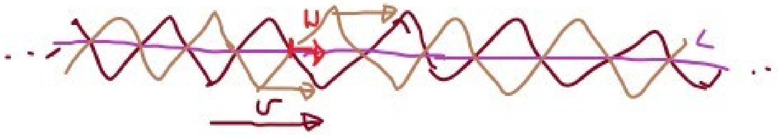
Def. Zbiór symetrii figury F na płaszczyźnie to zbiór wszystkich izometrii T płaszczyzny t. że $T(F)=F$.

$R_s^{90°}$ jest symetrią kwadratu



translacja T_v jest symetrią tego zygzaka

$T_w \circ S_L$ – to sym. z pośl. jest symetrią zygzaka

OBSERWACJA.

zbiór $S(F)$ symetrii dowolnej figury F

(0) zawiera izometrię tożsamościową

(1) $S(F)$ jest zamknięty na odwrotność; jeśli $T(F)=F$ to $T^{-1}(F)=F$

$$T \in S(F) \Rightarrow T^{-1} \in S(F)$$

(2) $S(F)$ — " — składanie; jeśli $T_1(F)=F$, $T_2(F)=F$

to $T_2 \circ T_1(F) = T_2(T_1(F)) = T_2(F) = F$

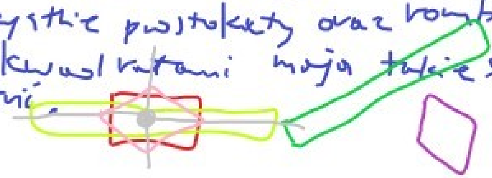
Def. Grupa izometrii płaszczyzny to dowolny zbiór izometrii zawierający tożsamość oraz zamknięty na odwrotność i składanie.

PRZYKŁADY. Zbiór symetrii dowolnej figury F jest grupą izometrii (tzw. grupa symetrii figury).

UWAGA. Grupa izometrii z działaniem składania jest przykładem grupy (z algebry).
- łączność – zachodzi dla składania przekształceń
- element neutralny – tożsamość
- elementy odwrotne – przekszt. odwrotne

Def. Dwie figury F_1, F_2 mają taką samą grupę symetrii, gdy istnieje figura $F_2' \cong F_2$ taka, że $S(F_1) = S(F_2')$.

PRZYKŁAD. Wszystkie prostokąty oraz romby nie będące kwadratami mają takie same grupy symetrii.



PROBLEMY dotyczące grup izometrii:

- Czy każda abstrakcyjna grupa izometrii jest grupą symetrii pewnej figury?
- jak mogą wyglądać grupy symetrii figur — KLASYFIKACJA.

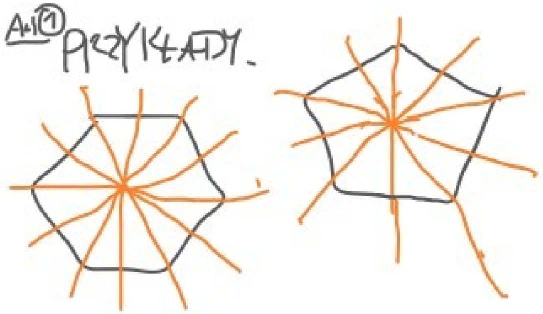
KLASYFIKACJE:

(1) grup skończonych

(2) grupy symetrii szlaków

(3) grupy symetrii wzorów płaskich (parkietaże, mozaiki)

Ad (1) PRZYKŁADY.

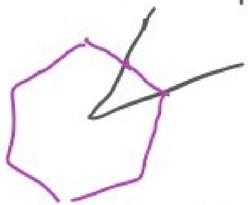


n-kąt foremny

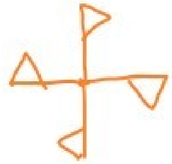
- n symetrii osiowych (odbić)
- n obrotów (wokół środka) o wielokrotności kąta $\frac{360}{n}$ [w tym tożsamość]

S(n-kąt foremny) $= \{$n odbić + n obrotów$\}$ – skończona grupa izometrii

D_n – grupa dyhedralna [dwuścienna]



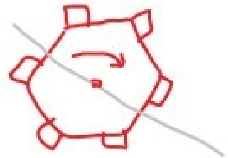
F_4



(2) grupa obrotów C_n

$C_n = \{$obroty wokół ustalonego punktu S o wielokrotności kąta $360/n$ – łącznie z tożsamością$\}$

$$= \{Id, R_S^{360/n}, R_S^{2\cdot\frac{360}{n}}, \ldots, R_S^{(n-1)\cdot\frac{360}{n}}\}$$

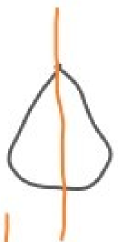


TW. (Leonardo da Vinci)

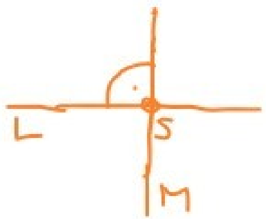
Jedyne skończone grupy izometrii płaszczyzny to grupy C_n i D_n $n \geq 1$.

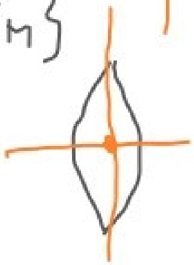
UWAGA. $C_1 = \{id\}$

$D_1 = \{id, \text{jedno odbicie}\}$

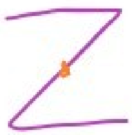


$D_2 = \{id, R_S^{180}, S_L, S_M\}$





$C_2 = \{id, R_S^{180}\}$



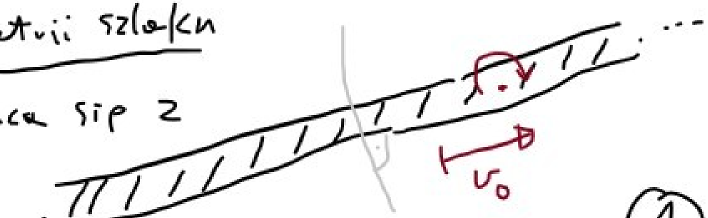
SZKIC DOWODU:

Niech G będzie skończoną grupą izometrii.

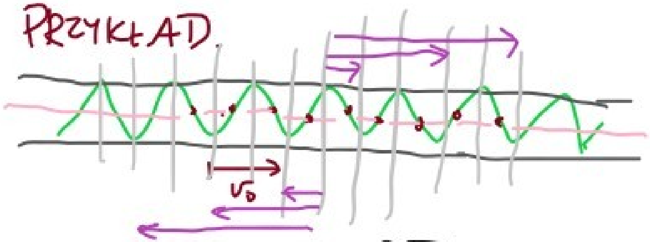
* G nie zawiera translacji ani symetrii z poślizgiem
  (bo składając translację ze sobą otrzymujemy ∞ wiele translacji)
  (bo złożenie symetrii z pośl. z samą sobą daje translację)
* obroty wyłącznie o kąty współmierne z 360°.
* G nie może zawierać 2 obrotów o ten sam kąt względem różnych punktów — bo złożenie $R_1 \circ R_2^{-1}$ jest translacją.
* G nie może zawierać 2 obrotów wokół różnych punktów
  (bo złożenia $R_1 \circ R_2$ i $R_2 R_1$ są obrotami o ten sam kąt wokół różnych punktów).
* WNIOSEK. Wszystkie obroty w G są obrotami wokół tego samego punktu.
* G nie może zawierać obrotu oraz odbicia o osi nieprzechodzącej przez środek tego obrotu (bo złożenie takiego obrotu i odbicia jest symetrią z poślizgiem).

Def. Grupa symetrii szlaku

• grupa składająca się z symetrii pasa taka, że translacje zawarte w tej grupie to translacje o całkowite wielokrotności $k\cdot\vec{v_0} : k\in\mathbb{Z}$ ustalonego wektora $\vec{v_0}$.



PRZYKŁAD.



$G = S(\text{zygzak}) = \{ T_{k\vec{v_0}} : k\in\mathbb{Z}$

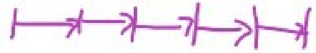
odbicia „pionowe"

półobroty

symetrie z poślizgiem

TWIERDZENIE. Jest 7 typów grup symetrii szlaków:

1. same translacje: $G=\{T_{k\vec{v_0}} : k\in\mathbb{Z}\}$.



....PPPPPP....

2.

YYYYY

3.

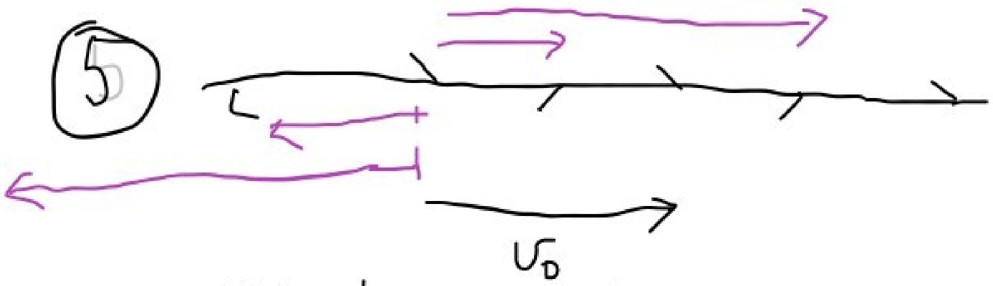
(półobroty)

ZZZZZZ

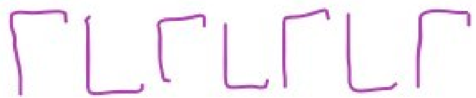
4.

~~EEEEE~~

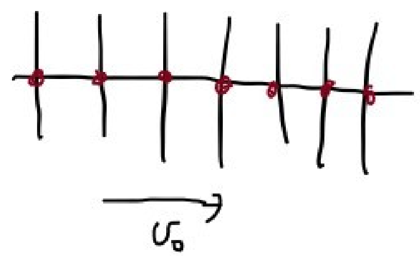
5

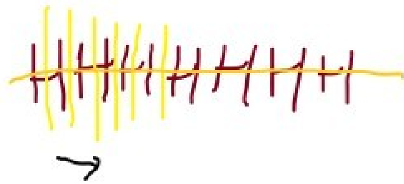


symetrie z poślizgiem
o osi L.
o wektorach poślizgu
nieparzyste wielokrotności $\frac{v_0}{2}$



7





6