Podstawy geometrii i geometrie nieeuklidesowe
Lista 4. Model półpłaszczyznowy geometrii nieeuklidesowej.

Ćwiczenia - do samodzielnego wykonania

1. Znajdź oba kąty pomiędzy następującymi parami prostych
   (a) $x^2 + y^2 = 3$, $(x-1)^2 + y^2 = 4$;
   (b) $x^2 + y^2 = 5$, $x = -1$.
2. Znajdź równanie prostej (tzn. reprezentującego ją półokręgu) przechodzącej przez punkty $(-1, 2)$ oraz $(2, 1)$.
3. Znajdź równanie prostej prostopadłej do prostej $L : x^2 + y^2 = 25$ i przechodzącej
   (a) punkt $(3, 4)$ leżący na prostej L;
   (b) punkt $(1, 7)$.
4. Znajdź równania obu prostych przecinających prostą $x = 2$ w punkcie $(2, 5)$ pod kątem $\pi/3$.
5. Znajdź równania obu prostych asymptotycznych do prostej $(x-2)^2 + y^2 = 20$ przechodzących przez punkt $(1, 1)$.
6. Uzasadnij, że dla dwóch nieasymptotycznych półprostych istnieja dokładnie jedna prosta asymptotyczna do obu z nich.

Zadania

1. Znajdź prostą prostopadłą do prostej $(x-7)^2 + y^2 = 4$ i przecinającą prostą $x = 6$ pod kątem $\pi/6$.
2. Oblicz posługując sie tablicami funkcji trygonometrycznych lub kalkulatorem sumę kątów w trójkątach o zadanych wierzchołkach:
   (a) $(0, 1)$, $(1, 1)$ i $(3, 1)$;
   (b) $(0, 1)$, $(0, 2)$ i $(1, 2)$.
3. Znajdź równania dwusiecznych obu kątów pomiędzy prostymi $x^2 + y^2 = 4$ i $x = -1$.
4. Znajdź w modelu półpłaszczyznowym:
   (a) trójkąt o sumie kątów równej $3\pi/4$;
   (b) ka/t rozwarty zawarty w obszarze kąta ostrego;
   (c) prostopadłą wypuszczoną z jednego ramienia kąta ostrego, która nie przecina drugiego ramienia tego kąta;
   (d) czworokąt o trzech kątach prostych i czawartym kącie $\pi/3$.
5. Uzasadnij że proste asymptotyczne do prostej $x = 4$ nie mają z nią wspólnej prostopadłej.
6. Znajdź wspólną prostopadła do następujących par prostych rozbieżnych:
   (a) $x^2 + y^2 = 1$ i $x^2 + y^2 = 4$; (b) $x^2 + y^2 = 1$ i $x = 2$;
   (c) $x^2 + y^2 = 1$ i $(x-1)^2 + y^2 = 10$; (d) $x^2 + y^2 = 1$ i $(x-4)^2 + y^2 = 4$.
7. Znajdź przykład trójkąta o jednym wierzchołku idealnym i o kątach $\pi/3$ w dwóch pozostałych wierzchołkach.
8. W czworokącie idealnym (o wszystkich czterech wierzchołkach idealnych) przekątnymi nazywamy proste "łączące" pary przeciwległych wierzchołków idealnych. Dla dowolnego kąta $\alpha \leq \pi/2$ podaj przykład czworokąta idealnego którego przekątne przecinają się pod kątem α.
9. Uzasadnij, że
   (a) horocykl i prosta, (b) dwa różne horocykle,
   mogą mieć conajwyżej dwa punkty wspólne.
10. Uzasadnij, że prosta przecinająca horocykl w dwóch punktach tworzy z nim dwa jednakowe kąty przecięcia.
11. Dane są dwie asymptotyczne proste z których przynajmniej jedna jest reprezentowana w modelu półokręgiem. Dla dowolnego punktu na którejkolwiek z tych prostych skonstruuj sieczną jednakowego nachylenia przechodzącą przez ten punkt. Wskazówka: skorzystaj z pomocniczego horocyklu.
12. Uzasadnij, że przez dwa różne punkty płaszczyzny nieeuklidesowej przechodzą dokładnie dwa horocykle. Rozważ odpowiednie przypadki wzajemnego położenia dwóch punktów na górnej półpłaszczyźnie.