TWIERDZENIE Jeśli wielomian ~~o wymiernych~~ $a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ o wymiernych współczynnikach nie ma wymiernych pierwiastków, to każdy jego (rzeczywisty) pierwiastek jest liczbą niekonstruowalną.

UWAGA: Założenie o braku pierwiastka wymiernego jest istotne.

Np. wielomian x^3-2x-1 ma pierwiastek wymierny -1.

Dzieląc go przez $x-(-1)$ dostajemy

$$(x^3-2x-1):(x+1) = x^2-x-1$$

Wyliczamy dwa pozostałe pierwiastki tego wielomianu

$$x_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Są one konstruowalne.

W ten sam sposób można wykazać

WNIOSEK. Jeśli wielomian ~~jego~~ stopnia 3 o wymiernych współczynnikach ma pierwiastek wymierny, to i pozostałe jego pierwiastki są liczbami konstruowalnymi.

Do dowodu TWIERDZENIA potrzebny jest następujący

LEMAT (~~wzory~~ wzór Viete'a) Jeśli p_1, p_2, p_3 są pierwiastkami wielomianu $a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ to $p_1+p_2+p_3 = -\frac{a_2}{a_3}$.

p_1, p_2 - pierwiastki wielomianu ax^2+bx+c to $p_1+p_2 = -\frac{b}{a}$

dowód: Wiadomo że jeśli p_1, p_2, p_3 są pierwiastkami to wielomian rozkłada się jako

$$a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0 = a_3(x-p_1)(x-p_2)(x-p_3) =$$

$$= a_3x^3 - a_3(p_1+p_2p_3)x^2 + a_3(p_1p_2+p_1p_3+p_2p_3)x - a_3p_1p_2p_3$$

Stąd $a_2 = -a_3(p_1+p_2p_3)$ czyli $p_1+p_2+p_3 = -\frac{a_2}{a_3}$ □

LEMAT 2. Jeśli wielomian $w(x) = a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ ma dwa różne pierwiastki p_1, p_2 ~~to istnieje liczba p_3, taka że $w(x) = a_3(x-p_1)(x-p_2)(x-p_3)$~~ to liczba p_3 spełniająca wzór Viete'a $p_1+p_2+p_3 = -\frac{a_2}{a_3}$ też jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$.

DOWÓD TWIERDZENIA. (metodą nie wprost).

Załóżmy że ~~przez~~ przynajmniej jeden pierwiastek jest konstruowalny. Dla każdego pierwiastka p rozważmy najkrótszy możliwy ciąg rozszerzeń kwadratowych

$$\mathbb{Q}=F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_K \ni p$$

a następnie rozważmy ten spośród konstruowalnych pierwiastków który ma ten ciąg najkrótszy. (Wtedy żaden pierwiastek nie ~~zawiera się~~ należy do ciała F_{K-1}).

Załóżmy też że $F_K = F_{K-1}(\sqrt{w})$, $w \in F_{K-1}$.

Wtedy $p = x + y\sqrt{w}$, $x, y \in F_{K-1}$.

p jest pierwiastkiem, więc

$$a_3(x+y\sqrt{w})^3 + a_2(x+y\sqrt{w})^2 + a_1(x+y\sqrt{w}) + a_0 = 0$$

$$\underbrace{(a_3x^3 + 3a_3xy^2w + a_2x^2 + a_2y^2w + a_1x + a_0)}_{A} +$$

$$+ \underbrace{(3a_3x^2y + 2a_2xy + a_1y)}_{B}\sqrt{w} = 0$$

Stąd $A = B = 0$.

Zauważmy teraz że liczba $p' = x - y\sqrt{w}$ też jest pierwiastkiem, bo

$$a_3(x-y\sqrt{w})^3 + a_2(x-y\sqrt{w})^2 + a_1(x-y\sqrt{w}) + a_0 =$$

$$= A - B\sqrt{w} = 0$$

Wstawiając $p_1 = x+y\sqrt{w}$, $p_2 = x - y\sqrt{w}$ wyliczamy ze wzoru Viety trzeci pierwiastek p_3: $\quad p_1 + p_2 + p_3 = -\frac{a_2}{a_3}$

$$p_3 = -\frac{a_2}{a_3} - (p_1+p_2) = -\frac{a_2}{a_3} - (x+y\sqrt{w} + x - y\sqrt{w}) = -\frac{a_2}{a_3} - 2x \in F_{K-1}$$

wbrew założeniom. □

JAK POZNAĆ ŻE WIELOMIAN NIE MA PIERWIASTKA WYMIERNEGO?

LEMAT. Jeśli wielomian $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ o współczynnikach całkowitych ma pierwiastek wymierny $\frac{p}{q}$ (w formie nieskracalnej) to p jest dzielnikiem a_0 zaś q jest dzielnikiem a_n.

<u>dowód</u>: $\frac{p}{q}$ jest pierwiastkiem, a więc

$$a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \dots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0 \quad / \cdot q^n$$

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0$$

$$a_n p^n = -q\left(a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1}\right)$$

ponieważ p i q są względnie pierwsze, więc a_n jest podzielne przez q.

Podobnie $a_0 q^n = -p\left(a_n p^{n-1} + \dots + a_1 q^{n-1}\right)$

i stąd p jest dzielnikiem a_0. □

ZASTOSOWANIE. Rozważmy wielomian o współczynnikach wymiernych $4x^3 - 3x - \frac{1}{2}$. Pomnóżmy go przez 2 aby dostać współczynniki całkowite: $8x^3 - 6x - 1$.

(To samo można zrobić z każdym wielomianem o współczynnikach wymiernych!)

Jeśli $\frac{p}{q}$ jest pierwiastkiem, to $p|1$ i $q|8$, więc jedyne możliwości dla $\frac{p}{q}$ to $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}$.

Łatwo sprawdzić, że żadna z tych liczb nie jest pierwiastkiem wielomianu $8x^3 - 6x - 1$.

ZASTOSOWANIA TWIERDZENIA:

(1) Niewykonalność trysekcji kąta 60°.

Przypominamy wyprowadzoną wcześniej zależność:

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

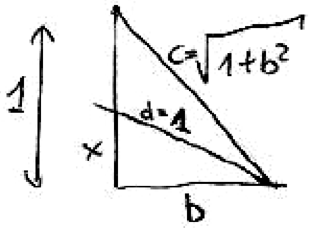
Zastosujemy ją do $3\alpha = 60$

$$\cos 60° = \frac{1}{2} = 4\cos^3(20°) - 3\cos(20°).$$

Trysekcja kąta 60° sprowadza się do konstrukcji kąta 20°, a ta do konstrukcji odcinka długości ~~cos 20~~ $d = 20°$. Ale ta długość d jest pierwiastkiem wielomianu $4x^3 - 3x - \frac{1}{2}$. ~~Sprawdzimy, że~~ ~~łatwo sprawdzić że ten wielomian nie ma pierwiastka~~ Sprawdziliśmy już, że ten wielomian nie ma pierwiastków wymiernych. Stąd konstrukcja kąta 20° jest niewykonalna.

(2) WNIOSKI. Konstrukcja kąta 40° nie jest wykonalna, bo gdyby była, to dzieląc go na pół dostalibyśmy konstrukcję kąta 20°.

Ale konstrukcja wykonalność kąta $40° = \frac{360°}{9}$ jest warunkiem koniecznym i wystarczającym konstruowalności 9-kąta foremnego. Stąd konstrukcja 9-kąta foremnego jest niewykonalna cyrklem i linijką.



Skonstruuję trójkąt prostokątny którego jedna przyprostokątna ma długość 1 oraz dwusieczna opuszczona na tę przyprostokątną ma również długość 1.

$x = \sqrt{1-b^2}$

Dla konstrukcji tego trójkąta potrzeba i wystarcza skonstruować drugą przyprostokątną b.

Z ~~twierdzenia~~ własności dwusiecznej otrzymujemy

$$\frac{x}{1-x} = \frac{b}{c} \qquad \text{czyli}$$

$$\frac{\sqrt{1-b^2}}{1-\sqrt{1-b^2}} = \frac{b}{\sqrt{1+b^2}}$$

$$\sqrt{1-b^2}\,\sqrt{1+b^2} = b\cdot\left(1-\sqrt{1-b^2}\right) \qquad / \text{do kwadratu}$$

$$1-b^4 = b^2\left(1-2\sqrt{1-b^2}+1-b^2\right)$$

$$2b^2\sqrt{1-b^2} = 2b^2-1 \qquad / \text{jeszcze raz do kwadratu}$$

$$4b^4(1-b^2) = 4b^4 - 4b^2+1$$

$$4b^4 - 4b^6 = 4b^2-4b^2+1$$

$$0 = 4b^6 - 4b^2 + 1$$

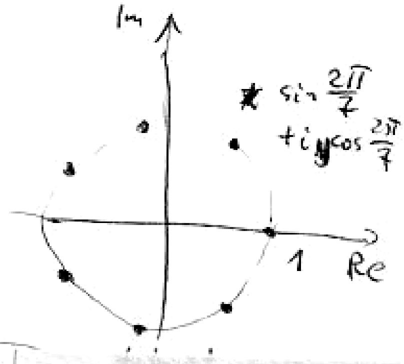
Do skonstruowania odcinka b potrzeba i wystarcza skonstruować odcinek $a = b^2$ który jest pierwiastkiem wielomianu ~~spełnia równanie~~

$$4a^3 - 4a + 1 \;\cancel{=0}\;.$$

Ten wielomian nie ma pierwiastków wymiernych, więc a nie jest konstruowalne. Stąd b też nie jest, a i cały trójkąt nie jest konstruowalny. □

(3) Niewykonalność konstrukcji 7-kąta foremnego

Zastosujemy liczby zespolone.



Na płaszczyźnie zespolonej wierzchołki 7-kąta foremnego dane są jako pierwiastki 7-go stopnia z 1, a więc jako pierwiastki ~~równania~~ wielomianu $z^7 - 1$.

Podzielmy $\frac{z^7-1}{z-1} = z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$

Podzielmy to wyrażenie przez z^3 dostajemy równanie

$$(*) \qquad z^3 + \frac{1}{z^3} + z^2 + \frac{1}{z^2} + z + \frac{1}{z} + 1 = 0$$

Spróbujmy lewą stronę wyrazić w terminach wyrażenia $y = z + \frac{1}{z}$

Np. $\left(z+\frac{1}{z}\right)^3 = z^3 + 3z^2\frac{1}{z} + 3z\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} =$

$$= \underline{z^3 + \frac{1}{z^3}} + 3\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

A więc $z^3 + \frac{1}{z^3} = \left(z+\frac{1}{z}\right)^3 - 3\left(z+\frac{1}{z}\right)$.

Podobnie $z^2 + \frac{1}{z^2} = \left(z+\frac{1}{z}\right)^2 - 2$.

Po wstawieniu dostajemy

$$\left(z+\frac{1}{z}\right)^3 - 3\left(z+\frac{1}{z}\right) + \left(z+\frac{1}{z}\right)^2 - 2 + \left(z+\frac{1}{z}\right) + 1 = 0$$

$$y^3 - 3y + y^2 - 2 + y + 1 = 0$$

$$y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0 \qquad \left(y = z + \frac{1}{z}\right)$$

Skoro $z = \sin\frac{2\pi}{7} + i\cos\frac{2\pi}{7}$ jest pierwiastkiem wielomianu $(*)$

więc $y = z + \frac{1}{z} = \left(\sin\frac{2\pi}{7} + i\cos\frac{2\pi}{7}\right) + \left(\sin\frac{2\pi}{7} - i\cos\frac{2\pi}{7}\right) = 2\sin\frac{2\pi}{7}$

jest pierwiastkiem wielomianu $y^3 + y^2 - 2y - 1$!

Konstrukcja 7-kąta jest równoważna konstrukcji odcinka $\sin\frac{2\pi}{7}$ lub odcinka $2\sin\frac{2\pi}{7}$.

Ale wielomian y^3+y^2-2y-1 nie ma pierwiastka wymiernego (bo 1 i -1 nie są jego pierwiastkami!), stąd $2\sin\frac{2\pi}{7}$ jest liczbą niekonstruowalną!

A więc i konstrukcja 7-kąta jest niewykonalna. □

~~Na jednym z kolejnych wykładów udowodnimy następujące uogólnienie:~~

TWIERDZENIE. Załóżmy że wielomian $a_nx^n+\dots+a_1x+a_0$ o współczynnikach wymiernych jest nierozkładalny na iloczyn wielomianów niższego stopnia o współczynnikach wymiernych, oraz że stopień n wielomianu nie jest potęgą liczby 2. Wówczas wszystkie pierwiastki tego wielomianu są liczbami niekonstruowalnymi.

UZUPEŁNIAJĄCE NOTATKI, KTÓRE TAKŻE MOGĄ BYĆ POMOCNE

TWIERDZENIE 2. Niech liczba rzeczywista q będzie rozwiązaniem równania trzeciego stopnia $a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0$ o współczynnikach a_3, a_2, a_1, a_0 wymiernych. Jeśli równanie to nie ma żadnego rozwiązania (pierwiastka) wymiernego to liczba q jest niekonstruowalna.

ZASTOSOWANIE DO PODWOJENIA SZEŚCIANU:

Liczba $a=\sqrt[3]{2}$ jest rozwiązaniem równania

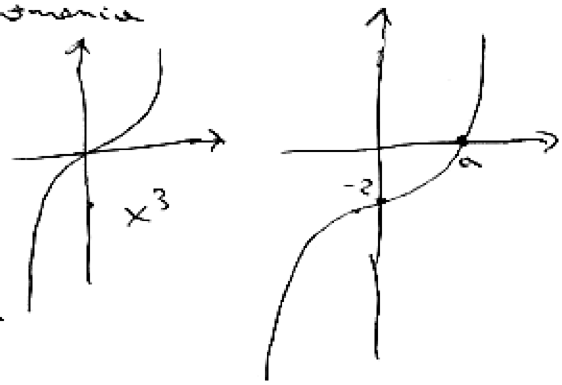
$$x^3-2=0$$

i to jedynym rozwiązaniem.

Liczba ta jest niewymierna.

Równanie nie ma więc pierwiastków wymiernych.

Zatem $a=\sqrt[3]{2}$ jest niekonstruowalne.



ZADANIE. Skonstruuj krawędź sześcianu którego objętość przewyższa sumę długości krawędzi o 9.

$$a^3-12a=9, \quad a^3-12a-9=0$$

istnieje pierwiastek wymierny $a=-3$

$$(a^3-12a-9):(a+3)=a^2-3a-3$$

$$\begin{array}{l} a^3+3a^2 \\ \hline -3a^2-12a-9 \\ -3a^2-9a \\ \hline -3a-9 \end{array}$$

$$a=\frac{3\pm\sqrt{9+12}}{2}=\frac{3+\sqrt{21}}{2}$$

Ponieważ jeden pierwiastek $(a=-3)$ był wymierny, pozostałe pierwiastki są pierwiastkami równania kwadratowego, więc są konstruowalne! Pokazuje to że założenie w twierdzeniu 2 jest istotne!

A jeśli w poprzednim zadaniu 9 zastąpimy przez 8?

$$a^3 - 12a - 8 = 0$$

Jak stwierdzić, że równanie nie ma pierwiastków wymiernych?

PRZYKŁAD. Niewymierność $\sqrt[3]{2} = a$.

$\sqrt[3]{2}$ spełnia równanie $x^3 - 2 = 0$

Sprawdzimy czy ułamek $\frac{p}{q}$ może być pierwiastkiem tego równania

$$\left(\frac{p}{q}\right)^3 - 2 = 0 \qquad \frac{p^3}{q^3} = 2 \qquad p^3 = 2q^3$$

Obie strony rozkładamy na czynniki pierwsze i zastanawiamy się ile razy pojawi się w rozkładzie liczba 2.

Po lewej stronie ilość pojawień jest podzielna przez 3 (może też być 0).

Po prawej, nie jest podzielna przez 3.

Ale rozkłady obu stron muszą być jednakowe, ~~sprzeczność~~.

Sprzeczność dowodzi że żaden ułamek $\frac{p}{q}$ nie może być pierwiastkiem równania $x^3 - 2 = 0$, więc i liczba $\sqrt[3]{2}$ jest niewymierna.

TWIERDZENIE. Jeśli nieskracalny ułamek $\frac{p}{q}$ jest pierwiastkiem równania $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ o współczynnikach całkowitych, to p jest dzielnikiem współczynnika a_0, zaś q współczynnika a_3.

$$a_3\frac{p^3}{q^3} + a_2\frac{p^2}{q^2} + a_1\frac{p}{q} + a_0 = 0 \quad / \cdot q^3$$

$$a_3p^3 + a_2p^2q + a_1pq^2 + a_0q^3 = 0$$

$$a_3p^3 = -q\left(a_2p^2 + a_1pq + a_0q^3\right)$$

wszystkie czynniki pierwsze z rozkładu q muszą pojawić się w a_3!

zatem q jest dzielnikiem a_3

UWAGA. TWIERDZENIE jest prawdziwe także dla równań wyższych stopni.

ZASTOSOWANIA.

$$a^3 - 12a - 8 = 0$$

Jeśli $a = \frac{p}{q}$ to $p | 8$, $q | 1$

czyli $q = \pm 1$ $\quad p = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$

A więc jedyne możliwości to

$$\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8.$$

Sprawdzimy bezpośrednio, że żadna z tych liczb nie jest pierwiastkiem

$$a^3 - 12a = 8$$

$$a(a^2 - 12) = 8$$

$\pm 1 \cdot (-11)$

$\pm 2 \cdot (-8)$

$\pm 4 \cdot (4)$

$\pm 8 \cdot (52)$

Zatem to równanie nie ma pierwiastków wymiernych, a więc konstrukcja takiej krawędzi jest niewykonalna.