

**Podstawy geometrii i geometrie nieeuklidesowe**  
**Lista 3. Model Kleina geometrii nieeuklidesowej.**

**Podstawowe obiekty w modelu Kleina**

1. W obszarze dowolnego kąta wskaż punkt, przez który nie przechodzi żadna prosta przecinająca oba ramiona kąta. Dla danego kąta, opisz zbiór złożony z wszystkich punktów o tej własności. (Skonfrontuj to z błędnym dowodem Legendra faktu, że suma kątów w trójkącie wynosi  $180^\circ$ , omawianym na wykładzie.)
2. Wskaż przykład trzech parami rozłącznych półpłaszczyzn w modelu Kleina. Czy taki przykład jest możliwy w geometrii euklidesowej?
3. Dane są dwie proste asymptotyczne  $k$  i  $m$  oraz punkt  $A$  w obszarze pomiędzy nimi. Ile prostych nieprzecinających ani  $k$  ani  $m$  przechodzi przez  $A$ ? Podaj odpowiedzi (które są różne!) dla wszystkich przypadków odpowiednio opisanych dokładniejszych szczegółów położenia  $A$  względem  $k$  i  $m$ .

**Zadania o prostopadłości oraz o kątach ostrych i rozwartych**

4. Uzasadnij, że proste asymptotyczne nie mają żadnej wspólnej prostopadłej.
5. Udowodnij, że dwie różne proste prostopadłe do danej prostej są rozbieżne.
6. Znajdź w modelu Kleina przykład kąta prostego i kąta ostrego takich, że obszar tego pierwszego zawiera się w obszarze tego drugiego. UWAGA: kąt jest ostry, gdy zawiera się w kącie prostym o tym samym wierzchołku i o jednym ramieniu wspólnym.
7. Znajdź w modelu Kleina przykład czworokąta Lamberta i uzasadnij, że jego kąt przy czwartym wierzchołku jest ostry.
8. Wskaż, wraz z uzasadnieniem, przykład czworokąta o wszystkich czterech kątach ostrych.

**Zadania o nieeuklidesowych odległościach i miarach odcinków**

9. Uzasadnij, że współrzędna logarytmiczna

$$x_A = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{|PA|/|AQ|}{|PB|/|BQ|} \right|$$

punktu  $A$  na cięciwie  $PQ$ :

- (a) wynosi 0 gdy  $A$  jest euklidesowym środkiem cięciwy  $PQ$ ;
  - (b) rośnie gdy punkt  $A$  oddala się od punktu  $P$  zaś zbliża do  $Q$ ;
  - (c) zmienia się na przeciwną, gdy zamieni się oznaczenia  $P$  i  $Q$  dla końców cięciwy.
10. Punkt  $A$  leży w środku modelu Kleina będącego kołem o promieniu 1, zaś punkt  $B$  leży w euklidesowej odległości  $1/2$  od  $A$ . Oblicz odległość nieeuklidesową  $|AB|_{NE}$  oraz znajdź nieeuklidesowy środek odcinka  $AB$ .
  11. Znajdź w modelu Kleina odcinek o nieeuklidesowej mierze 1000.
  12. Znajdź w modelu Kleina przykład czworokąta Saccheri'ego i sprawdź, że jego kąty **nie** przy podstawie są ostre.
  13. Uzasadnij, że przeciwprostokątna w trójkącie prostokątnym nieeuklidesowym ma większą miarę niż przyprostokątna, w następujących dwóch krokach.
    - (a) Najpierw rozważ takie położenie trójkąta w modelu, w którym wierzchołek między przeciwprostokątną a rozpatrywaną przyprostokątną znajduje się w euklidesowym środku modelu.

- (b) Następnie, korzystając z punktu (a) oraz z aksjomatu o przystawianiu trójkątów, uzasadnij powyższą własność dla dowolnego nieeuklidesowego trójkąta prostokątnego.
14. Korzystając z poprzedniego zadania uzasadnij, że rzut prostokątny punktu  $A$  na daną prostą jest punktem najbliższym punktowi  $A$  spośród punktów na tej prostej.
  15. Proste  $p$  i  $q$  są asymptotyczne,  $A \in q$ , zaś  $A'$  jest rzutem prostokątnym  $A$  na  $p$ . Uzasadnij, że nieeuklidesowa odległość  $|AA'|$  dąży do zera gdy  $A$  dąży do wspólnego punktu prostych  $p$  i  $q$  na brzegu modelu. Przyjmij, że  $p$  jest średnicą modelu.

**Zadania o nieeuklidesowych okręgach i izometriach**

16. Uzasadnij, że odcinki o wspólnym końcu w środku modelu mają jednakowe miary (nieeuklidesowe) dokładnie wtedy, gdy ich zwykłe (euklidesowe) długości są równe. Wywnioskuj stąd, że nieeuklidesowymi okręgami o środku w środku modelu (czyli figurami złożonymi ze wszystkich punktów leżących w ustalonej nieeuklidesowej odległości od środka) są zwykłe okręgi euklidesowe.
17. Niech  $P$  będzie punktem w modelu Kleina różnym od środka modelu. Uzasadnij, że żaden euklidesowy okrąg o środku  $P$  nie jest nieeuklidesowym okręgiem o środku  $P$ .
18. Korzystając z zadania 16 podaj przykład okręgu, na którym nie można opisać trójkąta. Oblicz jaki jest conajmniej jego promień.
19. Dla okręgów o środku w środku modelu uzasadnij, że kąt wpisany oparty na średnicy nie jest kątem prostym. Czy jest to kąt ostry czy rozwarty?
20. Uzasadnij, że zwykłe obroty wokół środka modelu oraz zwykłe odbicia względem średnic modelu są izometriami płaszczyzny nieeuklidesowej.

**Inne zadania**

21. Trójkąt o jednym wierzchołku idealnym ma w pozostałych wierzchołkach kąty o miarach  $90^\circ$  i  $30^\circ$ . Oblicz długość boku łączącego dwa zwykłe wierzchołki tego trójkąta. Wskazówka: umieść ten trójkąt w modelu tak, by wierzchołek o kącie miary  $30^\circ$  znajdował się w środku modelu.
22. Dla dowolnego  $\alpha$  spełniającego  $0 < \alpha < 90^\circ$  znajdź w modelu Kleina przykład czworokąta Lamberta, w którym kąt przy czwartym wierzchołku ma miarę  $\alpha$ .