PRODUKT WOLNY RODZINY GRUP G_α.

OPIS

- W – zbiór „zredukowanych" słów nad $\bigcup_\alpha G_\alpha$

  $g_1 \cdots g_m$: $g_i \in G_{\alpha_i} \setminus \{1\}$

  $\alpha_{i+1} \neq \alpha_i$ dla $i = 1, \ldots, m-1$

  $m \geq 0$ dowolne

  ($m = 0$ oznacza słowo puste 1)

- operacja mnożenia polegająca na zestawieniu i zredukowaniu:

  zestawienie
  $$(g_1 \cdots g_m)(h_1 \cdots h_n) = g_1 \cdots g_m h_1 \cdots h_n$$

  redukcja:
  - jeśli $h_1 \in G_{\alpha_m}$ to zastępujemy $g_m h_1$ przez jeden symbol $(g_m h_1) \in G_{\alpha_m}$
  - jeśli jednak $g_m h_1 = 1$ w G_{α_m}, to wykreślamy oba symbole $g_m h_1$
  - powtarzamy powyższe aż do skutku

  (jednorazowo procedura na styku zestawianych słów).

- W z operacją mnożenia: ma element neutralny i elementy odwrotne
  Aby wiedzieć, że to grupę – trzeba zweryfikować łączność — monomorfizm

- Łączność operacji mnożenia sprawdzimy zadając w grupę permutacji elementów z W:

  * dla $g \in G_\alpha$ określamy odwzorowanie $L_g : W \to W$ zadane domnożeniem z lewej: $L_g(g_1 \cdots g_m) = g(g_1 \cdots g_m)$.

  * dla $g, g' \in G_\alpha$ mamy $L_{gg'} = L_g L_{g'}$
  Łatwo sprawdzić na dwóch przypadkach 1° $\alpha = \alpha_1$ 2° $\alpha \neq \alpha_1$
  (w przypadku 1° sprowadza się to do łączności w G_α)

  * z powyższej formuły wynika się $L_g L_{g^{-1}} = L_{g^{-1}} L_g = L_1 = \mathrm{id}_W$
  więc $L_{g^{-1}} = (L_g)^{-1}$ i wszystkie te operacje są permutacjami W.

ponadto $g \mapsto L_g$ to injektywny homomorfizm z G_α w grupę $Sym(W)$ permutacji W.

* określmy $L : W \to Sym(W)$ przez

$$L(g_1 \cdots g_n) = L_{g_1} \cdots L_{g_n}$$

Z własności $L_{gg'} = L_g L_{g'}$ dla $g, g' \in G_\alpha$ wynika, że

$$L_{w_1} L_{w_2} = L_{w_1 \cdot w_2} \quad \text{dla } w_1, w_2 \in W$$

* L jest injektywny, bo permutacja $L(g_1 \cdots g_n)$ przeprowadza $1 \in W$ na $g_1 \cdots g_n \in W$

Stąd W izomorficzne z obrazem przez L w $Sym(W)$. ∎

OZN. $\underset{\alpha}{*}\, G_\alpha$.

UWAGI. ⓪ „Zredukowane" słowa z W reprezentujące elementy z $\ast_\alpha G_\alpha$ nazywamy postacią normalną dla elementów z $\ast_\alpha G_\alpha$.

① $\forall \alpha_0 \; G_{\alpha_0} = \{g : g \in G_{\alpha_0}\} \subset \ast_\alpha G_\alpha = W$

grupy G_α kanonicznie zanurzają się w produkt wolny

② $\alpha_1 \neq \alpha_2 \Rightarrow G_{\alpha_1} \cap G_{\alpha_2} = \{1\} \subset \ast G_\alpha$

③ $\ast_\alpha G_\alpha$ jest generowana przez $\bigcup_\alpha G_\alpha$

④ Dla dowolnej rodziny homomorfizmów $h_\alpha : G_\alpha \to H$

$\exists! \, h : \ast_\alpha G_\alpha \to H$ rozszerzający wszystkie h_α

Dowód ④: Jeśli h istnieje, to dla dowolnego „zredukowanego" słowa $g_1 \cdots g_n \in W$ repr. element z $\ast_\alpha G_\alpha$, gdzie $g_i \in G_{\alpha_i}$, musi być określony przez

$$h(g_1 \cdots g_n) = h_{\alpha_1}(g_1) \cdot \ldots \cdot h_{\alpha_n}(g_n).$$

Że tak określone $h : \ast_\alpha G_\alpha \to H$ jest homomorfizmem wynika z reguły mnożenia słów z W

PATRZ OSOBNA KARTKA 3'

Rozważmy $u = g_1 \cdots g_n \in W$, $v = g_1' \cdots g_m' \in W$, $g_i \in G_{\alpha_i}$, $g_j' \in G_{\alpha_j'}$

• Jeśli $\alpha_n \neq \alpha_1'$ to [illegible] $h(\overset{u}{\prod_{i=1}^{n} g_i}) \cdot h(\overset{v}{\prod_{j=1}^{m} g_j'}) = h(\overset{u \cdot v}{\prod g_i \prod g_j'})$ $[h(u) \cdot h(v) = h(u \cdot v)]$

• Jeśli $g_n \in G_{\alpha_n} \ni g_1'$ i $g_n g_1' \neq 1$ to $[\alpha_n = \alpha_1']$

$$h(\overset{u}{\prod g_i}) \cdot h(\overset{v}{\prod g_j'}) = \prod_{i=1}^{n} h_{\alpha_i}(g_i) \cdot \prod_{j=1}^{m} h_{\alpha_j'}(g_j') = \prod_{i=1}^{n-1} h_{\alpha_i}(g_i)\, h_{\alpha_n}(g_n)\, h_{\alpha_n}(g_1') \prod_{j=2}^{m} h_{\alpha_j'}(g_j') =$$

$$= \prod_{i=1}^{n-1} h_{\alpha_i}(g_i)\, h_{\alpha_n}(g_n \cdot g_1') \prod_{j=2}^{m} h_{\alpha_j'}(g_j') = h\Big[\overset{u \cdot v}{(\prod g_i)(\prod g_j')}\Big]. \; \square$$

• Jeśli $g_n \in G_{\alpha_n} \ni g_1'$ i $g_n g_1' = 1$ to równości j.w. dają

$$h(\overset{u}{\prod g_i}) \cdot h(\overset{v}{\prod g_j'}) = \prod_{i=1}^{n-1} h_{\alpha_i}(g_i) \cdot \prod_{j=2}^{m} h_{\alpha_j'}(g_j')$$

co ostatecznie też daje $h(u) \cdot h(v) = h(u \cdot v)$

$\square$

$\boxed{3'}$

- $h(u)\cdot h(v) = h\left(\prod_{i=1}^{n} g_i\right)\cdot h\left(\prod_{j=1}^{m} g_j'\right) =$

$$= \prod_{i=1}^{n} h_{\alpha_i}(g_i)\cdot \prod_{j=1}^{m} h_{\alpha_j'}(g_j') = h\left(\prod_{i=1}^{n} g_i \prod_{j=1}^{m} g_j'\right) = h(u\cdot v)$$

- $h(u)\cdot h(v) = \prod_{i=1}^{n} h_{\alpha_i}(g_i) \prod_{j=1}^{m} h_{\alpha_j'}(g_j') =$

$$= \left[\prod_{i=1}^{n-1} h_{\alpha_i}(g_i)\right] h_{\alpha_n}(g_n)\ h_{\alpha_1'}(g_1')\left[\prod_{j=2}^{m} h_{\alpha_j'}(g_j')\right] =$$

$$= \left[\prod_{i=1}^{n-1} h_{\alpha_i}(g_i)\right]\cdot h_{\alpha_n}(g_n g_1')\cdot\left[\prod_{j=2}^{m} h_{\alpha_j'}(g_j')\right] =$$

$$= \dots =$$

$$= h(u\cdot v)$$

bo (po redukcji)

$$u\cdot v = g_1 \cdots g_{n-1}(g_n g_1')\, g_2' \cdots g_m'$$

- $h(u)\cdot h(v) = \prod_{i=1}^{n-1} h_{\alpha_i}(g_i)\cdot \prod_{j=2}^{m} h_{\alpha_j'}(g_j') = h(u\cdot v)$

PRODUKT WOLNY Z AMALGAMACJĄ

$\boxed{D}$

Uogólnienie produktu wolnego $G_1 * G_2$

(w którym $G_1 \sqcup G_2 /_{1_{G_1} = 1_{G_2}}$ „generuje w sposób wolny" grupę)

na przypadek gdy

$A < G_1$, $B < G_2$ podgrupy, $\varphi : A \to B$ izomorfizm

i postulujemy by zbiór $G_1 \cup_\varphi G_2 = G_1 \sqcup G_2 /_{a \sim \varphi(a)}$

„generował w sposób wolny" grupę $G_1 \underset{A \overset{\varphi}{=} B}{*} G_2$.

PRODUKT WOLNY Z AMALGAMACJĄ :

<u>Definicja (uniwersalnościowa)</u>:

Dane są $A < H$, $B < K$, $\varphi : A \to B$ izomorfizm.

<u>Produktem wolnym z amalgamacją</u> grup H, K <u>względem</u> φ nazywamy grupę L wraz z homomorfizmami $i_H : H \to L$, $i_K : K \to L$ zgodnymi na A, B (czyli t.że $i_K \varphi = i_H|A$), takimi że

$\forall G \quad \forall \psi_H : H \to G, \psi_K : K \to G$ zgodnych na A, B (czyli t.że $\psi_K \varphi = \psi_H|A$)

$\exists! \ \alpha : L \to G$ zgodny z ψ_H i ψ_K (czyli t.że $\alpha i_H = \psi_H$, $\alpha i_K = \psi_K$).

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[d, phantom, "\wedge"] & & B \arrow[d, phantom, "\wedge"] \\
H \arrow[r, "i_H"'] \arrow[dr, "\psi_H"'] & L \arrow[d, "\exists! \alpha"] & K \arrow[l, "i_K"] \arrow[dl, "\psi_K"] \\
& G &
\end{tikzcd}
$$

UWAGA: W domyśle, choć nic w definicji:

- i_H, i_K injektywne, utożsamiają H, K z podgrupami $i_H(H)$, $i_K(K)$ w L
- podgrupy A i B utożsamiają się w L zgodnie z φ $[i_K \varphi = i_H|A]$ $\Rightarrow i_K(B) = i_H(A)$
- przekrój H, K jako podgrup w L jest dokładnie równy wspólnej podgrupie odpowiadającej $A \overset{\varphi}{\cong} B$

$$[i_H(H) \cap i_K(K) = i_H(A) = i_K(B)].$$

JEDYNOŚĆ (z dokładnością do izomorfizmu respektującego i_H, i_K)

<u>FAKT 1.</u> Każda grupa L spełniająca warunki Definicji jest generowana przez $i_H(H) \cup i_K(K)$.

<u>Dowód</u>: Jeśli nie, to niech $L_0 \lneq L$, $L_0 = \langle i_H(H) \cup i_K(K) \rangle$.

Wówczas
$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "i_H"] \arrow[dr, "\psi_H = i_H"'] & L \arrow[d, dashed, "!\beta"] & K \arrow[l, "i_K"'] \arrow[dl, "i_K = \psi_K"] \\ & L_0 & \end{tikzcd}$$
indukuje homomorfizm $\beta : L \to L_0 < L$ na swoją właściwą podgrupę.

Ale wtedy
$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "i_H"] \arrow[dr, "\psi_H = i_H"'] & L \arrow[d, shift right, "id_L"'] \arrow[d, shift left, "\beta"] & K \arrow[l, "i_K"'] \arrow[dl, "\psi_K = i_K"] \\ & L & \end{tikzcd}$$
mamy dwa <u>różne</u> homomorfizmy, wbrew założeniu jedyności. $\square$

<u>FAKT 2.</u> Jeśli (L, i_H, i_K) oraz (L', i'_H, i'_K) dwie grupy spełniające warunki definicji, to istnieje izomorfizm $\lambda : L \to L'$ respektujący homomorfizmy i_H, i_K, i'_H, i'_K, tzn taki że
$\lambda i'_K = i_K$, $\lambda i'_H = i_H$.

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[d, "\lambda"] & \\ H \arrow[ur, "i_H"] \arrow[dr, "i'_H"'] & L' & K \arrow[ul, "i_K"'] \arrow[dl, "i'_K"] \end{tikzcd}$$

<u>Dowód</u>: Homomorfizm λ istnieje z definicji, podobnie jak homomorfizm $\mu : L' \to L$.

Złożenie $\mu\lambda : L \to L$ jest identycznością, bo jest tożsamościowe na generatorach z $i_H(H) \cup i_K(K)$:

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[d, shift right, "\lambda"'] & \\ H \arrow[ur, "i_H"] \arrow[dr, "i'_H"'] & L' \arrow[u, shift right, "\mu"'] & K \arrow[ul, "i_K"'] \arrow[dl, "i'_K"] \end{tikzcd}$$

- dla $h \in H$ mamy
  $\mu\lambda(i_H(h)) = \mu\, i'_H(h) = i_H(h)$
- podobnie dla $k \in K$.

Analogicznie, złożenie $\lambda\mu = id_{L'}$. Stąd zarówno λ jak i μ są izomorfizmami.

$\square$

ISTNIENIE (za pomocą prezentacji).

Niech $H=\langle S \mid D\rangle$, $K=\langle T \mid E\rangle$

i niech podgrupa A będzie generowana przez zbiór Q generatorów.

LEMAT. Niech $L=\langle S\cup T \mid D\cup E\cup \{a=\varphi(a) : a\in Q\}\rangle$

gdzie elementy $a\in Q$ są wyrażone w $S\cup S^{-1}$, zaś $\varphi(a)$ w $T\cup T^{-1}$.

Niech $i_H : H\to L$ zadany przez id_S, zaś $i_K : K\to L$ przez id_T.

Wówczas (L, i_H, i_K) spełniają warunki definicji produktu wolnego z amalgamacją.

Dowód: • Spełniony jest warunek zgodności $i_K\varphi = i_H|_A$, bo

dla $a\in Q$ mamy

$$\begin{array}{ccc} i_H(a) & & i_K(\varphi(a)) \\ \| & & \| \\ a & \underset{\text{relacje}}{=\!=\!=} & \varphi(a) \\ \cap & & \cap \\ L & & L \end{array}$$

, czyli $i_H(a)=i_K(\varphi(a))$,

więc równość $i_K\varphi = i_H$ obowiązuje na grupie generowanej przez Q

czyli $i_K\varphi = i_H|_A$.

• Rozważmy homomorfizmy $\psi_H : H\to G$, $\psi_K : K\to G$ t.że $\psi_K\varphi = \psi_H|_A$

Warunki $\alpha i_H=\psi_H$, $\alpha i_K=\psi_K$ wymuszają określenie α na generatorach przez

$$\alpha_0(s)=\psi_H(s) \text{ dla } s\in S$$
$$\alpha_0(t)=\psi_K(t) \text{ dla } t\in T.$$
(stąd jedyność α)

Relacje z D są spełnione przez obrazy $\alpha_0(s)$ bo ψ_H homomorfizm

— " — E — " — $\alpha_0(t)$ bo ψ_K — " —.

Relacje $a=\varphi(a) : a\in Q$ są spełnione w G przez obrazy, bo $\psi_H(a)=\psi_K(\varphi(a))$ z zał. o ψ_H i ψ_K.

Zatem α_0 rozszerza się jednoznacznie do $\alpha : L\to G$,

który z definicji spełnia wymagane założenia $\alpha i_H=\psi_H$, $\alpha i_K=\psi_K$. □

OZNACZENIE: $H \underset{A=B}{\ast} K$ (uwaga: wynik zależy od φ na ogół !?).

PRZYKŁAD

Przypadek gdy $A = B = \{1\}$, $\varphi = id_{\{1\}}$,

prowadzi do opisanego wcześniej produktu wolnego $H * K$.

(bo pokazaliśmy że dowolne $\psi_H : H \to G$, $\psi_K : K \to G$

rozszerzają się jednoznacznie do $\psi : H * K \to G$)

UWAGI:

1. $H * K$ ma charakteryzację uniwersalnościową

jako jedyna grupa L dopuszczająca $\varphi_H : H \to L$, $\varphi_K : K \to L$

i taka, że dowolny diagram komutujący

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\varphi_H"] \arrow[dr, "\psi_H"'] & L & K \arrow[l, "\varphi_K"'] \arrow[dl, "\psi_K"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

dopełnia się jednoznacznie do

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r] \arrow[dr, "\psi_H"'] & L \arrow[d, dashed, "\psi"] & K \arrow[l] \arrow[dl, "\psi_K"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

VERTE →

2. To że $H \hookrightarrow H * K$, $K \hookrightarrow H * K$, $H \cap K = \{1\}$

można wyprowadzić łatwo bezpośrednio z powyższej definicji wolnej (charakteryzacji) uniwersalnościowej ćw. ale wynika to też z konstrukcji $H * K$.

3. Analogiczne własności dla ogólnego $H \underset{A \overset{\varphi}{=} B}{*} K$ są trudniejsze do otrzymania.

4. [2015] Jeśli $H_\alpha = \langle S_\alpha \mid R_\alpha \rangle$ to

$$\underset{\alpha}{*} H_\alpha = \left\langle \bigsqcup_\alpha S_\alpha \;\middle|\; \bigsqcup_\alpha R_\alpha \right\rangle.$$

Identycznie posługując się następującą charakteryzacją uniwersalną produktu wolnego dowolnej rodziny grup $\{H_\alpha\}_\alpha$

Jest to jedyna grupa L dopuszczająca homomorfizmy $\varphi_\alpha : H_\alpha \to L$ taka, że dla dowolnej grupy G i dowolnej rodziny homomorfizmów $\psi_\alpha : H_\alpha \to G$ istnieje jedyny homomorfizm $\psi : L \to G$ taki, że $\forall_\alpha$

$$\begin{tikzcd} H_\alpha \arrow[r, "\varphi_\alpha"] \arrow[dr, bend right, "\psi_\alpha"'] & L \arrow[d, "\psi"] \\ & G \end{tikzcd}$$

.