrezygnować w powyższym rozkładzie z wielokątów, zastępując je dowolnymi zbiorami, to okazuje się, że koło można rozbić na skończenie wiele części tak, aby można z nich było ułożyć kwadrat o polu równym mu liczbowo. Możliwość takiego rozkładu udowodnił niedawno (1988) Miklós Laczkovich. Nie można w ten sposób wszakże złożyć z danego koła dwu różnych kwadratów (Stefan Banach, 1923).

W przestrzeni trówymiarowej sytuacja jest nieoczekiwana. Kulę można rozbić na skończenie wiele części, tak by można z nich było złożyć sześcian o dowolnej objętości. Jest to tzw. *Paradoks Banacha–Tarskiego*, odkryty w 1924. (Red.)

O przystawaniu (równoważności) zbiorów przez rozkład, zob. *Wstęp do teorii mnogości i topologii* Wacława Sierpińskiego, Warszawa 1947, s. 107–112.

[3] Dowód można znaleźć m. in. w książce G. W. Bołtianskiego *Tret'ja problema Gilberta*, Moskwa 1977, s. 47 i dalsze, oraz w książce Bogomołowa (loco cit.), s. 227.

[4] *Elementy*, ks. I, L 32; wyd. niem. (loco cit.), s. 28.

[5] Zydler loco cit., s. 121 nazywa to aksjomatem de Zolta.

[6] Archimedes *Kwadratura paraboli*; Archimied, *Soczinienija*, Moskwa 1962; s. 77–94.

[7] Apoloniusz z Pergi (262–200 p.n.e.). Metoda współrzędnych jest *implicite* obecna w jego teorii stożkowych.