Wzór Eulera dla wielościanów

Moim rozważaniom patronują dwaj myśliciele :

pierwszy – Leonard Euler – Szwajcar uważany za jednego z najwybitniejszych matematyków wszechczasów, żyjący i działający w Petersburgu i Berlinie w epoce oświeceniowej, koniec XVIII w, przejazdem bawiąc w Warszawie był gościem króla Stanisława Augusta na jednym z obiadów czwartkowych.

drugi – George Polya – amerykański matematyk węgierskiego pochodzenia działający w latach 30, 40 i 50-tych XX wieku twórca dziedziny wiedzy zwanej heurystyka – tzn. teorii dokonywania odkryć.

W niedawno wydanej książce Davis Hersha „Świat matematyki" jego heurystycznym rozważaniom poświęcony jest osobny rozdział

Na język polski przetłumaczone są 2 jego książki :

„Jak to rozwiązać"

„Odkrycie matematyczne".

Rozważania, które przedstawię, do których pretekstem będzie formuła Eulera dla wielościanów, są oparte oparte na pomysłach i poglądach George'a Polyi.

Zacznę jednak od zacytowania uwagi, jaką poczynił z górą już 200 lat temu na interesujący nas temat Euler.

Wydaje się paradoksalnym przypisywać jakąś rolę obserwacjom w tej części nauki którą zwykle nazywa się matematyką czystą.. Istnieje przecież rozpowszechniony pogląd, że obserwacje dotyczyć mogą wyłącznie obiektów fizycznych, które oddziaływają potoś na nasze zmysły. Skoro więc pojęcie liczby odnosi się raczej do czystego rozumu niż zmysłów, z trudem można sobie wyobrazić by obserwacja i eksperyment odgrywały jakąś rolę w badaniu własności liczb.

Jednakże w rzeczywistości, prawa dotyczące liczb znane obecnie, w większości były odkryte metodą obserwacji, i sformułowane na długo wcześniej niż w końcu ktoś znalazł ich ścisłe uzasadnienie. Istnieje też sporo własności liczb, które ~~są~~ choć są znane, nie zostały jeszcze do końca udowodnione – tylko obserwacje doprowadziły ~~nas~~ do ich poznania.

Oczywiście taki rodzaj poznania, który potwierdziło się tylko obserwacjami, i nie zostało jeszcze udowodnione, należy starannie odróżniać od poznania istotnego. Ten rodzaj poznania, i sposobu dochodzenia do niego, określamy mianem indukcji.

Zdarzały się ~~[illegible]~~ przypadki, kiedy taka prosta indukcja doprowadzała do stwierdzeń błędnych. Dlatego powinniśmy być bardzo ostrożni, żeby nie przyjmować za istotne takich własności liczb, które odkryte były za pomocą obserwacji, i które potwierdzone były tylko i wyłącznie ~~przez~~ indukcją. Takie własności są cennym pomocniczym materiałem badawczym: możemy starać się albo je udowodnić, albo obalić, i w ~~obydwu~~ każdym z tych ~~[illegible]~~ przypadków odniesiemy jakiś pożytek.

/Leonard Euler/ Uważany za jednego z największych matematyków,

PUNKT WYJŚCIA:

ogromna mnogość różnorodnych wielościanów

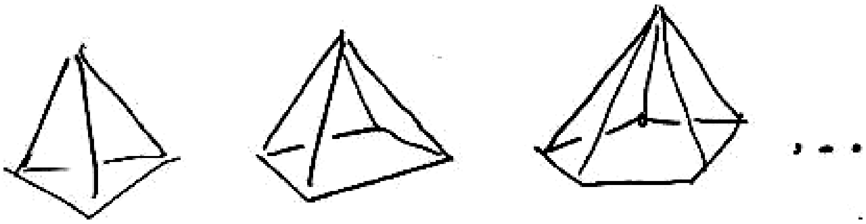
Podstawowe parametry wielościanów:

- liczba ścian S
- liczba wierzchołków W
- liczba krawędzi K

OGÓLNY PROBLEM:

czy istnieją jakieś generalne „prawa" dotyczące związków i zależności pomiędzy liczbami S, W, K w wielościanach?

Rozpatrzmy pierwsze przykłady



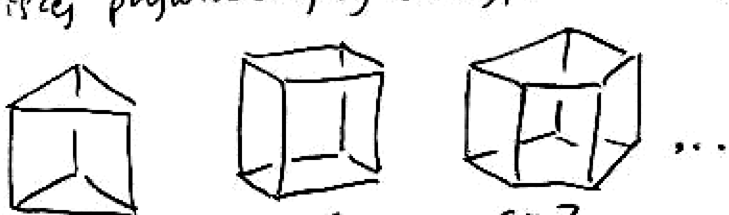
ostrosłupy o podstawie n-kątnej

$S=4$	$S=5$	$S=6$
$W=4$	$W=5$	$W=6$
$K=6$	$K=8$	$K=10$

HIPOTEZA: im więcej wielościan ma ścian, tym więcej ma wierzchołków i krawędzi ($S_1 > S_2 \Rightarrow W_1 > W_2$ oraz $K_1 > K_2$).

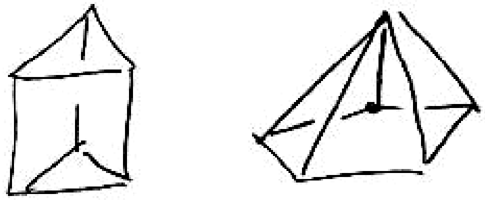
Więcej przykładów, by zweryfikować wiarygodność HIPOTEZY:

graniastosłupy o podstawie n-kątnej



$S=5$	$S=6$	$S=7$
$W=6$	$W=8$	$W=10$
$K=9$	$K=12$	$K=15$

HIPOTEZA nie w pełni działa :



$S_1 = 5$ $S_2 = 6$

a pomimo to

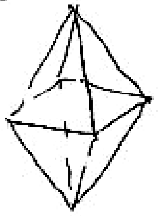
$W_1 = 6$, $W_2 = 6$

więc nie zachodzi: $W_1 < W_2$

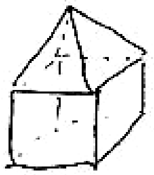
Może zatem skorygować HIPOTEZĘ :

$$S_1 < S_2 \Longrightarrow W_1 \le W_2$$

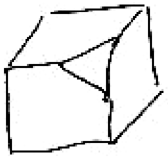
Przykłady które dobraliśmy należą wyłącznie do ostrosłupów i graniastosłupów. Rozważmy jeszcze inne przykłady!



$s = 8$
$w = 6$
$k = 12$



$s = 9$
$w = 9$
$k = 16$



$s = 7$
$w = 10$
$k = 15$

Tabelka (wg wzrastającej liczby ścian):

wielościan	S	W	K
czworościan	4	4	6
~~graniastosłup trójkątny~~ ostrosłup czworokątny	5	5	8
graniastosłup trójkątny	5	6	9
ostrosłup ~~czworokątny~~ pięciokątny	6	6	10
sześcian	6	8	12
sześcian ścięty	7	10	15
ośmiościan	8	6	12
~~graniastosłup 6-kątny~~	~~8~~	~~12~~	~~18~~
wieża	9	9	16

Widać że w pierwotnej wersji nic z naszego prawa nie zostało.

Czy jest nadzieja na jakieś prawo? A może

5. Liczba krawędzi jest większa niż liczba ścian.
6. Liczba krawędzi jest większa niż liczba wierzchołków.

Te prawa są łatwe do uzasadnienia:

$K \geq 3 \cdot S/2$ i równość zachodzi tylko gdy wszystkie ściany są trójkątne, np. czworościan, ośmiościan.

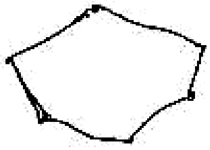
$K \geq 3 \cdot W/2$ i równość tylko gdy z każdego wierzchołka wychodzą dokładnie 3 krawędzie:

np. — czworościan, sześcian, sześcian ścięty

Czy jest nadzieja na znalezienie bardziej ścisłego prawa wiążącego ze sobą ilości ścian, wierzchołków i krawędzi?

Skłania nas do tego np. analogia z przypadkiem 2-wymiarowym

2 wymiarowe analogie – wieloboki



$W = K$ wielobok ~ wielokąt

Przyjrzyjmy się raz jeszcze danym z naszej tabelki:

~~Krawędzi~~ jest najwięcej, prawie tyle co wierzchołków i ścian w sumie...

A może:

(*) 6. $K = S + W - 2$?

Zn: – jest to jakaś analogia z przypadkiem wieloboku

– inne hipotezy (te które nie były ogólne i łatwe, pod niewinności) szybko się zweryfikowały negatywnie.

Jest więc pewna szansa że wykryliśmy jakieś prawo!

Zacytujmy w tym miejscu opinię George Polyi o którym wspomniałem na wstępie.

W życiu codziennym często ulegamy iluzjom.

Nie mamy odwagi (lub chęci lub interesu) weryfikować różnego rodzaju przekonań, bo boimy się naruszenia naszej równowagi duchowej.

Być może w pewnych sytuacjach trzymanie się iluzji jest podejściem rozumnym, w nauce jednak dobre jest trzymać się <u>podejścia indukcyjnego.</u>

Podejście to ma na celu przystosowanie przekonań do obserwacji i faktów w tak ścisłym stopniu jak to tylko możliwe.

Wymaga ono nieuprzedzonego spojrzenia na rzeczywistość.

Wymaga gotowości przechodzenia od obserwacji do uogólnień, i odwrotnie, od stwierdzeń najogólniejszych do najbardziej bezpośrednich konkretów.

Wymaga posługiwania się powiedzeniami „być może" i „możliwe" z tysiącem różnych odcieni.

Szczególnie zaś wymaga następujących trzech rzeczy:

1. ~~Powinno być się gotowym~~ gotowość do zmiany zweryfikować każde ze swoich przekonań.
2. ~~Powinno się zmienić~~ zdolność do zmiany przekonanie, jeśli zachodzą potężne poważne okoliczności ~~wymagające~~ uzasadniające takiej zmiany.
3. ~~Nie powinno się zmieniać przekonania~~ rozwagę i niepochopność przy zmienianiu przekonania, by nie robić tego w sposób dowolny, bez dostatecznego umotywowania.

Choć zasady te brzmią jak truizmy, potrzeba nie lada cech charakteru, by im się podporządkować.

1. Wymaga to odwagi umysłu, by być gotowym zmienić przekonanie (postawić nową hipotezę). Galileusz, rzucający wyzwanie swoim współczesnym i autorytetowi samego Arystotelesa, może być uznany za patrona tej cechy charakteru.
2. Wymaga to uczciwości. Pozostawanie przy przekonaniu któremu przeczą fakty, tylko dlatego że jest to MOJE przekonanie, byłoby nieuczciwe.
3. Wymaga rozumnej ~~powściągliwości~~ konsekwencji. Zmieniać przekonanie bez poważnego namysłu np. z powodu mody, nie byłoby rozumne.

/G. Polya/

Mając na uwadze wypowiedź Polyi, nie przywiązujmy się zbyt bardzo do wykrytej przez nas zależności, gdyż może się ona wogóle nie potwierdzić na innych przykładach.
Sprawdźmy rzetelniej nasze przypuszczenie. Ale jak?

Pierwsze nasuwa się by rozważyć nowe przykłady:

dwudziestościan Platoński $S=20$, $W=12$, $K=30$, ok.

czternastościan półforemny $S=14$, $W=12$, $K=24$ ok.

Potwierdzanie na nowych przykładach zaczyna być nieco jałowe.
Ile przykładów potrzeba byśmy nabrali pewności?

A gdyby tak rozważyć
nieskończone serie przykładów!

ostrosłupy n-kątne $S=n+1$, $W=n+1$, $K=2n$ ok!

graniastosłupy n-kątne $S=n+2$, $W=2n$, $K=3n$ ok!

podwójne ostrosłupy ....

graniastosłupy skręcone ....

⋮ przeciwstożki

Jeżeli nie możemy znaleźć kontrprzykładu, to może inaczej spróbujemy „podstawić haka" wzorowi (✳):

Załóżmy że pewien wielościan spełnia formułę (✳).
Czy będzie ją dalej spełniał gdy:
(a) obetniemy mu narożę;
(b) do jednej ze ścian dokleimy mu piramidkę;
(c) rozetniemy go płaszczyzną na pół;
(d) skleimy dwa takie wielościany wzdłuż pary przystających ścian;

Przeliczmy co się dzieje w punkcie (a)

$$S, W, K \longmapsto S', W', K'$$

zakładamy $K = S+W-2$

$$S' = S+1, \quad W' = W+2, \quad K' = K+3$$

widać że $\boxed{K' = S' + W' - 2}$

więc formuła (*) jest dalej spełniona.

Pozostawiam słuchaczom sprawdzenie co się dzieje pod wpływem pozostałych operacji.

Postępujemy tutaj trochę jak badacze-doświadczalnicy. Weryfikujemy hipotezy na zgromadzonym uprzednio bogatym i reprezentatywnym materiale.

Jednakże jest moment, kiedy drogi badacza-doświadczalnika i matematyka rozchodzą się. O ile doświadczalnik w pewnym momencie uznaje hipotezę za zweryfikowaną, o tyle nie może tego na podstawie samych tylko obserwacji uczynić matematyk. Dla matematyka prawo dotyczące obiektów matematycznych zostaje ustanowione dopiero wtedy, gdy jest ono udowodnione.

Tę część rozważań chciałbym zakończyć cytatem z G. Polya:

„Jeśli masz udowodnić jakieś twierdzenie – nie wpadaj w panikę. Przede wszystkim postaraj się w pełni zrozumieć co mówi to twierdzenie, jasno zobaczyć co ono oznacza. Później skontroluj to twierdzenie, bo może się ono okazać nieprawdziwym. Przejrzyj jego konsekwencje, rozważ je w tylu przypadkach szczególnych, ile potrzeba by nabrać przekonania że jest ono prawdziwe. Kiedy już jesteś przekonany o jego prawdziwości wtedy przystąp do jego dowodzenia." /G. Polya/

Pomiędzy myśleniem potocznym, a podejściem badacza jest wiele podobieństw. Fakty stojące w zgodzie z jakimś poglądem zwiększają zaufanie do tego poglądu, zaś fakty przeczące zmniejszają, lub też powodują odrzucenie poglądu.

Jest jednak że pewna delikatna różnica:

W myśleniu potocznym ludzie wolą dostrzegać fakty potwierdzające ich poglądy

Badacz naukowy jest za to bardzo uważny na fakty które jakiś pogląd mogłyby zweryfikować.

Przyczyna tego jest taka:

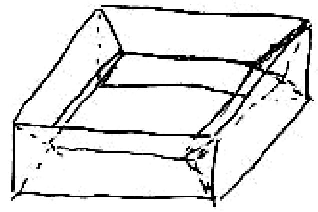
1. fakt przeczący jakiejś hipotezie rozstrzyga jej nieprawdziwość. fakt potwierdzający niczego nie rozstrzyga, ma więc mniejszą moc, a naukowy lubi rozstrzygać problemy definitywnie
2. Skonfrontowanie hipotezy z faktem który silnie grozi tym, że hipotezy nie potwierdzi — bardzo wzmacnia wartość tej hipotezy, gdy ostatecznie okaże się być z nią w zgodzie. Stąd poszukiwanie tych groźnych faktów, celowe „podstawianie haków”.
3. Rozwinięcie trudnego przykładu, który grozi obaleniem hipotezy, bardzo często przybliża do uzyskania dowodu. Ostatecznie prawdziwy dowód musi odznaczać się taką siłą, by rozproszyć wątpliwości nawet w takich groźnych przykładach. W nich więc tkwią wskazówki do takiego dowodu, zaś unikanie takich trudnych przykładów jest oddalaniem się od uzyskania dowodu.

Nasze haki z [illegible] wraz z dociekaniem prawdy sugerują np. pewną próbę dowodu: gdyby każdy wielokąt można było uzyskać np. z [illegible] przez stosowanie tych operacji, to wszystko byłoby OK!!

Chciałbym jednak na tym etapie poddać naszą hipotezę (*) naprawdę trudnej próbie.

Będzie to musiało być coś całkowicie nowego, bo wydaje się że nic zwykłego nie jest w stanie poważnie nią zachwiać.

„rama obrazu"



$S = 12$
$W = 12$
$K = 24$

$K \neq W + S - 2$!

Ten przykład jest rzeczywiście inny. Nie da się go uzyskać z poprzednich przez operacje doklejania piramidy lub obcinania narożna!

Co my na to?!

Powierzchnia tego wielościanu nie jest sferą, lecz raczej torusem.

Różni się od sfery następującą własnością:

po rozcięciu wzdłuż dowolnej krzywej sfera rozpada się na dwie części

Nie jest to prawdą dla torusa

Nawet dwóch krzywych może nie wystarczyć!

Dopiero wzięcie trzech krzywych gwarantuje rozspojenie torusa!

Dlatego mówimy że rzędem spójności sfery jest liczba $h=1$

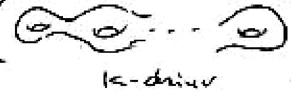
zaś rzędem spójności torusa jest liczba $h=3$

Jeśli w chwili zobaczenia takiego przykładu nie poddamy się, to po pierwsze mamy szansę na uściślenie założeń na wielościany przy których spodziewamy się że zachodzi (*). Byłoby to założenie o „spójności" brzegu wielościanu.

Uzyskujemy jednak także szansę na coś znacznie lepszego, na uogólnienie wzoru (*) na przypadek dowolnych wielościanów. Rozważenie wielościanów typu  pozwala sformułować na hipotezę tak:

$$K = S + W + h - 3,$$

gdzie h jest rzędem spójności brzegu wielościanu.

(Np $h($  $) = 5$, $h($  $) = 2k+1$.

k-dziur

Morał:

nie załamywać się kontrprzykładami, tylko obracać je na swoją korzyść – uściślać założenia lub

– uogólniać hipotezę na szerszą klasę obiektów.