KONSTRUKCJE GEOMETRYCZNE I ELEMENTY TEORII GALOIS
LISTA 9. AUTOMORFIZMY CIAŁ i GRUPY GALOIS

Automorfizmy ciał

1. Pokaż, że liczba $i\sqrt{2}$ jest pierwiastkiem kwadratowym z pewnej liczby wymiernej, i rozważ rozszerzenie kwadratowe $Q(i\sqrt{2}) = \{a + bi\sqrt{2} : a, b \in Q\}$ ciała Q. Uzasadnij, że odwzorowanie $\sigma : Q(i\sqrt{2}) \to Q(i\sqrt{2})$ określone wzorem $\sigma(a+bi\sqrt{2}) = a-bi\sqrt{2}$ jest automorfizmem ciała $Q(i\sqrt{2})$.
2. Znajdź wszystkie automorfizmy ciała $Q(\sqrt[4]{2})$. Wskazówka: najpierw zbadaj jakie liczby mogą być obrazami liczby $\sqrt[4]{2}$ przez automorfizmy ciała $Q(\sqrt[4]{2})$ (są dwie możliwości); następnie zapisz wzorem wszystkie potencjalne automorfizmy, w formie $\psi(a + b\sqrt[4]{2} + c\sqrt[4]{4} + d\sqrt[4]{8}) = \ldots$; sprawdź, że każdy z tak uzyskanych wzorów rzeczywiście daje automorfizm (sprawdź, że $\psi(x+y) = \psi(x) + \psi(y)$ oraz $\psi(x \cdot y) = \psi(x) \cdot \psi(y)$ dla dowolnych $x, y \in Q(\sqrt[4]{2})$).
3. (a) Liczba zespolona $z_0 = a + bi$ jest pierwiastkiem wielomianu f o wymiernych współczynnikach. Uzasadnij, że wówczas liczba sprzężona $\bar{z}_0 = a - bi$ też jest pierwiastkiem tego wielomianu. Wskazówka: skorzystaj z tego, że $\overline{z + z'} = \bar{z} + \overline{z'}$, $\bar{z}^n = \overline{z^n}$ oraz $\bar{a} = a$ dla $a \in Q$.
   (b) Uzasadnij, że dla dowolnego $f \in Q[x]$ sprzężenie zespolone $\psi(z) = \bar{z}$ jest automorfizmem ciała rozkładu Q_f wielomianu f.

Grupy Galois

4. (a) Uzasadnij, że ciałem rozkładu Q_f wielomianu $f(x) = (x^2-2)(x^2-3) = x^4-5x^2+6$ jest ciało $Q(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} : a, b, c, d \in Q\}$.
   (b) Znajdź wszystkie automorfizmy ciała Q_f z punktu (a) stałe na Q, czyli wszystkie automorfizmy z grupy Galois $\mathrm{Gal}(Q_f/Q)$. Wskazówka: uzasadnij najpierw, że dla dowolnego automorfizmu $\psi \in \mathrm{Gal}(Q_f/Q)$ zachodzą zależności $\psi(\sqrt{2}) = \pm\sqrt{2}$ oraz $\psi(\sqrt{3}) = \pm\sqrt{3}$; wykorzystaj te zależności do zapisania wzorów na wszystkie potencjalne automorfizmy, w formie $\psi(a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + \sqrt{6}) = \ldots$ (cztery możliwści); sprawdź, że każdy z tak uzyskanych wzorów rzeczywiście daje automorfizm (sprawdź, że $\psi(x + y) = \psi(x) + \psi(y)$ oraz $\psi(x \cdot y) = \psi(x) \cdot \psi(y)$).
   (c) Ponumeruj pierwiastki wielomianu f liczbami $1, 2, 3, 4$ i wyznacz permutacje z grupy S_4 odpowiadające temu, jak poszczególne automorfizmy opisane w punkcie (b) permutują te pierwiastki.
   (d) Sprawdź, że grupa $\mathrm{Gal}(Q_f/Q)$ jest abelowa. Sprawdź też, że jest ona (izomorficzna z) grupą czwórkową Kleina.
5. (a) Pokaż, że ciało $Q(\sqrt[3]{2})$ jest ciałem rozkładu wielomianu $x^3 - 2$.
   (b) Uzasadnij, że jedynym automorfizmem ciała $Q(\sqrt[3]{2})$ jest identyczność, więc grupa $\mathrm{Gal}(Q(\sqrt[3]{2})/Q)$ jest jednoelementowa (trywialna). Wskazówka: najpierw uzasadnij, że $\sqrt[3]{2}$ jest elementem stałym dowolnego automorfizmu σ ciała $Q(\sqrt[3]{2})$, a następnie skorzystaj z ogólnej postaci elementów tego ciała.
6. Niech ε_5 będzie pierwotnym pierwiastkiem stopnia 5 z 1.
   (a) Uzasadnij, że każda liczba z ciała $Q(\varepsilon_5)$ jednoznacznie przedstawia się w postaci $a + b\varepsilon_5 + c\varepsilon_5^2 + d\varepsilon_5^3 + e\varepsilon_5^4$, gdzie $a, b, c, d, e \in Q$.
   (2) Wywnioskuj, że ciało $Q(\varepsilon_5)$ jest ciałem rozkładu wielomianu $x^5 - 1$.

(3) Znajdź automorfizm σ ciała $Q(\varepsilon_5)$ taki, że $\sigma(\varepsilon_5) = \varepsilon_5^2$. Wskazówka: znajdź $\sigma(\varepsilon_5^k)$ dla $k = 0, 1, 2, 3, 4$, potem ogólny wzór na σ, i wreszcie uzasadnij że ten wzór określa automorfizm.

(4) Wyznacz permutację zbioru pierwiastków $1, \varepsilon_5, \varepsilon_5^2, \varepsilon_5^3, \varepsilon_5^4$ wielomianu x^5-1 zadaną przez automorfizm σ.

(5) Znajdź pozostałe automorfizmy ciała $Q(\varepsilon_5)$ (wraz z trywialnym jest ich cztery). Uzasadnij, że te cztery automorfizmy tworzą grupę Galois $\mathrm{Gal}(Q(\varepsilon_5)/Q)$. Opisz tę grupę jako grupę permutacji pierwiastków wielomianu $x^5 - 1$, znajdując permutacje zadane przez wszystkie te automorfizmy.

(6) Sprawdź, że grupa $\mathrm{Gal}(Q(\varepsilon_5)/Q)$ jest abelowa, i że jest ona (izomorficzna z) grupą cykliczną Z_4 (oznaczaną też czasem jako C_4).

7. Uzasadnij, że ciałem rozkładu wielomianu $w(x) = (x^2-x-1)(x^2+x-1) = x^4-3x+1$ jest ciało $Q_w = Q(\sqrt{5})$. Uzasadnij, że grupa Galois $\mathrm{Gal}(Q_w/Q)$ składa się z dwóch automorfizmów i znajdź permutacje z grupy S_4 odpowiadające permutacjom czterech pierwiastków wielomianu w zadanym przez te automorfizmy.

8. Uzasadnij, że jeśli wielomian $W \in Q[x]$ jest iloczynem dwóch istotnie różnych (czyli nie będących swoimi wymiernymi krotnościami) wielomianów U i V nierozkładalnych nad Q, to

(a) zbiory pierwiastków wielomianów U i V są rozłączne, i w sumie dają cały zbiór pierwiastków wielomianu W;

(b) grupa Galois wielomianu W permutuje osobno pierwiastki wielomianów U i V.

9. [Wielomian o nieabelowej grupie Galois.]

(a) Niech ε_3 będzie pierwotnym pierwiastkiem stopnia 3 a liczby 1, czyli liczbą zespoloną $\varepsilon_3 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Sprawdź, że $\varepsilon_3^2 + \varepsilon_3 + 1 = 0$ i wywnioskuj, że ε_3 jest liczbą algebraiczną stopnia 2.

(b) Uzasadnij, że zespolone pierwiastki wielomianu $f(x) = x^2 - 2$ to liczby $\sqrt[3]{2}$, $\varepsilon_3\sqrt[3]{2}$ i $\varepsilon_3^2\sqrt[3]{2}$.

(c) Uzasadnij, że ciało rozkładu Q_f wielomianu $f = x^3 - 2$ to ciało $Q(\sqrt[3]{2}, \varepsilon_3)$, i że zbiór $1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}, \varepsilon_3, \varepsilon_3\sqrt[3]{2}, \varepsilon_3\sqrt[3]{4}$ jest bazą rozszerzenia $Q \subset Q_f$.

(d) Uzasadnij, że dla dowolnego automorfizmu $\psi \in \mathrm{Gal}(Q_f/Q)$ zachodzą związki $\psi(\varepsilon_3) \in \{\varepsilon_3, \varepsilon_3^2\}$ oraz $\psi(\sqrt[3]{2}) \in \{\sqrt[3]{2},\ \varepsilon_3\sqrt[3]{2} \text{ i } \varepsilon_3^2\sqrt[3]{2}\}$.

(e) Znajdź wzory potencjalnych sześciu automorfizmów z grupy $\mathrm{Gal}(Q_f/Q)$ w formie $\psi(a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} + d\varepsilon_3 + g\varepsilon_3\sqrt[3]{2} + h\varepsilon_3\sqrt[3]{4}) = \ldots$, dla dowolnej kombinacji z wymiernymi współczynnikami elementów bazowych z punktu (c). Sprawdź, że wszystkie te wzory określają rzeczywiste automorfizmy ciała Q_f.

(f) Znajdź permutacje pierwiastków wilomianu f wyznaczone przez automorfizmy z punktu (e) i sprawdź, że są to wszystkie permutacje z S_3. Wywnioskuj, że grupa $\mathrm{Gal}(Q_f/Q)$ nie jest abelowa.