

Uniwersytet Wrocławski
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyczny
specjalność: nauczycielska

Izabela Przezdzińska

Geometria Poincarégo i Kleina.

Skrypt do zajęć: Podstawy geometrii i elementy geometrii nieeuklidesowej.

Praca magisterska

napisana pod kierunkiem

prof. dr hab. Jacka Świątkowskiego

Wrocław 2010

Przedmowa

Niniejszy skrypt został napisany na podstawie notatek sporządzonych podczas wykładów z „Podstaw geometrii i elementów geometrii nieeuklidesowej” prowadzonych przez prof. dr hab. Jacka Świątkowskiego w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego.

Jest on przeznaczony dla słuchaczy ww wykładu, jednak został napisany w taki sposób, by także każdy, kto posiada elementarną wiedzę z geometrii w zakresie szkoły średniej oraz podstawową wiedzę z logiki mógł bez większych trudności zrozumieć treści w nim zawarte.

Tematyka tej pracy dotyczy teorii geometrii nieeuklidesowej, czyli takiej geometrii, która bazuje na zaprzeczeniu podstawowego twierdzenia geometrii euklidesowej, z którą czytelnik do tej pory spotykał się na każdym z poziomów edukacji szkolnej. Jak się okaże, konsekwencją tego zaprzeczenia będzie nowa interpretacja pojęć geometrycznych oraz nowy wygląd figur, których własności będziemy tutaj badać. Skrypt ten stanowi namiastkę wiedzy, jaką oferuje nam ten nowy świat geometrii, w którym proste są krzywe, a płaszczyzna ograniczona, gdzie nie istnieje prostokąt a wierzchołek trójkąta jest abstrakcyjnym punktem.

W napisaniu tej pracy pomógł mi skrypt Ryszarda Domana „Wykłady z geometrii elementarnej” [1]. Korzystałam również ze skryptu Anny Sznajder Otfinowskiej „Podstawy geometrii i elementy geometrii nieeuklidesowej” [2], który stanowi opracowanie pierwszej części wykładu, a w którym można znaleźć obszerny opis teorii aksjomatyczno– dedukcyjnej, na której bazuje teoria wszystkich geometrii a także obszernie omówienie historii badań nad geometrią nieeuklidesową. W niektórych miejscach będziemy odwoływać się do informacji zawartych w tym skrypcie, wskazane jest więc, aby czytelnik wcześniej się z nim zapoznał.

Niniejszy skrypt składa się z trzech rozdziałów, które podzielone są na paragrafy. W pierwszym rozdziale opisuję, w jaki sposób badania nad geometrią euklidesową przyczyniły się do powstania nowej geometrii – geometrii nieeuklidesowej. Drugi rozdział rozpocząłam od wyjaśnienia, czym jest model teorii, by następnie szczegółowo omówić model Kleina geometrii hiperbolicznej. Trzeci rozdział natomiast został w całości poświęcony modelowi Poincarégo geometrii hiperbolicznej. W przypadku obu modeli podaję interpretację pojęć pierwotnych, sprawdzam, czy tak określony układ pojęć spełnia podstawowe twierdzenia (tzw. aksjomaty) geometrii nieeuklidesowej, po czym opisuję własności kątów, wielokątów i pewnych szczególnych linii, które charakteryzują płaszczyznę nieeuklidesową. Ponadto w rozdziale trzecim ponadto zostały omówione izometrie w modelu Poincarégo.

Mam nadzieję, że zawarte w tym skrypcie liczne rysunki oraz uwagi dotyczące analogii do geometrii euklidesowej będą pomocne w zrozumieniu koncepcji geometrii nieeuklidesowej.

Spis treści

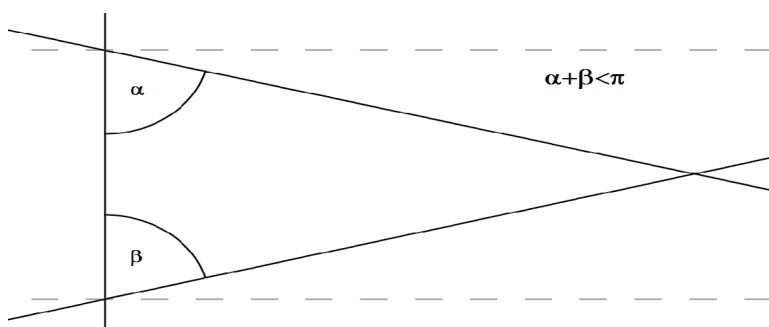
Przedmowa	3
1. Z historii geometrii	5
2. Model Kleina geometrii nieeuklidesowej	9
2.1 Model teorii.....	9
2.2 Pojęcia pierwotne w modelu Kleina.....	10
2.3 Spełnianie aksjomatów geometrii nieeuklidesowej.....	14
2.4 Własności geometrii nieeuklidesowej wyprowadzane za pośrednictwem modelu Kleina.....	17
2.4.1 Prostopadłość w geometrii nieeuklidesowej.....	17
2.4.2 Asymptotyczność i rozbieżność w geometrii nieeuklidesowej.....	21
2.4.3 Wielokąty na płaszczyźnie nieeuklidesowej.....	24
2.4.4 Kąt równoległości i funkcja Łobaczewskiego.....	25
2.4.5 Linia ekwidystantna.....	28
2.4.6 Horocykle w modelu Kleina.....	31
Zadania dotyczące modelu Kleina.....	34
3. Model półpłaszczyznowy Poincarégo geometrii nieeuklidesowej	35
3.1 Pojęcia pierwotne w modelu Poincarégo.....	35
3.2 Spełnianie aksjomatów geometrii nieeuklidesowej.....	38
3.3 Ogląd własności geometrii nieeuklidesowej za pośrednictwem modelu Poincarégo.....	39
3.3.1 Kąty w modelu Poincarégo.....	39
3.3.2 Wielokąty w modelu Poincarégo.....	40
3.3.3 Asymptotyczność i rozbieżność w modelu Poincarégo.....	42
3.3.4 Horocykle w modelu Poincarégo.....	46
Zadania dotyczące własności w modelu Poincarégo.....	48
3.4 Izometrie płaszczyzny nieeuklidesowej w modelu półpłaszczyznowym.....	50
3.4.1 Inwersja względem okręgu.....	50
3.4.2 Neeuklidesowe symetrie osiowe (odbicia).....	60
3.4.3 Przykłady izometrii nieeuklidesowych będących złożeniem odbić hiperbolicznych.....	62
3.4.4 Wnioski wynikające z własności izometrii hiperbolicznych.....	64
Zadania dotyczące izometrii w modelu Poincarégo.....	71
3.5 Pola powierzchni wielokątów na płaszczyźnie nieeuklidesowej.....	72

Rozdział 1

Z historii geometrii

Za początek istnienia geometrii jako spójnej nauki można uznać rok 300 p.n.e., kiedy to wybitny matematyk starożytnej Grecji Euklides stworzył jedno z najważniejszych dzieł matematycznych ludzkości „Elementy”, w którym zawarł podstawowe zagadnienia geometrii i arytmetyki. Zapoczątkował też w nim metodę aksjomatyczno – dedukcyjną¹, tzn. przedstawił ówczesną wiedzę geometryczną jako szereg twierdzeń, które są włączone w łańcuch logicznych wniosków. Euklides zamieścił w swym dziele układ aksjomatów, który z założenia miał stanowić podstawę do tworzenia wszystkich pozostałych twierdzeń, a w skład którego wchodziły następujące zdania:

- I. od dowolnego punktu do dowolnego innego można poprowadzić prostą;
- II. ograniczoną prostą można dowolnie przedłużyć;
- III. z dowolnego środka z dowolnym promieniem można opisać okrąg;
- IV. wszystkie kąty proste są równe;
- V. jeśli dwie proste na płaszczyźnie tworzą z trzecią kąty jednostronne wewnętrzne o sumie mniejszej od dwóch kątów prostych, to te proste po przedłużeniu przetną się i to z tej właśnie strony.



Piąty aksjomat jest zamiennie nazywany V postulatem Euklidesa lub aksjomelem równoległości. Dziś bardziej znana nam jest jego równoważna wersja, wprowadzona w 1795r. przez angielskiego matematyka Johna Playfair’a: *przez każdy punkt nie leżący na danej prostej l przechodzi dokładnie jedna prosta l’ nie przecinająca l.*

Aksjomat ten z całości teorii zaproponowanej przez Euklidesa budził największe wątpliwości, gdyż w przeciwieństwie do pozostałych aksjomatów opisywał własność obiektu nieograniczonego, jakim jest prosta. Ta odmienność sprawiła, że już od starożytności aż po

¹Metoda ta polega na budowie teorii przy pomocy intuicyjnie jasnych pojęć, których się nie definiuje, np. punkt, prosta (tzw. pojęcia pierwotne), a o których całą wiedzę czerpie się z aksjomatów (czyli twierdzeń, których prawdziwość przyjmuje się bez dowodu). Wszystkie twierdzenia teorii można dowieść lub obalić przy pomocy aksjomatów, natomiast wszystkie pojęcia teorii definiuje się przy użyciu pojęć pierwotnych

wiek XIX wielu matematyków podejrzewało, że jest on zależny² od pozostałych. Wielokrotnie i różnymi sposobami próbowano przeprowadzić dowód V postulatu właśnie za pomocą pozostałych aksjomatów, jednak próby te były albo nieudane albo błędnie przeprowadzone. Wobec tych niepowodzeń geometryści zaczęli więc zastanawiać się, czy aksjomat równoległości jest niezbędny w tworzeniu geometrii i zaczęli podejmować próby budowy teorii opartej jedynie na czterech pierwszych aksjomatach geometrii euklidesowej. Teoria ta, nazwana geometrią absolutną, zawiera twierdzenia, których dowodzenie nie wymaga użycia owego kontrowersyjnego aksjomatu. Okazało się jednak, że nie można w niej wyprowadzić niektórych twierdzeń geometrii, jak np. twierdzenia Pitagorasa czy twierdzenia Talesa. Matematycy postanowili więc pójść inną drogą i próbowali stworzyć teorię zbudowaną m.in. z aksjomatu będącego zaprzeczeniem aksjomatu równoległości: *istnieje punkt A i prosta m taka, że $A \notin m$ i przez A przechodzą co najmniej dwie proste nie przecinające m lub przez A nie przechodzi żadna taka prosta*. Nauka ta nazwana została geometrią nieeuklidesową. My zajmiemy się jednym z jej przykładów, jakim jest geometria hiperboliczna³. Powstała ona przez dołączenie do układu aksjomatów geometrii absolutnej twierdzenia mówiącego, że *istnieje punkt A i prosta m taka, że $A \notin m$ i przez A przechodzą co najmniej dwie proste nie przecinające m* (tzw. aksjomat Łobaczewskiego). Prekursorami tej nowej nauki byli G. Saccheri (1667-1733) i J. H. Lambert (1728-1777), jednak nie byli świadomi tego faktu, gdyż odkryte twierdzenia uznali nie za część nowej, nieznannej geometrii, ale za sprzeczne z istotą pojęć geometrycznych. W późniejszym czasie zagadnieniem geometrii nieeuklidesowej zajmował się także C. Gauss (1820r.), jednak z powodu lęku przed krytyką nigdy nie opublikował swoich wyników. Jak się później okazało, jego obawy nie były bezpodstawne. Otóż, gdy w 1826r. rosyjski matematyk a zarazem profesor na uniwersytecie N. Łobaczewski ogłosił nową teorię geometrii, całkowicie odmienną od jedynej i powszechnie uznawanej geometrii euklidesowej, zlekceważono jego odkrycie. Niektórzy twierdzili nawet, że ten uczony jest niespełna rozumu i zajmuje się dziwactwami. Nie zatrzymało go to przed opublikowaniem artykułu „O zasadach geometrii”, gdzie powtórnie przedstawił efekty swojej pracy. Miało to miejsce w 1829r. i właśnie ten rok uważa się za datę powstania geometrii nieeuklidesowej. W tym samym czasie, co Łobaczewski, prace nad geometrią hiperboliczną prowadził też Węgier Janos Bolyai. Jednak jako że Rosjanin zdołał udowodnić więcej twierdzeń nowej geometrii oraz opublikował wyniki swoich badań wcześniej, to jego uznaje się za twórcę tej teorii, którą nazywa się także geometrią Łobaczewskiego.

Równoległe do prac nad geometrią nieeuklidesową nieprzerwanie trwały badania nad poprawnością teorii stworzonej przez Euklidesa. Zdołano uzasadnić zupełność tej teorii a także niezależność⁴ rozmaitych aksjomatów od pozostałych. Okazało się też, że są w niej pewne luki, np. nie dało się udowodnić twierdzenia, że *jeśli prosta nie przechodząca przez wierzchołek trójkąta przecina jeden z jego boków, to musi przecinać jeszcze jeden jego bok*. W 1882r. Moritz Pasch uzupełnił więc układ brakującymi aksjomatami porządku a w 1899r. niemiecki matematyk David Hilbert w swoim dziele „Grundlagen der Geometrie” podał zupełny, niezależny układ aksjomatów geometrii euklidesowej, który zaprezentowany jest poniżej.

Aksjomaty geometrii euklidesowej wg Davida Hilberta, 1899r.
(nieco zmodyfikowane)

Pojęcia pierwotne

1. punkt,

² Stwierdzenie jest zależne od aksjomatów, jeśli wychodząc od tych aksjomatów można metodą dedukcyjną to stwierdzenie udowodnić lub obalić

³ Istnieje jeszcze jedna, odkryta później geometria nieeuklidesowa- geometria Riemanna

⁴ Więcej o zupełności teorii i niezależności aksjomatów w rozdziale 2.1

2. prosta,
3. relacja należenia (dla par punkt-prosta), oznaczana symbolem \in ,
4. relacja porządku dla punktów z dowolnej prostej p oznaczana symbolem $<_p$,
5. miara odcinków, oznaczana symbolem m ,
6. miara kątów, oznaczana symbolem μ .

Inne pojęcia pojawiające się w treści aksjomatów są zdefiniowane za pomocą pojęć pierwotnych. Oto ich definicje:

- dla różnych punktów A, B należących do prostej p odcinkiem AB nazywamy zbiór złożony z punktów A i B oraz z wszystkich punktów C takich, że $A <_p C <_p B$ lub $B <_p C <_p A$;
- półprostą o początku A nazywamy każdy zbiór postaci $\{A\} \cup \{X \in p : A <_p X\}$ lub postaci $\{A\} \cup \{X \in p : X <_p A\}$, gdzie p jest dowolną prostą zawierającą punkt A ;
- kąt to dwie półproste o wspólnym początku nie leżące na jednej prostej;
- półpłaszczyzną ograniczoną prostą p jest każdy zbiór postaci $\{Y : Y \in p\} \cup \{C\} \cup \{X : CX \cap p = \emptyset\}$, gdzie C jest dowolnym punktem nienależącym do p .

Aksjomaty incydencji (czyli dotyczące relacji należenia)

- I1. Dla dowolnych różnych punktów A i B istnieje dokładnie jedna prosta p przechodząca przez te punkty.
- I2. Na każdej prostej leżą przynajmniej 2 punkty.
- I3. Istnieją 3 punkty nieleżące na jednej prostej.

Aksjomaty porządku

- P1. Dla punktów z dowolnej prostej p relacja $<_p$ jest relacją liniowego porządku, tzn.:
 - a) jeśli $A <_p B$ to $A \neq B$;
 - b) jeśli $A \in p, B \in p$ oraz $A \neq B$ to zachodzi dokładnie jedna z relacji $A <_p B, B <_p A$;
 - c) jeśli $A <_p B$ i $B <_p C$ to $A <_p C$.
- P2. (aksjomat Moritza Pascha) Dla dowolnych niewspółliniowych punktów A, B, C oraz dowolnej prostej p nie przechodzącej przez żaden z punktów A, B, C jeśli p przecina odcinek AB to przecina też dokładnie jeden spośród odcinków BC i AC .

Aksjomaty miary odcinków

- M1. Dla każdego odcinka AB miara $m(AB)$ jest liczbą dodatnią.
- M2. Dla każdej półprostej r o początku w A i dla dowolnej liczby dodatniej d istnieje punkt $B \in r$ taki, że $m(AB) = d$.
- M3. Jeśli $A <_p B <_p C$ to $m(AB) + m(BC) = m(AC)$.

Aksjomaty miary kątów

- K1. Dla każdego kąta rs (utworzonego z półprostych r i s o wspólnym początku) miara $\mu(rs)$ jest liczbą z otwartego przedziału $(0, \pi)$.
- K2. Dla dowolnej prostej p , dowolnej półpłaszczyzny Ω ograniczonej przez p , dowolnej półprostej r zawartej w p i dowolnej liczby $\alpha \in (0, \pi)$ istnieje półprosta s zawarta w Ω tworząca wraz z r kąt rs taki, że $\mu(rs) = \alpha$.
- K3. Niech A, B, C i A', B', C' będą dwoma trójkami niewspółliniowych punktów. Jeśli $m(AB) = m(A'B')$, $m(AC) = m(A'C')$ i $\mu(BAC) = \mu(B'A'C')$ to $\mu(ABC) = \mu(A'B'C')$.

Aksjomat równoległości

R. Jeśli punkt A nie leży na prostej p , to istnieje dokładnie jedna prosta przechodząca przez A i nie przecinająca p .

W skład układu aksjomatów geometrii nieeuklidesowej, a dokładniej geometrii hiperbolicznej z wyżej wymienionych wchodzi aksjomaty incydencji, porządku, miary odcinków i miary kątów, czyli wszystkie prócz aksjomatu równoległości. Aksjomat ten został zastąpiony aksjomatem Łobaczewskiego:

„Istnieje punkt A i prosta m taka, że $A \notin m$ i przez A przechodzą co najmniej dwie proste nie przecinające m ”.

Rozdział 2

Model Kleina geometrii nieeuklidesowej

Niemiecki matematyk Feliks Klein (1849-1925) zasłynął w świecie nauki głównie dzięki swojemu wystąpieniu na Uniwersytecie w Erlangen w Bawarii, podczas którego wygłosił tezy na temat klasyfikacji pojęć i twierdzeń geometrii (tzw. Program Erlangeński). Według niego za jej podstawy należy uznać własności obiektów geometrycznych, które nie zmieniają się pod wpływem działania pewnych grup przekształceń, np. izometrii. Niemniej ważnym osiągnięciem Kleina było stworzenie modelu geometrii nieeuklidesowej (a dokładniej geometrii hiperbolicznej), w którym istnieje nieskończenie wiele prostych przechodzących przez dany punkt i rozłącznych z daną prostą. W rozdziale tym opiszemy strukturę modelu Kleina i pokażemy, że pojęcia pierwotne interpretowane zgodnie z tym modelem spełniają wszystkie aksjomaty geometrii nieeuklidesowej, potwierdzając tym samym jej niesprzeczność. Najpierw jednak wyjaśnijmy sobie, czym jest model geometrii i w jakim celu się go tworzy.

2.1 Model teorii

Zgodnie z metodą aksjomatyczno – dedukcyjną teorię można określić przy pomocy systemu pojęć i zależności zachodzących pomiędzy nimi. Istnieje jednak jeszcze jedna metoda określania teorii, a mianowicie poprzez zbudowanie tzw. modelu teorii. Model teorii jest zdefiniowany jako pewien „sztucznie” utworzony matematyczny system, w którym wszystkim pojęciom teorii nadaje się precyzyjne interpretacje. Innymi słowy oznacza to, że pojęcia teorii traktujemy jako zmienne i w danym modelu podstawiamy za nie pewne obiekty, np. w pewnym modelu pod nazwą „prosta” może kryć się euklidesowy okrąg, a „odcinkiem” będziemy nazywać łuk tego okręgu. Tak dobrany system pojęć może, ale nie musi spełniać wszystkich aksjomatów danej teorii. Jeśli je spełnia, wówczas prawdziwe też są w nim wszystkie twierdzenia. Jeżeli natomiast niektóre aksjomaty nie są w danym modelu spełnione, wtedy też nie są w nim prawdziwe twierdzenia wynikające z tych aksjomatów.

Modele pozwalają na uzasadnianie własności teorii: niesprzeczności i zupełności. Można powiedzieć, że własności te potwierdzają sens i prawo bytu danej teorii. Niesprzeczność układu aksjomatów oznacza, że nie da się z nich wyprowadzić stwierdzeń wzajemnie sprzecznych. Dowód niesprzeczności teorii polega na zbudowaniu w danej teorii modelu, który będzie spełniał wszystkie aksjomaty. Teoria jest zatem niesprzeczna, gdy posiada model spełniający jej aksjomaty. Dla teorii niesprzecznych definiujemy drugą własność – zupełność. Pojęcie zupełności teorii oznacza, że dana teoria niesprzeczna nie zawiera stwierdzeń niezależnych od aksjomatów, czyli w teorii zupełnej każde stwierdzenie można udowodnić lub obalić metodą dedukcyjną, wychodząc od aksjomatów. Aby pokazać, że teoria jest zupełna, należy udowodnić, że każde z jej twierdzeń jest zależne od aksjomatów, czyli trzeba przedstawić jego dowód lub dowód jego zaprzeczenia. Jeżeli natomiast twierdzimy, że dana teoria niesprzeczna nie jest zupełna i jakieś twierdzenie jest niezależne od aksjomatów, to fakt ten możemy udowodnić, budując dwa modele. Jeden z nich musi spełniać wszystkie aksjomaty oraz to twierdzenie, które budzi wątpliwości, natomiast drugi powinien być taki, by to jedno wybrane

przez nas twierdzenie nie było prawdziwe, a wszystkie aksjomaty były spełnione.

Teoria geometrii nieeuklidesowej ma dwóch twórców: N. Łobaczewskiego i J. Bolyai'a. Żaden z tych wybitnych matematyków nie zdołał jednak dowieść jej niesprzeczności. Dopiero w późniejszym czasie inni uczeni zbudowali odpowiednie modele. I tak powstały: model Kleina, model półpłaszczyznowy i dyskowy Poincarégo oraz model Minkowskiego. W dalszych częściach tego skryptu zostaną szczegółowo opisane dwa pierwsze modele. W tym rozdziale zaczniemy od modelu Kleina.

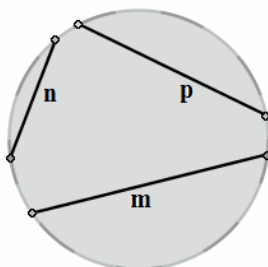
2.2 Pojęcia pierwotne w modelu Kleina

Model Kleina został skonstruowany na bazie pojęć geometrii euklidesowej, jednak ich interpretacja różni się od tej, która jest nam znana i która pochodzi od Euklidesa. Otóż Klein za płaszczyznę, czyli świat, w którym będziemy badać istnienie i własności figur geometrycznych, przyjął wnętrze ustalonego koła, które odtąd będziemy nazywać płaszczyzną hiperboliczną.

Uwaga: W niniejszym skrypcie będziemy przyjmować, że model Kleina jest wnętrzem koła o promieniu 1.

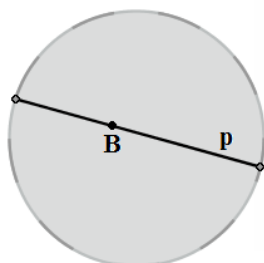
Na tej „nowej” płaszczyźnie pojęcia pierwotne są określone w następujący sposób:

1. **Punkty** – są to punkty w rozumieniu euklidesowym należące do wnętrza ustalonego koła.
2. **Proste** – to cięciwy koła bez końców.



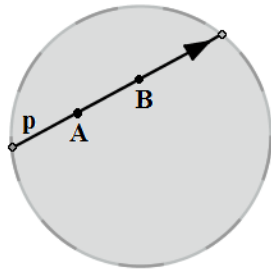
m, n, p – przykłady prostych w modelu Kleina

3. **Relacja należenia** – interpretowana jest podobnie, jak na płaszczyźnie euklidesowej, tzn. poprzez stwierdzenie, że punkt B należy do prostej p rozumiemy, że B leży na tej prostej (czyli na cięciwie reprezentującej tę prostą).



$B \in p$

4. **Relacja porządku** dla punktów z dowolnej prostej p – na prostej p dowolnie ustalamy kierunek i zgodnie z nim w naturalny sposób zachodzi relacja porządku (patrz rysunek poniżej).



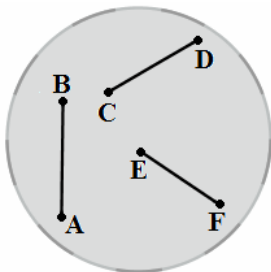
$$A <_p B$$

Znając interpretację relacji porządku w modelu Kleina możemy określić następujące obiekty (uwaga: są to pojęcia definiowalne, zatem nie należą do pojęć pierwotnych):

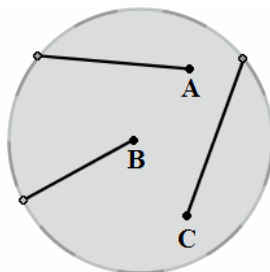
- odcinek AB , gdzie $A, B \in p$ jest to zbiór złożony z punktów A i B oraz z wszystkich punktów C takich, że $A <_p C <_p B$ lub $B <_p C <_p A$,
- półprosta o początku A to każdy zbiór postaci $\{A\} \cup \{X \in p : A <_p X\}$ lub postaci $\{A\} \cup \{X \in p : X <_p A\}$, gdzie p jest dowolną prostą zawierającą punkt A ,
- kąt to dwie półproste o wspólnym początku nieleżące na jednej prostej.

Nietrudno zauważyć, że powyższe definicje są analogiczne do tych na płaszczyźnie euklidesowej. Jediną różnicą jest ograniczenie w modelu Kleina zbioru punktów z definicji do wnętrza ustalonego koła.

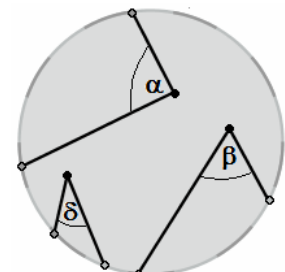
Przykłady:



odcinki



półproste



kąty

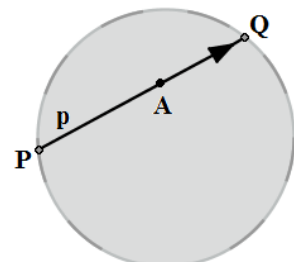
5. Miara odcinków

Miarę odcinków w modelu Kleina określamy za pomocą hiperbolicznych współrzędnych punktów.

Definicja 2.1. Dla dowolnego punktu A leżącego na prostej p (czyli cięciwie bez końców PQ), na której ustalony jest kierunek, współrzędną hiperboliczną x_A określamy wzorem:

$$x_A = \frac{1}{2} \ln \frac{|PA|_E}{|QA|_E},$$

gdzie $|PA|_E$ - euklidesowa długość odcinka PA ,
 $|QA|_E$ - euklidesowa długość odcinka QA .



Zauważmy, że $\frac{|PA|_E}{|QA|_E} \in (0, \infty)$, natomiast odwzorowanie punktu A w iloraz $\frac{|PA|_E}{|QA|_E}$ jest wzajemnie jednoznacznym odwzorowaniem cięciwy PQ (bez końców) na przedział $(0, \infty)$. Z tego faktu i z własności funkcji logarytmicznej otrzymujemy, iż $A \rightarrow x_A \in \mathfrak{R}$ jest wzajemnie jednoznaczną odpowiednością. Z powyższych uwag wynika następujący fakt:

Fakt 2.2. *Każdemu punktowi danej prostej jest przyporządkowana pewna współrzędna, a każda liczba rzeczywista jest współrzędną pewnego i to dokładnie jednego punktu.*

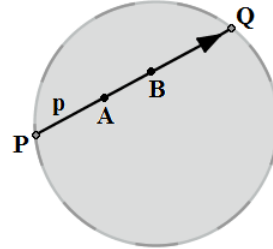
Fakt 2.3. *Współrzędne hiperboliczne punktów są zgodne z porządkiem, tzn. $A <_p B \Leftrightarrow x_A < x_B$.*

Dowód: Niech $A, B \in PQ$ takie, że $A < B$ i kierunek na prostej PQ jest obrany jak na rysunku.

$$A < B \Leftrightarrow |PA|_E < |PB|_E \wedge |AQ|_E > |BQ|_E \Leftrightarrow$$

$$\frac{|PA|_E}{|QA|_E} < \frac{|PB|_E}{|QB|_E} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln \frac{|PA|_E}{|QA|_E} < \frac{1}{2} \ln \frac{|PB|_E}{|QB|_E} \Leftrightarrow$$

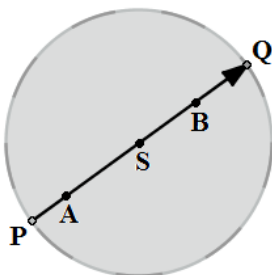
$$x_A < x_B.$$



Definicja 2.4. Nieeuklidesowa miara odcinka $m(AB)$, którą oznacza się też jako $|AB|_{NE}$ jest równa $|x_A - x_B|$, gdzie x_A, x_B – współrzędne punktów A i B .

Przykład: Punkty A, B i S , który jest środkiem modelu Kleina, będącego kołem o promieniu 1, leżą na jednej prostej. Punkt A leży w euklidesowej odległości $\frac{2}{3}$ od S , zaś B leży w euklidesowej odległości $\frac{1}{2}$ od S , jak na rysunku poniżej. Obliczmy nieeuklidesową odległość $|AB|_{NE}$.

Szukana wielkość $|AB|_{NE} = |x_B - x_A|$. Obliczmy współrzędne punktów A i B :



$$x_A = \frac{1}{2} \ln \frac{|AP|_E}{|AQ|_E} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 - |AS|_E}{1 + |AS|_E} = \frac{1}{2} \ln \frac{\frac{3}{5}}{\frac{5}{3}} = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{5},$$

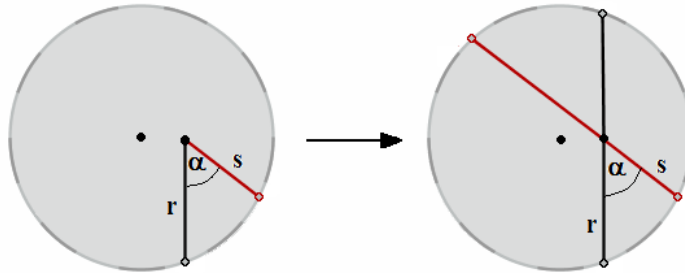
$$x_B = \frac{1}{2} \ln \frac{|BQ|_E}{|BQ|_E} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + |BS|_E}{1 - |BS|_E} = \frac{1}{2} \ln \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln 3,$$

Zatem $|AB|_{NE} = \left| \frac{1}{2} \ln 3 - \frac{1}{2} \ln \frac{1}{5} \right| = \frac{1}{2} \ln 15 \approx 1,35$.

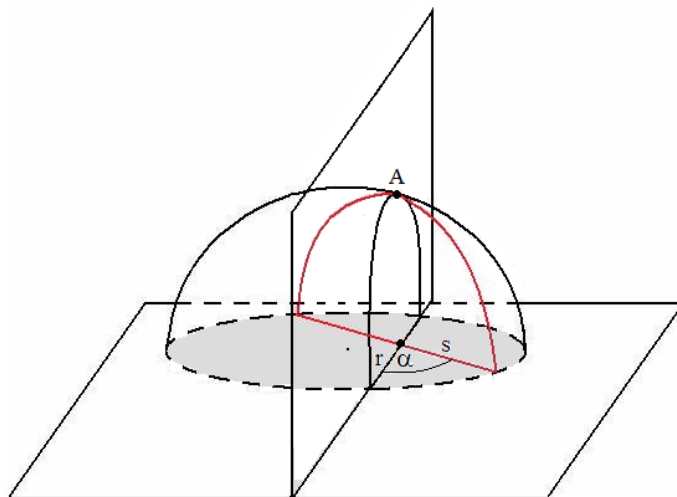
6. Miara kątów

Przy definiowaniu miary kąta w modelu Kleina stosujemy następującą procedurę:

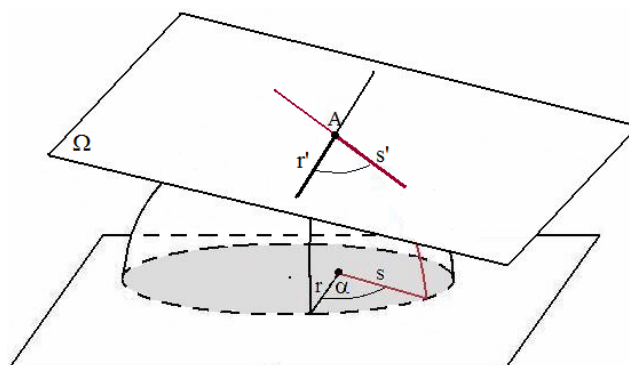
- a) ramionom kąta przyporządkowujemy cięciwy, w których te ramiona się zawierają;



- b) rysujemy pomocniczą półsferę, której brzeg jest wspólny z modelem, jak na rysunku poniżej. Przyjmujemy, że model znajduje się na płaszczyźnie poziomej. Otrzymanym w poprzednim kroku cięciwom przyporządkowujemy na tej półsferze półokręgi, które są zawarte w pionowych półpłaszczyznach i mają te same końce, co cięciwy;



- c) rozważamy euklidesową miarę kąta pomiędzy półokręgami: w punkcie A , który jest punktem przecięcia półokręgów prowadzimy płaszczyznę Ω styczną do półsfer. Na płaszczyźnie Ω w punkcie A konstruujemy euklidesowe proste styczne do półokręgów.

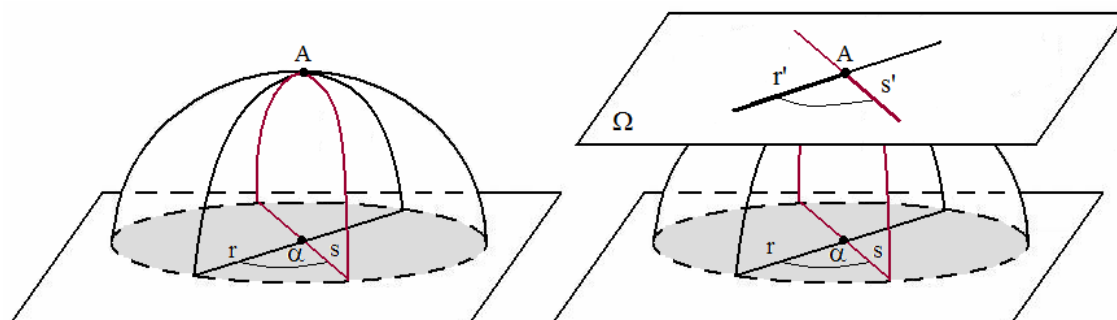


Definicja 2.5. Hiperboliczna miara kąta o ramionach r i s jest równa euklidesowej mierze kąta pomiędzy stycznymi do półokręgów:

$$\mu(rs) = |\angle r's'|_E$$

Uwaga: Na ogół określona w powyższy sposób miara kąta jest różna od euklidesowej miary kąta pomiędzy cięciwami.

Szczególnym przypadkiem jest sytuacja, gdy wierzchołek kąta o ramionach r i s znajduje się w punkcie będącym środkiem modelu. Wtedy procedura znalezienia miary kąta $\mu(rs)$ wygląda następująco:



W tym przypadku płaszczyzna Ω jest równoległa do płaszczyzny modelu Kleina, zatem $|\angle r's'|_E = |\angle rs|_E$, stąd $\mu(rs) = |\angle rs|_E$. Stąd wynika poniższy fakt:

Fakt 2.6. Dla prostych będących średnicami (bądź dla półprostych zawartych w średnicach modelu) nieeuklidesowa miara kąta pomiędzy tymi prostymi (półprostymi) jest równa euklidesowej mierze tego kąta.

2.3 Spełnianie aksjomatów geometrii nieeuklidesowej

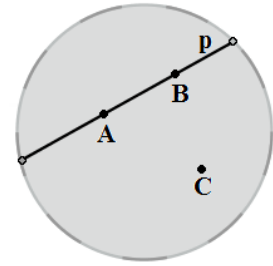
Wiemy już, jak wygląda interpretacja pojęć pierwotnych w modelu Kleina. Pokażemy teraz, że spełniają one wszystkie aksjomaty geometrii Łobaczewskiego i tym samym uzasadnimy jej niesprzeczność.

W tym rozdziale będziemy odwoływać się do treści i numeracji aksjomatów z rozdziału 1.

Weryfikacja aksjomatów incydencji

Aksjomat I1. Dla dowolnych różnych punktów A i B istnieje dokładnie jedna prosta p przechodząca przez te punkty – jest to cięciwa ustalonego koła, która przechodzi przez punkty A i B .

Aksjomat I2. Proste w modelu Kleina można utożsamiać z prostymi euklidesowymi ograniczonymi do wnętrza ustalonego koła. Na każdym ograniczonym odcinku prostej euklidesowej leżą przynajmniej dwa punkty, więc proste w modelu Kleina również zawierają przynajmniej dwa punkty.



Aksjomat I3. Rozważmy prostą p oraz punkty A, B, C jak na rysunku obok. W takim przypadku nie istnieje prosta zawierająca jednocześnie punkty A, B, C .

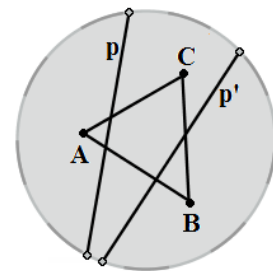
Weryfikacja aksjomatów porządku

Aksjomat P1. W poniższych rozumowaniach będziemy korzystać z faktów, iż hiperboliczne współrzędne są zgodne z porządkiem (Fakt 2.3) oraz że opisane w aksjomacie P1 własności zachodzą dla liczb rzeczywistych ze zwykłą nierównością.

Dla punktów z dowolnej prostej p relacja $<_p$ jest relacją liniowego porządku:

- jeśli $A <_p B$, to $x_A < x_B$, więc $x_A \neq x_B$, czyli $A \neq B$.
- jeśli $A \in p, B \in p$ oraz $A \neq B$ to $x_A \neq x_B$, z czego wynika, że $x_A < x_B$ lub $x_A > x_B$, czyli $A <_p B$ lub $B <_p A$.
- jeśli $A <_p B$ i $B <_p C$, to $x_A <_p x_B$ i $x_B <_p x_C$, a więc $x_A <_p x_C$, skąd mamy $A <_p C$.

Aksjomat P2. Niech A, B, C będą punktami z wnętrza ustalonego koła będącego modelem Kleina. Poprowadźmy dowolną prostą p nieprzechodzącą przez żaden z punktów A, B, C i przecinającą odcinek AB . Proste w modelu Kleina powstają przez odpowiednie obcięcie prostych euklidesowych. Przedłużmy więc ponownie prostą p do prostej euklidesowej i rozważmy powyższą sytuację na całej płaszczyźnie \mathbb{R}^2 (czyli euklidesowej) - wtedy aksjomat P2 jest spełniony, co oznacza, że przedłużona prosta p przecina dokładnie jeden z boków AC lub BC . Ograniczając znowu prostą p do ustalonego koła tak naprawdę nie zmienimy właściwości obiektów, tylko weźmiemy pod uwagę pewną część płaszczyzny euklidesowej, więc także dla niego aksjomat P2 jest spełniony.

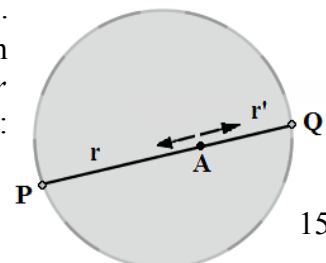


Weryfikacja aksjomatów miary odcinków

Aksjomat M1. Z Faktu 2.1 różne punkty A, B mają różne współrzędne x_A, x_B , a zatem dla każdego dwóch punktów A i B mamy $|x_A - x_B| > 0$, więc dla każdego odcinka AB miara $m(AB)$ jest liczbą dodatnią.

Aksjomat M2. Poprowadźmy dowolną półprostą r o początku w punkcie A . Niech d będzie dowolną liczbą dodatnią. Szukamy takiego punktu $B \in r$, że $m(AB) = d$. Na mocy Definicji 2.4 $m(AB) = |x_A - x_B|$, gdzie x_A i x_B są hiperbolicznymi współrzędnymi punktów A i B .

Chcemy, by x_B było takie, że $|x_A - x_B| = d$, czyli $x_A - x_B = d$ lub $x_A - x_B = -d$, z czego wyliczamy, że $x_B = x_A - d$ lub $x_B = x_A + d$. Otrzymaliśmy współrzędne dwóch punktów. Aby określić ich położenie, prowadzimy półprostą r' o początku w A , która dopełnia r do prostej PQ . Z Faktu 2.2 na prostej PQ istnieją dwa różne punkty:



jeden o współrzędnej $(x_A - d)$ a drugi o współrzędnej $(x_A + d)$. Jeden z nich leży na półprostej r , natomiast drugi na półprostej r' (na której półprostej leży dany punkt jest uzależnione od wyboru kierunku na prostej PQ). Z dowolności doboru półprostej r aksjomat M2 jest spełniony.

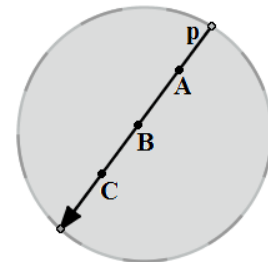
Aksjomat M3. Niech punkty $A, B, C \in p$, gdzie p jest dowolną prostą płaszczyzny hiperbolicznej i niech $A <_p B <_p C$, wobec czego z Faktu 2.3 mamy $x_A < x_B < x_C$. Obliczmy miary odcinków AB i BC :

$$m(AB) = |x_A - x_B| = x_B - x_A, \quad m(BC) = |x_B - x_C| = x_C - x_B.$$

Suma tych miar jest równa:

$$m(AB) + m(BC) = (x_B - x_A) + (x_C - x_B) = x_C - x_A = m(AC),$$

więc aksjomat M3 jest spełniony.

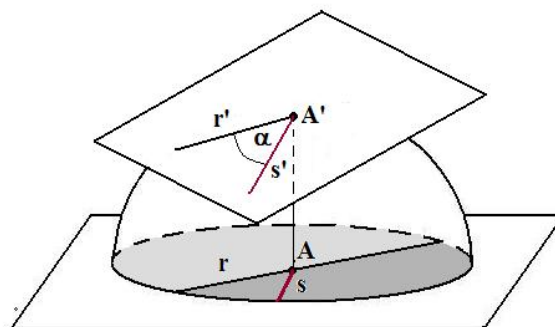
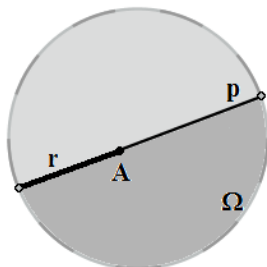


Weryfikacja aksjomatów miary kątów

Aksjomat K1. Ponieważ $\mu(rs) = \angle r's'|_E$, więc (podobnie jak na płaszczyźnie euklidesowej) $\mu(rs) \in (0, \pi)$ dla dowolnych półprostych r i s o wspólnym początku i niezawartych we wspólnej prostej.

Aksjomat K2. Niech: p - dowolna prosta,
 Ω - dowolna półpłaszczyzna ograniczona przez p ,
 r - dowolna półprosta zawarta w p ,
 α - dowolna ustalona liczba z przedziału $(0, \pi)$.

Z punktu A chcemy poprowadzić taką półprostą $s \subset \Omega$, że $\mu(rs) = \alpha$.

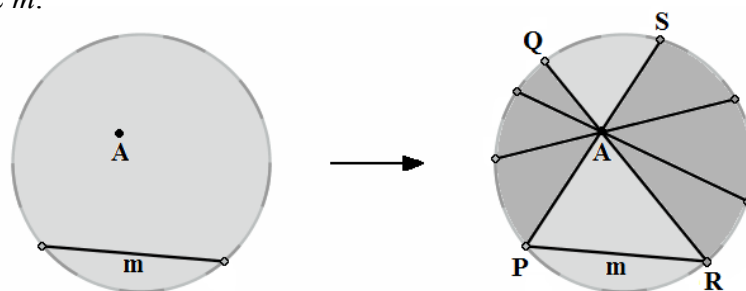


Aby wyznaczyć półprostą s , rysujemy półsferę o brzegu wspólnym z modelem, a następnie w punkcie A prowadzimy prostą prostopadłą do płaszczyzny modelu Kleina. Punkt wspólny tej prostej i półsfery oznaczamy jako A' . Na płaszczyźnie stycznej do sfery w punkcie A' odkładamy po odpowiedniej stronie półprostej r' kąt o euklidesowej mierze równej α , otrzymując półprostą s' . Następnie rzutujemy s' prostokątnie na model i otrzymujemy półprostą s o początku A . Zgodnie z interpretacją miary kąta nieeuklidesowa miara kąta rs jest równa euklidesowej mierze kąta $r's'$, czyli wynosi α . Istnienie półprostej s dowodzi spełnienia aksjomatu K2 w modelu Kleina.

Aksjomat K3. Aksjomat ten jest spełniony w modelu, jednak pominiemy jego dowód, ponieważ wymaga on skomplikowanych rozumowań, które przekraczają ramy tego wykładu.

Weryfikacja aksjomatu Łobaczewskiego

Istnieje punkt A i prosta m taka, że $A \notin m$ i przez A przechodzą co najmniej dwie proste nieprzecinające m .



Niech prosta m zawiera się w cięciwie PR . Z końców cięciwy prowadzimy proste PS i QR przechodzące przez dowolny punkt $A \notin m$. Każda prosta przechodząca przez A i będąca cięciwą, której jeden koniec należy do łuku PQ , a drugi do łuku RS , nie przecina m , zatem w modelu Kleina przez dowolny punkt A taki, że $A \notin m$ przechodzi nieskończenie wiele prostych rozłącznych z prostą m , zatem aksjomat Łobaczewskiego jest spełniony.

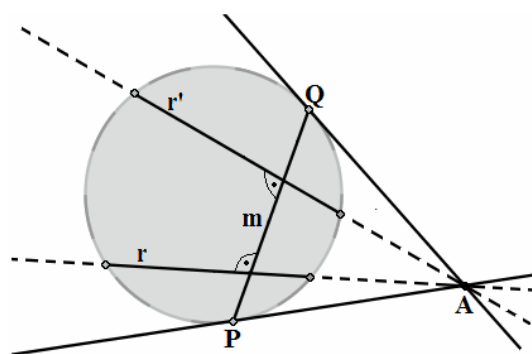
2.4 Własności geometrii nieeuklidesowej wyprowadzane za pośrednictwem modelu Kleina

2.4.1 Prostopadłość w geometrii nieeuklidesowej.

Aby móc badać zjawisko prostopadłości prostych w modelu Kleina, zobaczymy, w jaki sposób można wyznaczyć proste prostopadłe do dowolnej prostej m bez odwoływania się do pomocniczej półsfery. Metoda wyznaczania prostych prostopadłych jest uzależniona od tego, czy dana prosta m zawiera się w średnicy modelu Kleina, czy też nie, dlatego rozpatrzmy dwa przypadki. Oto pierwszy z nich:

Prostopadłość względem prostej reprezentowanej cięciwą nieprzechodzącą przez środek modelu.

Fakt 2.7. *Prostą prostopadłą do dowolnej prostej m , która w modelu Kleina jest reprezentowana cięciwą nieprzechodzącą przez środek modelu, jest każda prosta r , której przedłużenie przechodzi przez punkt A taki, że A jest punktem przecięcia stycznych do modelu w punktach P i Q będących końcami cięciwy reprezentującej prostą m . Tak określone proste są jedynymi prostopadłymi do m w modelu Kleina.*



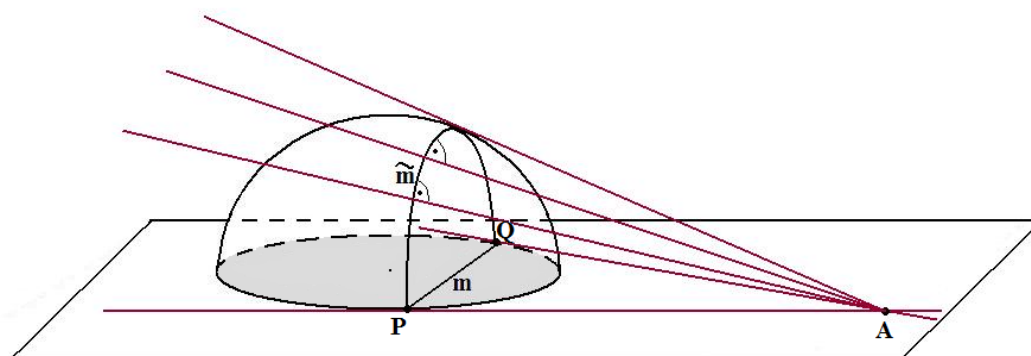
$$\mu(rm) = \mu(ms) = 90^\circ$$

Dowód: Zgodnie z powyższym faktem, aby móc wyznaczyć proste prostopadłe do m , musimy poprowadzić styczne do modelu w punktach P i Q jak wyżej, a następnie wyznaczyć punkt A będący punktem przecięcia tych stycznych. Każda prosta przechodząca przez punkt A ,

która zawiera się w obszarze pomiędzy stycznymi, ograniczona do wnętrza modelu daje nam prostą prostopadłą do danej m .

Uzasadnijmy, dlaczego przeprowadzona zgodnie z Faktem 2.7 konstrukcja prostopadłych jest poprawna i jaki jest związek pomiędzy tą konstrukcją a interpretacją kąta przedstawioną w rozdziale 2.1, w punkcie 6.

Narysujmy pomocniczą półsferę, której brzeg jest wspólny z modelem i wyznaczmy na tej półsfery półokrąg \tilde{m} , który jest zawarty w pionowej półpłaszczyźnie (model znajduje się na płaszczyźnie poziomej) i ma te same końce, co cięciwa PQ reprezentująca prostą m (patrz rysunek poniżej). Następnie poprowadźmy półstożek styczny do półsfery wzdłuż \tilde{m} . Tworzące tego stożka są euklidesowo prostopadłe do \tilde{m} , co oznacza, że jeśli poprowadzimy styczne do półokręgu \tilde{m} w punktach jego przecięcia z tworzącymi stożka, to otrzymamy kąty proste znajdujące się na płaszczyznach stycznych do półsfery w tych punktach przecięcia. Zatem zgodnie z interpretacją kąta w modelu Kleina rzut prostokątny dowolnej tworzącej stożka po ograniczeniu do wnętrza modelu daje prostą nieeuklidesowo prostopadłą do m . Na rysunku powyżej widzimy na płaszczyźnie zawierającej model rzuty tworzących stożka – są proste, których przedłużenia przechodzą przez A , czyli proste r i r' prostopadłe do m .

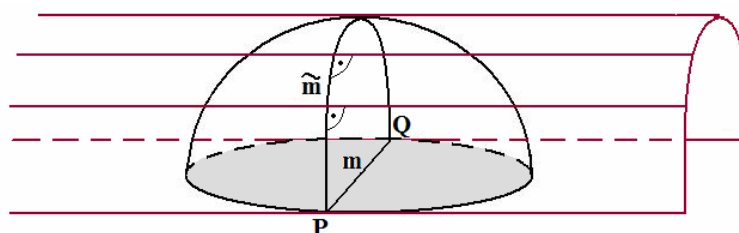


Powyższego rozumowania nie można przeprowadzić dla prostej m zawartej w średnicy modelu, gdyż w tej sytuacji nie da się poprowadzić półstożka stycznego do półokręgu \tilde{m} , dlatego jako drugi przypadek zjawiska prostopadłości rozpatrujemy:

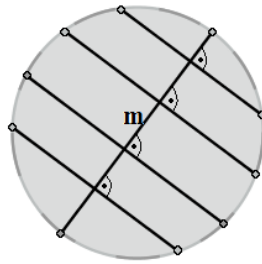
Prostopadłość względem prostej reprezentowanej cięciwą będącą średnicą w modelu.

Fakt 2.8. *Nieeuklidesowymi prostopadłymi do prostej m reprezentowanej w modelu Kleina średnicą są cięciwy euklidesowo prostopadłe do m .*

Dowód: Aby wyznaczyć prostopadłe do ustalonej prostej m , która jest średnicą bez końców, prowadzimy półsferę o brzegu wspólnym z modelem i wyznaczamy na tej półsfery półokrąg \tilde{m} , który jest zawarty w pionowej półpłaszczyźnie (model jest na płaszczyźnie poziomej) i ma te same końce, co cięciwa PQ reprezentująca prostą m . Następnie prowadzimy półwalec, który jest styczny do półsfery wzdłuż \tilde{m} .



Tworzące walca są euklidesowo prostopadłe do \tilde{m} , więc zgodnie z interpretacją kąta w modelu Kleina rzut prostokątny dowolnej tworzącej po ograniczeniu do wnętrza modelu daje prostą nieeuklidesowo prostopadłą do m , która jednocześnie jest też prostopadłą do m w sensie euklidesowym.

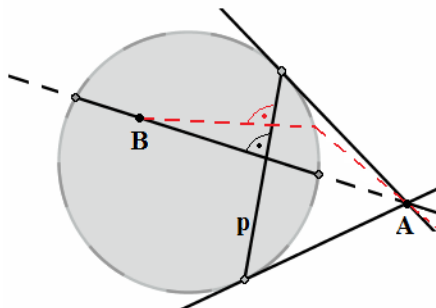


Skoro już wiemy, jak w łatwy sposób wyznaczać proste prostopadłe do danej w modelu Kleina, przyjrzyjmy się niektórym własnościom prostopadłości w geometrii nieeuklidesowej wyprowadzonym właśnie przy pomocy tego modelu.

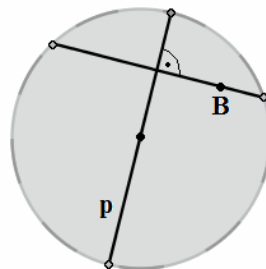
Własności związane z prostopadłością.

Własność 2.9. *Przez każdy punkt B przechodzi dokładnie jedna prostopadła do danej prostej p .*

Dowód: W dowodzie tej własności rozpatrzmy dwa przypadki. Pierwszy z nich dotyczy sytuacji, gdy prosta p nie jest w modelu średnicą. Dla takiej prostej wyznaczamy punkt A tak, jak zostało to opisane w fakcie 2.7. Następnie mając punkty A i B łatwo zauważyć, że dowód własności 2.9 sprowadza się do uzasadnienia, że przez dwa różne punkty A, B przechodzi dokładnie jedna prosta, a jak wiemy na płaszczyźnie euklidesowej własność ta jest spełniona.

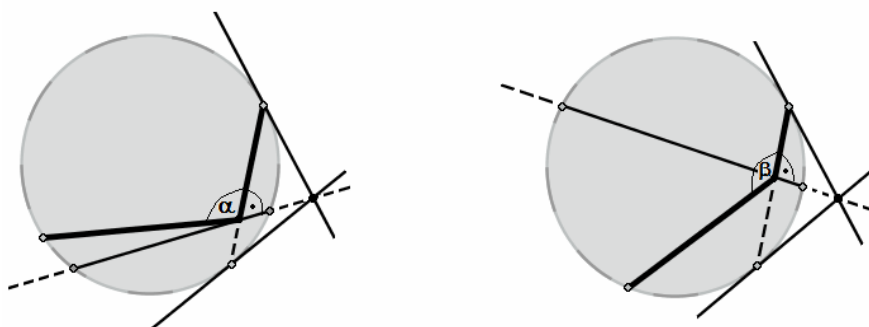


W drugim przypadku prosta p jest reprezentowana średnicą modelu. W takiej sytuacji na mocy Faktu 2.8 mamy do czynienia z prostymi prostopadłymi w sensie euklidesowym ograniczonymi do wnętrza ustalonego koła, dla których udowodniana własność jest prawdziwa.

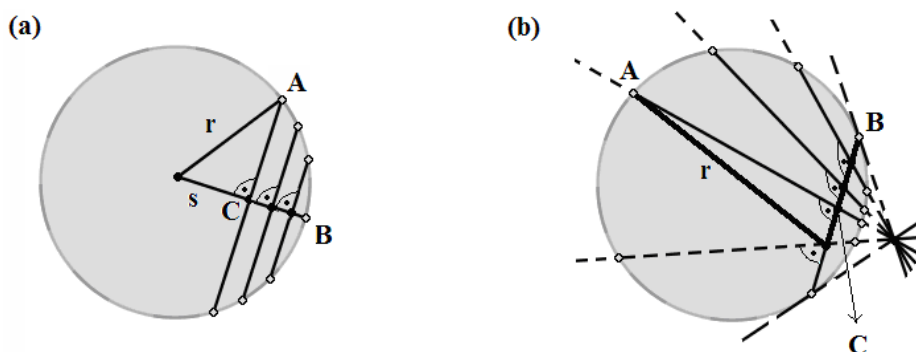


Własność 2.10. *Nie wszystkie proste prostopadłe do jednego ramienia kąta ostrego przecinają jego drugie ramię.*

Dowód: Zanim dowiedzimy powyższej własności, zastanówmy się, jak w modelu Kleina w łatwy sposób i bez odwoływania się do półsfery określić, czy mamy do czynienia z kątem ostrym. Na mocy Faktu 2.6 kąty o wierzchołku w środku modelu mają miarę równą mierze euklidesowej, więc w ich przypadku ustalenie, czy dany kąt jest ostry, nie sprawi trudności. Problem pojawia się w przypadku kąta, którego wierzchołek nie leży w środku modelu. Otóż w tym przypadku musimy skorzystać z tego, że potrafimy już bez odwoływania się do półsfery wyznaczyć w modelu prostą prostopadłą do danej (Fakt 2.7 i Fakt 2.8), a więc potrafimy wyznaczyć kąt prosty. Każdy kąt mniejszy od prostego jest ostry. Jeśli zatem mamy dany kąt i chcemy ustalić, czy jest ostry, prowadzimy prostą prostopadłą do jednego z jego ramion przechodzącą przez wierzchołek kąta i sprawdzamy, czy drugie ramię kąta zawiera się pomiędzy pierwszym ramieniem a tą prostopadłą. Zgodnie z tą procedurą w przykładach na rysunkach poniżej zostało pokazane, że kąt α jest kątem ostrym, a β nim nie jest.



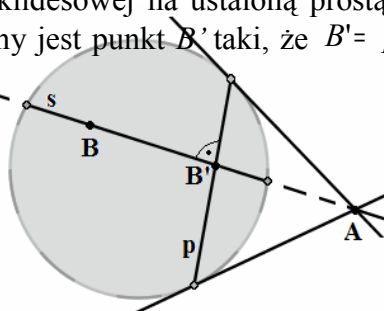
Wróćmy teraz do Własności 2.10. Udowodnimy, że w każdym kącie ostrym istnieją proste prostopadłe do jednego z jego ramion, które nie przecinają drugiego ramienia. Weźmy dowolny kąt ostry i nazwijmy jego ramiona r i s , a punkty na brzegu modelu będące odpowiednio „końcami” tych ramion – A i B . Poprowadźmy teraz prostopadłą do s przechodzącą przez A . Wyznacza ona na ramieniu s punkt C . Wszystkie prostopadłe do s , poprowadzone przez punkty leżące pomiędzy B i C nie przetną ramienia r . Na rysunku (a) poniżej przedstawiono tę sytuację dla kąta o wierzchołku w środku modelu, a na rysunku (b) dla kąta, którego wierzchołek nie jest środkiem modelu.



Rzut prostokątny na prostą.

Własność 2.9 pozwala zdefiniować rzut prostokątny na prostą na płaszczyźnie nieeuklidesowej.

Definicja 2.11. Rzutem prostokątnym na prostą na płaszczyźnie nieeuklidesowej nazywamy odwzorowanie płaszczyzny nieeuklidesowej na ustaloną prostą p w ten sposób, że każdemu punktowi B płaszczyzny przypisany jest punkt B' taki, że $B' = p \cap s$, gdzie s jest prostopadłą do p przechodzącą przez punkt B .



Tak zdefiniowany rzut prostokątny posiada analogiczne własności, jak rzut prostokątny na płaszczyźnie euklidesowej, tzn. nie jest przekształceniem wzajemnie jednoznacznym (gdyż każdy punkt prostej p jest obrazem nieskończenie wielu punktów modelu Kleina), a każdy punkt prostej p jest punktem stałym tego przekształcenia (czyli jest swoim obrazem przez to przekształcenie).

2.4.2 Asymptotyczność i rozbieżność w geometrii nieeuklidesowej.

W tym rozdziale opiszemy pary prostych w geometrii nieeuklidesowej, które nie mają punktów wspólnych. Zrobimy to w dwojaki sposób: najpierw zdefiniujemy pojęcia określające te pary prostych, czyli asymptotyczność i rozbieżność niezależnie od modelu, by następnie omówić je w szczególnym przypadku – w modelu Kleina.

Na płaszczyźnie euklidesowej prosta asymptotyczna (tzw. asymptota) do danej krzywej l oznacza prostą, której odległość od l w nieskończoności zmierza do zera, czyli innymi słowy jest to prosta, która coraz bardziej zbliża się do l , jednak nigdy jej nie przetnie. W geometrii nieeuklidesowej pojęcie asymptotyczności dotyczy nie tylko położenia prostej w stosunku do krzywej, ale odnosi się również do dwóch prostych. Takie proste można traktować jako zbliżające się do siebie, jednak nie będziemy badać odległości pomiędzy nimi (na końcu rozdziału 2 znajduje się związane z tym zadanie – zad. 13 na str. 34), a posłużymy się pewną własnością, która pomoże zdefiniować nam te proste, a która powołuje się na intuicyjny fakt, że asymptota to „ostatnia” prosta nieprzecinająca danej prostej.

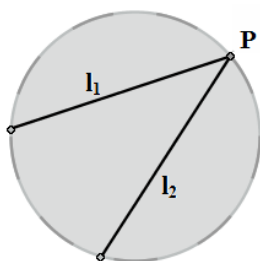
Definicja 2.12. Rozłączne proste l_1, l_2 nazywamy asymptotycznymi, jeśli po obróceniu dowolnej z nich wokół dowolnego punktu na niej w stronę drugiej prostej o dowolny kąt, proste te przetną się.

Gdy rozłączne proste nie są asymptotyczne, to wtedy mówimy, że są rozbieżne i definiujemy je w następujący sposób:

Definicja 2.13. Rozłączne proste l_1, l_2 nazywamy rozbieżnymi (rozchodzącymi), jeśli po obróceniu dowolnej z nich wokół dowolnego punktu na niej i w dowolną stronę o dostatecznie mały kąt proste pozostają rozłączne.

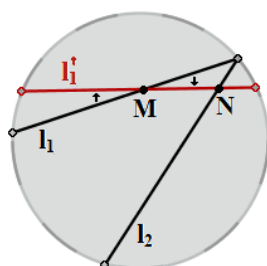
Wróćmy raz jeszcze do określenia asymptotyczności prostej do krzywej na płaszczyźnie euklidesowej. Definicję tę można rozumieć też w taki sposób, że gdyby nieskończoność uznać za miejsce, w którym płaszczyzna by się kończyła, to właśnie na tym końcu prosta i jej asymptota miałyby punkt wspólny. Ta interpretacja posłużyła do zdefiniowania asymptotyczności i rozbieżności w modelu Kleina. Mamy tu bowiem do czynienia ze specyficzną sytuacją, gdy możemy wskazać „koniec” płaszczyzny tego modelu – jest to brzeg ustalonego koła, czyli okrąg.

Definicja 2.14. W modelu Kleina rozłączne proste l_1, l_2 nazywamy asymptotycznymi, jeżeli posiadają punkt wspólny na przedłużeniu do brzegu modelu.



P – punkt wspólny przedłużeń prostych l_1, l_2

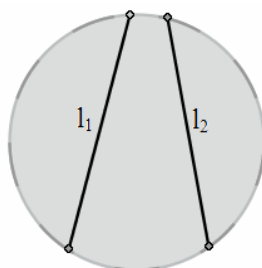
Definicja ta jest równoważna Definicji 2.12, gdyż jeśli którąkolwiek z prostych (np. l_1 jak na rysunku poniżej) obrócimy wokół dowolnego punktu w stronę drugiej, to proste te przetną się.



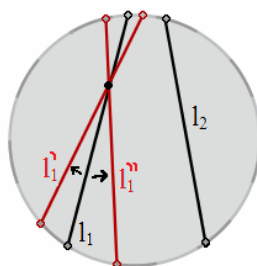
M – punkt, względem którego obracamy l_1
 N – punkt przecięcia l_1' z prostą l_2

W przeciwnym wypadku, niż określa Definicja 2.14, proste w modelu Kleina są rozbieżne i definiujemy je następująco:

Definicja 2.15. W modelu Kleina rozłączne proste l_1, l_2 nazywamy rozbieżnymi, jeśli po przedłużeniu ich do brzegu modelu proste te nie przetną się.



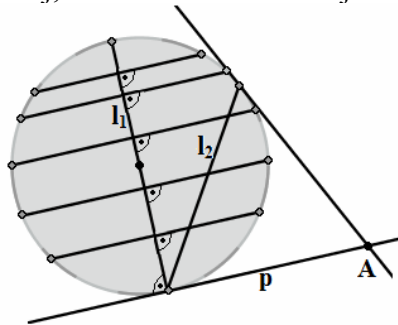
Definicja prostych rozbieżnych l_1, l_2 w modelu Kleina jest równoważna Definicji 2.13, gdyż obrót dowolnej z nich o dostatecznie mały kąt nie powoduje przecięcia się tych prostych. Przykładowo pokazujemy obrót l_1 z powyższego rysunku:



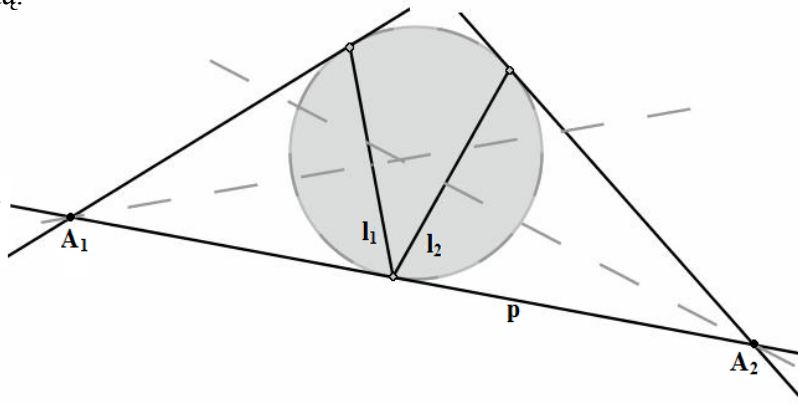
Proste nieprzecinające się w zależności od tego, czy są asymptotyczne czy rozbieżne, posiadają pewne własności:

Własność 2.16. *Proste asymptotyczne l_1, l_2 nie mają wspólnej prostopadłej.*

Dowód: Dowód tej własności pokażemy dla dwóch przypadków. W pierwszym z nich jedna z prostych asymptotycznych zawiera się w średnicy modelu, jak na rysunku poniżej. Wówczas gdyby proste l_1 i l_2 miały wspólną prostopadłą, musiałaby ona zawierać się w euklidesowej prostej przechodzącej przez punkt A i euklidesowo prostopadłej do l_1 , ale te warunki spełnia już euklidesowa prosta p , która nie ma wspólnej części z modelem, a więc nie wyróżnimy na niej prostej z geometrii Kleina. Nie istnieje inna prosta niż p spełniająca wymienione warunki, ponieważ na płaszczyźnie \mathbb{R}^2 przez dany punkt A przechodzi dokładnie jedna prosta prostopadła do danej, zatem własność 2.16 jest spełniona.

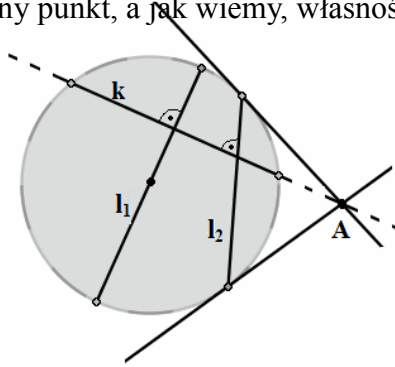


W drugim przypadku (patrz rysunek poniżej) rozważamy sytuację, gdy żadna z prostych nie zawiera się w średnicy modelu. Gdyby istniała wtedy wspólna prostopadła prostych l_1 i l_2 , musiałaby ona przechodzić przez punkty A_1 i A_2 . Jednak przez te punkty przechodzi już prosta p rozłączna z modelem Kleina, więc istnienie drugiej takiej prostej, różnej od p , oznaczałoby, że na płaszczyźnie euklidesowej przez dwa ustalone punkty przechodzą dwie różne proste, co jest nieprawdą.

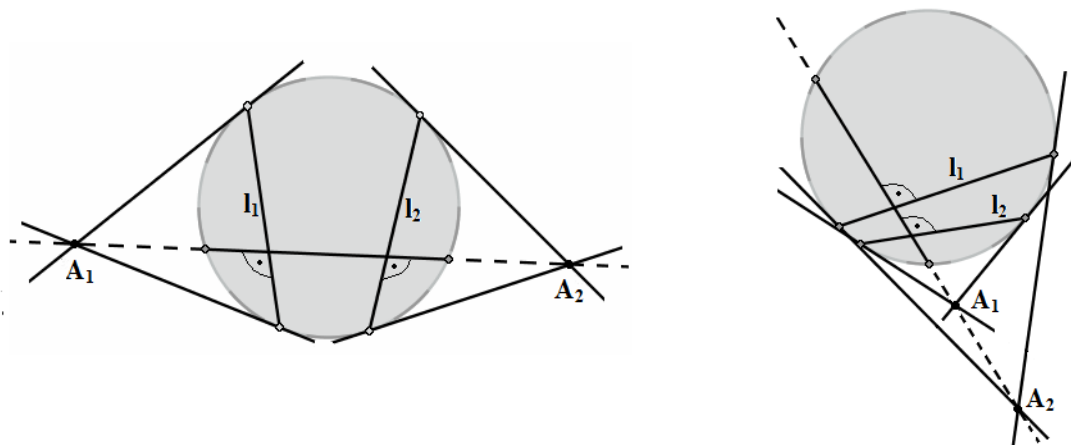


Własność 2.17. *Proste rozbieżne l_1, l_2 mają wspólną prostopadłą i to dokładnie jedną.*

Dowód: Rozpatrzmy najpierw sytuację, gdy jedna z prostych zawiera się w średnicy modelu. Zgodnie z Faktem 2.6 prostopadłą do prostej l_1 jest prosta k , jak na rysunku poniżej, która euklidesowo przecina ją pod kątem prostym. Prostopadłe do l_2 to proste, których przedłużenia przechodzą przez punkt A . Dowód tej własności sprowadza się więc do uzasadnienia, że na płaszczyźnie euklidesowej istnieje dokładnie jedna prosta prostopadła do danej przechodząca przez ustalony punkt, a jak wiemy, własność ta jest prawdziwa dla \mathbb{R}^2 .



Pozostaje nam jeszcze udowodnienie własności 2.17 dla prostych, z których żadna nie zawiera się w średnicy modelu. Przypadek ten dotyczy dwóch sytuacji, które zostały przedstawione na rysunkach poniżej. Wiemy, że na płaszczyźnie euklidesowej istnieje dokładnie jedna prosta przechodząca przez punkty A_1 i A_2 . Poprzez ograniczenie tej prostej do wnętrza modelu otrzymujemy prostopadłą do l_1 i l_2 .



Własność 2.18. *Dwie różne proste prostopadłe do danej prostej są względem siebie rozbieżne.*

Dowód: Gdy dana prosta zawiera się w średnicy modelu, to zgodnie z Faktem 2.6 mamy do czynienia z prostopadłością euklidesową. Dwie różne proste euklidesowo prostopadłe do ustalonej m nie mają punktów wspólnych, więc dwie dowolne proste z modelu Kleina, które są prostopadłe do średnicy, także nie będą miały punktów wspólnych, nawet po przedłużeniu ich do brzegu modelu, czyli z Definicji 2.15 są one rozbieżne.

Rozważmy teraz sytuację, gdy dana prosta m nie jest średnicą modelu. W takim przypadku przedłużenia wszystkich prostopadłych do m przechodzą przez punkt A , będący punktem wspólnym stycznych do modelu, poprowadzonych w końcach cięciwy reprezentującej prostą m . Gdyby dwie prostopadłe do m nie były rozbieżne, to miałyby punkt wspólny B (w modelu albo na jego brzegu). Oznaczałoby to, że dwie różne proste mają dwa punkty wspólne: A i B , co na płaszczyźnie nieeuklidesowej (na euklidesowej też) nie jest możliwe, zatem i w tym przypadku dwie różne proste prostopadłe do m muszą być rozbieżne.

2.4.3 Wielokąty na płaszczyźnie nieeuklidesowej.

Na płaszczyźnie nieeuklidesowej wielokąty budujemy podobnie, jak na \mathfrak{R}^2 , czyli łącząc ze sobą w odpowiedni sposób odcinki. Własności tych figur różnią się jednak od tych, które znamy z geometrii Euklidesa, co pokażą przedstawione w tym rozdziale przykłady.

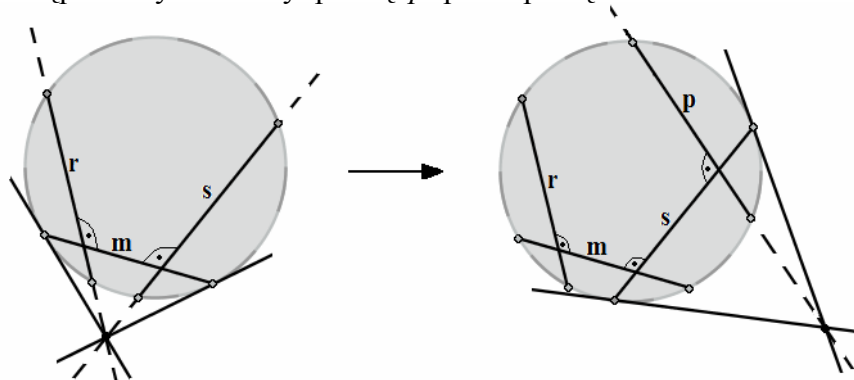
Własność 2.19. *Nie istnieje prostokąt.*

Dowód: Załóżmy nie wprost, że w modelu Kleina istnieje prostokąt. Poprowadźmy dowolną prostą m i skonstruujmy dwie dowolne proste n i p prostopadłe do m . Z własności 2.18 proste n i p są rozbieżne. Mamy już dwa kąty proste. Teraz, aby uzyskać pozostałe dwa kąty proste, musimy poprowadzić prostą prostopadłą do n i p , różną od m . Z własności 2.17 taka prosta jednak nie istnieje, gdyż jedyną prostopadłą do n i p jest m , więc konstrukcja prostokąta nie jest możliwa.

Własność 2.20. Istnieje pięciokąt „prostokątny”, czyli pięciokąt mający wszystkie kąty proste.

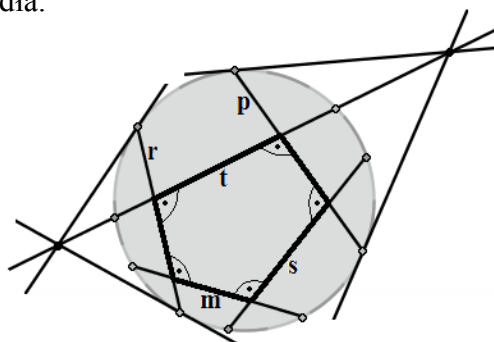
Dowód: Przeprowadzimy konstrukcję takiego pięciokąta w modelu Kleina:

- a) poprowadzimy dowolną prostą m i konstruujemy dwie proste r i s prostopadłe do m , a następnie wyznaczamy prostą p prostopadłą do s a zarazem rozbieżną do r :



Pomiędzy prostymi r , m , s i p otrzymujemy trzy kąty proste, jak na powyższym rysunku.

- b) Aby otrzymać dwa pozostałe kąty proste, musimy skonstruować prostą t prostopadłą do prostych rozbieżnych r i p . Jak wynika z Własności 2.17, istnieje dokładnie jedna taka prostopadła.

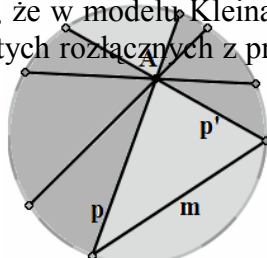


Odcinki z prostych m , s , p , t , r , które na rysunku zostały pogrubione, utworzyły pięciokąt, w którym wszystkie kąty są proste.

Uwaga: Konstruując pięciokąt prostokątny należy w taki sposób dobrać prostą p , by odcinek na prostej s był odpowiednio długi. Dzięki temu będziemy mieli gwarancję, że skonstruowana prosta t nie przetnie s ani m .

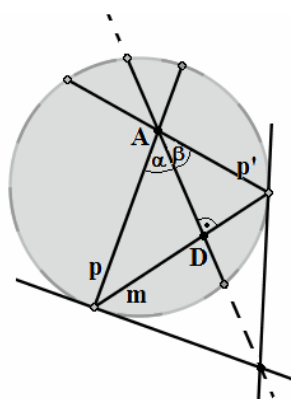
2.4.4 Kąt równoległości i funkcja Łobaczewskiego.

W rozdziale 2.1 pokazaliśmy, że w modelu Kleina dla dowolnej prostej m i punktu $A \notin m$ istnieje nieskończenie wiele prostych łączących A z prostą m i przechodzących przez A . W tym



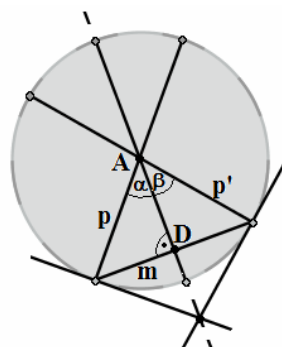
celu konstruowaliśmy proste: p i p' , które oddzielały proste przecinające m od prostych nieprzecinających m (patrz rysunek poniżej). Te dwie szczególne proste, w odróżnieniu od innych spełniających powyższe warunki, po przedłużeniu do brzegu modelu mają punkt wspólny z m , więc zgodnie z Definicją 2.14 są do niej asymptotyczne. Posłużą nam one do zdefiniowania kąta równoległości.

Definicja 2.21. Kątem równoległości nazywamy kąt α znajdujący się pomiędzy prostą prostopadłą do m , przechodzącą przez punkt A a prostą asymptotyczną do m , także przechodzącą przez punkt A .



W związku z tym, że istnieją dwie proste asymptotyczne do m , prowadząc prostopadłą do m wyznaczymy dwa kąty α , β jak na rysunku powyżej, które będziemy mogli nazwać kątami równoległości. Wybór, który z nich wybierzemy nie ma jednak znaczenia, gdyż ich miary są sobie równe. Dowód tego faktu przedstawimy tylko dla kątów, których wierzchołek jest środkiem modelu, gdyż w innym przypadku wymaga on znajomości twierdzeń, które przekraczają ramy tego skryptu.

Niech zatem punkt A będzie środkiem modelu. Wtedy kąt $\alpha + \beta$ znajduje się pomiędzy ramionami euklidesowego trójkąta równoramiennego, dla którego odcinek AD jest wysokością, więc kąty α i β są euklidesowo sobie równe. Na mocy Faktu 2.6 miary euklidesowe tych kątów są równe ich miarom nieeuklidesowym, zatem także ich nieeuklidesowe miary mają taką samą wartość.



Fakt 2.22. *Kąt równoległości jest zawsze kątem ostrym.*

Dowód: Kąt równoległości α musi mieć taką miarę, aby prosta p mogła być asymptotyczna do m , jak na rysunku powyżej. Gdyby α był kątem prostym, to p byłaby prostopadła do prostej, w której zawiera się odcinek AD . Do tej prostej jest również prostopadła prosta m i na mocy Własności 2.18 p i m byłyby względem siebie rozbieżne, co stanowiłoby sprzeczność z definicją kąta równoległości. Gdyby natomiast kąt α był większy od kąta prostego, wówczas p byłaby jeszcze bardziej oddalona od m niż w przypadku prostopadłej do odcinka AD , więc tym bardziej nie mogłaby być asymptotyczna do prostej m , co znów stanowiłoby sprzeczność z Definicją 2.21.

Fakt 2.23. *Miara kąta równoległości nie zależy od położenia punktu A , a jedynie od długości odcinka AD , czyli od odległości punktu A od prostej m .*

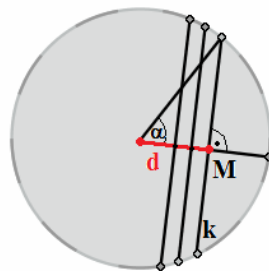
Dowód tego faktu pominiemy, gdyż znajduje się on w skrypcie [2] i jest zatytułowany jako Fakt 7.1 na str. 68.

Definicja 2.24. Miarę kąta równoległości w zależności od d , gdzie d jest długością odcinka AD , określa funkcja Łobaczewskiego zwana też funkcją równoległości, którą oznaczamy $\Pi(d)$. Jej dziedziną jest zbiór liczb należących do przedziału $(0, \infty)$, a do zbioru jej wartości należą kąty z przedziału $(0, \frac{\pi}{2})$.

Zanim przejdziemy do wyznaczenia wzoru tej funkcji, rozpatrzmy pewne pokrewne zjawisko geometryczne: mając dany kąt ostry α szukamy odległości $x(\alpha)$ wierzchołka tego kąta od punktu M , gdzie M jest pierwszym punktem na ramieniu α takim, że przechodząca przez niego prostopadła k nie przecina drugiego ramienia (w punkcie M prostopadła jest asymptotyczna do drugiego ramienia).

Zauważmy, że α jest kątem równoległości dla prostej k a szukana wartość $x(\alpha)$ jest równa d , gdzie d jest takie, jak w Definicji 2.24. Wcześniej określaliśmy miarę kąta równoległości α w zależności od d i to przyporządkowanie nazwaliśmy funkcją Łobaczewskiego ($\Pi: (0, \infty) \rightarrow (0, \frac{\pi}{2})$).

Teraz mamy do czynienia z określaniem d w zależności od kąta równoległości α (przyporządkowanie $(0, \frac{\pi}{2})$ w $(0, \infty)$), czyli z funkcją odwrotną do funkcji Łobaczewskiego.



$$d = x(\alpha) = \Pi^{-1}(\alpha)$$

Znajdźmy teraz wzór funkcji Łobaczewskiego. Zrobimy to w następujący sposób: najpierw wyliczymy $x(\alpha)$ a następnie skorzystamy z faktu, że jest to funkcja odwrotna do $\Pi(d)$.

Uwaga: Na płaszczyźnie euklidesowej w niektórych obliczeniach dla uproszczenia rachunków wymaganą sytuację geometryczną przedstawia się w dogodnym układzie współrzędnych. Podobnie postąpimy teraz, umieszczając punkt A w środku modelu Kleina.

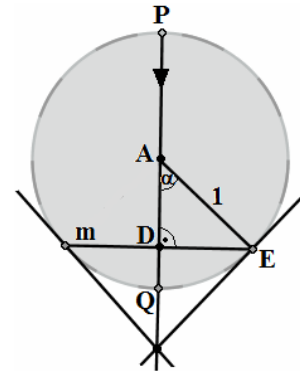
Prowadzimy prostopadłą do prostej m przechodzącą przez punkt A i obliczamy $x(\alpha)$, czyli

długość odcinka AD , zgodnie ze sposobem przedstawionym w Definicji 2.4:

$x(\alpha) = m(AD) = |x_A - x_D|$, gdzie x_A, x_D – współrzędne odpowiednio punktów A i D . Zgodnie z Definicją 2.1 współrzędne te obliczamy w następujący sposób:

$$x_A = \frac{1}{2} \ln \frac{|PA|_E}{|QA|_E} = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{1} = 0,$$

$$x_D = \frac{1}{2} \ln \frac{|PD|_E}{|QD|_E} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + |AD|_E}{1 - |AD|_E}.$$



Trójkąt ADE jest prostokątny, skąd wyliczamy :

$$|AD|_E = \frac{|AD|_E}{1} = \cos \alpha \text{ i otrzymujemy:}$$

$$x_D = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{1}{2} \ln \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \cdot 2 \ln \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \ln \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} > 0 \text{ oraz}$$

$$x(\alpha) = |\ln \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} - 0| = \ln \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

Podstawmy teraz $x(\alpha) = d$.

Wyliczyliśmy $d = \ln \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$. Z faktu, że $x(\alpha)$ jest funkcją odwrotną do funkcji Łobaczewskiego

otrzymujemy, że $d = \Pi^{-1}(\alpha) = \ln \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$, skąd $e^d = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$. Ostatecznie otrzymujemy

$\alpha = 2 \operatorname{arccotg}(e^d) = \Pi(d)$, co dowodzi następującego faktu:

Fakt 2.25. *Miarę kąta równoległości określa funkcja Łobaczewskiego, która dana jest wzorem $\Pi(d) = 2 \operatorname{arccotg}(e^d)$.*

Mając wzór na $\Pi(d)$ i korzystając ze standardowych narzędzi analizy matematycznej można wyprowadzić własności tej funkcji (ciągłość, monotoniczność, granice na końcach przedziału), co jest treścią zadania na końcu rozdziału (zad. 14 na str. 34)

Uwaga: Na płaszczyźnie euklidesowej niezależnie od doboru jednostki (może to być np. odcinek o długości 1 cm lub 5 cm lub 15 cm, itd.) żadne własności obiektów geometrycznych nie ulegają zmianie. Natomiast na płaszczyźnie nieeuklidesowej istnienie związku pomiędzy długością odcinka a kątem powoduje, że pewne własności są uzależnione od wyboru jednostki.

Na przykład dla jednostki, która jest równa $d = \Pi^{-1}(\frac{\pi}{4})$ funkcja Łobaczewskiego przyjmuje

wartość $\frac{\pi}{4}$, a dla $d = \Pi^{-1}(\frac{\pi}{3})$ funkcja Łobaczewskiego jest równa $\frac{\pi}{3}$.

W takim przypadku mówimy, że na płaszczyźnie nieeuklidesowej możliwe jest wprowadzenie obiektywnej jednostki długości.

2.4.5 Linia ekwidystantna.

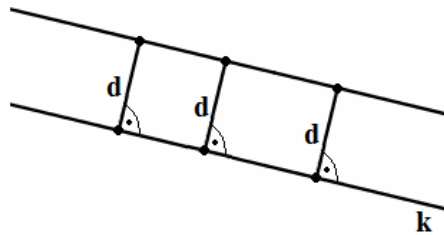
W rozdziale tym zajmiemy się pewną szczególną linią w geometrii nieeuklidesowej, jaką jest ekwidystanta. Zanim jednak wyjaśnimy, czym jest owa linia, wprowadzimy pojęcie

odległości punktu od prostej, gdyż będzie ono nam potrzebne w zdefiniowaniu ekwidystanty.

Definicja 2.26. Odległością punktu A od prostej p nazywamy długość odcinka AA' , gdzie A' jest obrazem punktu A przez rzut prostokątny na prostą p .

Definicja 2.27. Linia ekwidystantna to linia złożona ze wszystkich punktów leżących w ustalonej odległości d od ustalonej prostej k , po tej samej stronie prostej. Prosta k nazywamy bazą ekwidystanty.

Odpowiednikiem ekwidystanty na płaszczyźnie euklidesowej jest prosta równoległa do k , oddalona od prostej bazowej o d .



W tym rozdziale będziemy wyprowadzać własności dla ekwidystanty, której bazą jest prosta będąca średnicą modelu Kleina.

Na początku zobaczymy, jaki kształt przybiera ekwidystanta na płaszczyźnie nieeuklidesowej. W tym celu ustalmy d jako odległość dowolnego punktu B ekwidystanty od bazy (czyli średnicy modelu) i obliczmy d przy pomocy współrzędnych punktów B i A , gdzie A jest obrazem punktu B przez rzut prostokątny na bazę ekwidystanty.

Odległość d wyrażamy przy pomocy wzoru: $d = |x_A - x_B|$ (definicja 2.4), gdzie współrzędne x_A, x_B zgodnie z Definicją 2.1 są równe (punkty A, B, P, Q są określone jak na rysunku poniżej):

$$x_A = \frac{1}{2} \ln \frac{|AP|_E}{|AQ|_E} = \frac{1}{2} \ln 1 = 0,$$

$$\begin{aligned} x_B &= \frac{1}{2} \ln \frac{|BP|_E}{|BQ|_E} = \frac{1}{2} \ln \frac{|AP|_E + |AB|_E}{|AP|_E - |AB|_E} = \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{|AP|_E - |AB|_E + 2|AB|_E}{|AP|_E - |AB|_E} = \frac{1}{2} \ln \left(1 + 2 \frac{|AB|_E}{|AP|_E - |AB|_E} \right), \end{aligned}$$

z czego otrzymujemy:

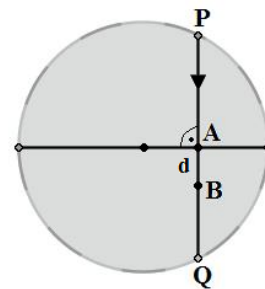
$$d = |x_A - x_B| = \frac{1}{2} \ln \left(1 + 2 \frac{|AB|_E}{|AP|_E - |AB|_E} \right).$$

Z powyższego równania wyrażmy stosunek $\frac{|AB|_E}{|AP|_E}$ w zależności od d :

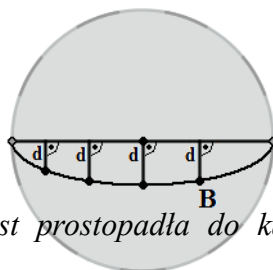
$$2d = \ln \left(1 + 2 \frac{|AB|_E}{|AP|_E - |AB|_E} \right), \text{ zatem } \frac{|AB|_E}{|AP|_E - |AB|_E} = \frac{e^{2d} - 1}{2}, \text{ skąd}$$

$$\frac{|AB|_E}{|AP|_E} = \frac{|AB|_E}{|AQ|_E} = \frac{e^{2d} - 1}{e^{2d} + 1} = \text{const}$$

Z wykonanych obliczeń wynika, że przy ustalonej wartości d stosunek euklidesowej długości odcinka AB do długości odcinka AQ jest wartością stałą. Jednak w miarę przesuwania się punktu A (wraz z punktem B leżącym w odległości d na odpowiedniej prostopadłej) od środka



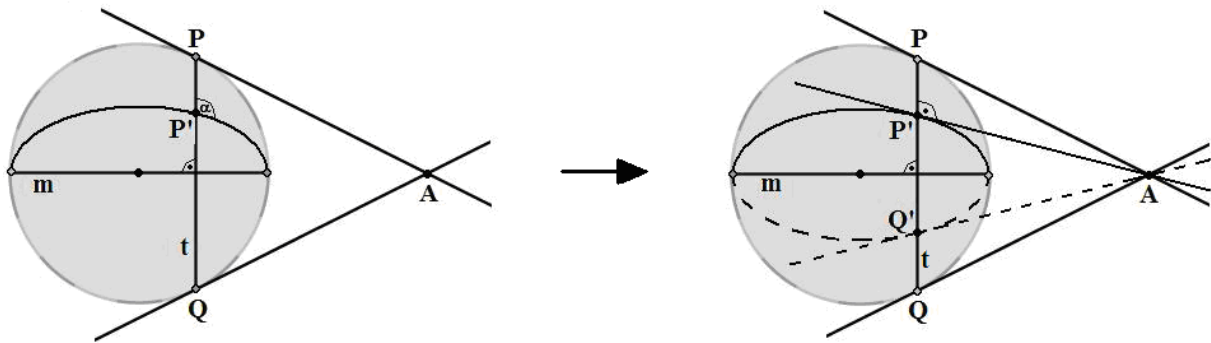
modelu w kierunku jego brzegu euklidesowa wartość $|AQ|_E$ zmniejsza się, więc musi się też proporcjonalnie zmniejszać euklidesowa długość odcinka AB . Wynika z tego, że ekwidystantą do prostej będącą średnicą bez końców w modelu Kleina nie jest prosta (ani w rozumieniu euklidesowym ani prosta w modelu Kleina), jest nią natomiast spłaszczone w ustalonej proporcji euklidesowy półokrąg, czyli połówka elipsy odcięta przy pomocy dłuższej półosi. Jest to przedstawione schematycznie na rysunku poniżej.



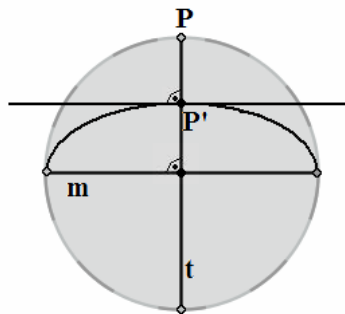
Własność 2.28. *Ekwidystanta jest prostopadła do każdej prostej prostopadłej do prostej bazowej.*

Dowód: Prostopadłymi do prostej bazowej m będącej średnicą modelu są proste euklidesowo prostopadłe do średnicy. Aby wskazać miarę kąta α pomiędzy ekwidystantą a dowolną prostą t prostopadłą do m i nie przechodzącą przez środek modelu, należy poprowadzić styczną do ekwidystanty w punkcie jej przecięcia z t (na rysunkach poniżej jest to punkt P'). W związku z tym, że ekwidystanta jest półelipsą utworzoną przez odpowiednie spłaszczenie okręgu będącego brzegiem modelu, wykorzystamy fakt, że w geometrii euklidesowej wyróżniamy przekształcenie, w którym obrazem okręgu jest elipsa (analogicznie: obrazem półokręgu jest półelipsa). Jest to tzw. powinowactwo prostokątne względem ustalonej prostej. W naszym przypadku będzie to powinowactwo prostokątne względem prostej, która jest przedłużeniem nieeuklidesowej prostej m . Nie będziemy szczegółowo zajmować się tym przekształceniem, skorzystamy jedynie z pewnych jego własności. Pierwsza z nich mówi, że powinowactwo prostokątne wszystkie proste przekształca na proste. Ponadto jeśli jakaś prosta p przechodzi przez ustalony punkt X , to prosta p' będąca obrazem p przez powinowactwo prostokątne przechodzi przez X' , który jest obrazem X . W naszym przypadku oznacza to, że obrazem prostej AP jest też prosta, która dodatkowo przechodzi przez punkty A' i P' , które są odpowiednio obrazami A i P . Punkt P' znajduje się na prostopadłej do prostej m przechodzącej przez P , natomiast punkt A jest w pewien sposób szczególny, gdyż sposób jego konstrukcji gwarantuje, że znajduje się on na przedłużeniu prostej m , względem której wykonujemy przekształcenie. Taka prosta w powinowactwie prostokątnym jest zbiorem punktów stałych tego przekształcenia, zatem punkt $A = A'$.

Kolejna własność określa stosunek obrazu stycznej do krzywej względem obrazu tej krzywej. Otóż okazuje się, że powinowactwo prostokątne zachowuje styczność, czyli w naszej sytuacji jeśli prosta AP była styczna do okręgu będącego brzegiem modelu w punkcie P , to prosta $A'P'$ jest styczna do obrazu tego okręgu, czyli do elipsy, która reprezentuje ekwidystantę prostej m w punkcie P' . Z własności powinowactwa prostokątnego otrzymujemy więc, że styczna do ekwidystanty w punkcie jej przecięcia z prostą t przechodzi przez punkt A , co z Faktu 2.7 daje nam, że ta styczna jest nieeuklidesowo prostopadła do t . Kąt α pomiędzy ekwidystantą a prostą t jest zatem prosty.



Rozpatrzmy teraz przypadek, gdy prostopadła do prostej m przechodzi przez środek modelu Kleina (patrz rysunek poniżej). W takiej sytuacji, prowadząc styczną do ekwidystanty (czyli półelipsy) w P' , czyli w punkcie jej przecięcia z prostopadłą do m , otrzymujemy prostą równoległą do średnicy modelu, czyli prostopadłą do t . Zatem kąt pomiędzy ekwidystantą a prostą t również w tym przypadku jest prosty.



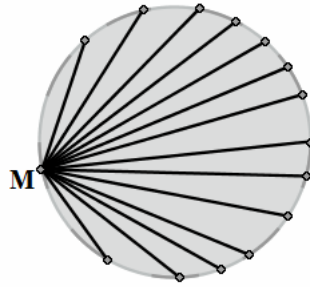
Uwaga: Własność 2.28 jest też spełniona dla ekwidystant, których proste bazowe nie są reprezentowane przez średnice modelu Kleina. Ponadto dla wszystkich ekwidystant (niezależnie od położenia prostej bazowej) zachodzi własność, iż dla różnych odległości d od prostej bazowej ekwidystanty są parami nieprzystające. Dodatkowo dla różnych prostych bazowych ekwidystanty, które są oddalone od baz o jednakową odległość d , są przystające. Warto też zauważyć, że kształt ekwidystant zależy właśnie od ich odległości d od bazy. Im większa jest ta odległość, tym bardziej „zakrzywiona” jest ekwidystanta. Uzasadnienia powyższych faktów pominiemy, gdyż wymagają one metod bardziej zaawansowanych niż te, które zostały zaprezentowane w niniejszym skrypcie.

2.4.6. Horocykle w modelu Kleina.

Horocykl to kolejna po ekwidystancie szczególna linia w geometrii nieeuklidesowej. Pewną trudność w zrozumieniu i wyobrażeniu sobie, czym jest horocykl może stanowić fakt, że w przeciwieństwie do ekwidystanty nie posiada on odpowiednika na płaszczyźnie euklidesowej.

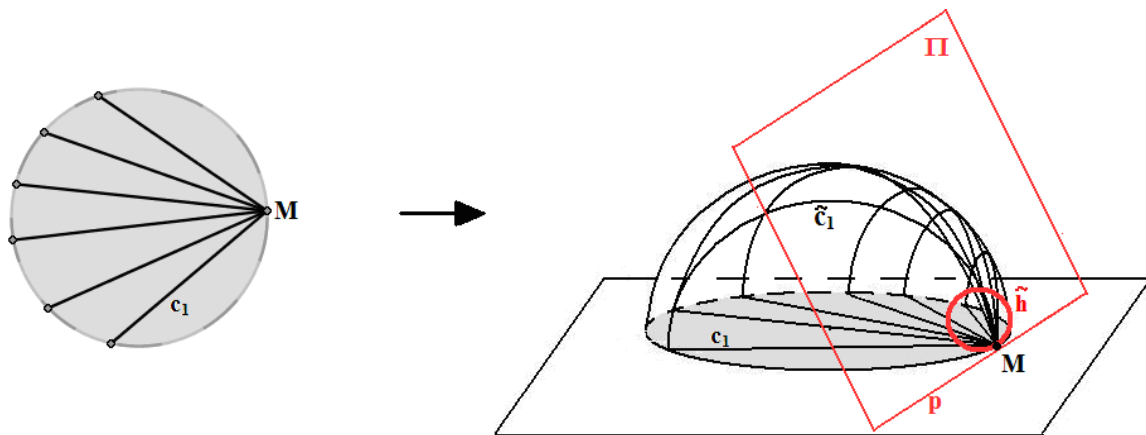
Na początku zdefiniujemy pojęcie pęku prostych asymptotycznych w modelu Kleina, które pomoże nam wyjaśnić istotę horocyklu.

Definicja 2.29. Pęk prostych asymptotycznych w modelu Kleina to zbiór wszystkich prostych, których przedłużenia przechodzą przez dany punkt M na brzegu modelu.



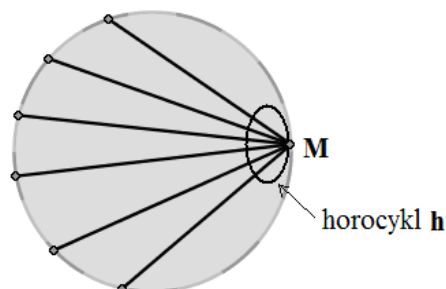
Definicja 2.30. Horocyklem nazywamy linię prostą do każdej prostej z ustalonego pęku prostych asymptotycznych.

Ustalmy, jaki kształt ma horocykl danego pęku prostych asymptotycznych. Niech przedłużenia prostych z pęku będą miały punkt wspólny M (na brzegu modelu). Narysujmy pomocniczą półsferę, której brzeg jest wspólny z modelem i wyznaczmy na tej półsferze półokręgi, które są zawarte w pionowych półpłaszczyznach (przyjmujemy, że model Kleina znajduje się na płaszczyźnie poziomej) i mają te same końce, co cięciwy reprezentujące proste z naszego pęku prostych asymptotycznych (cięciwie c_i przyporządkowujemy półokrąg \tilde{c}_i). Następnie przetnijmy tę półsferę euklidesową płaszczyzną Π w taki sposób, by zbiorem punktów wspólnych płaszczyzny modelu i płaszczyzny Π była prosta p styczna do modelu w punkcie M (takich płaszczyzn Π jest wiele – my wybieramy dowolną z nich).



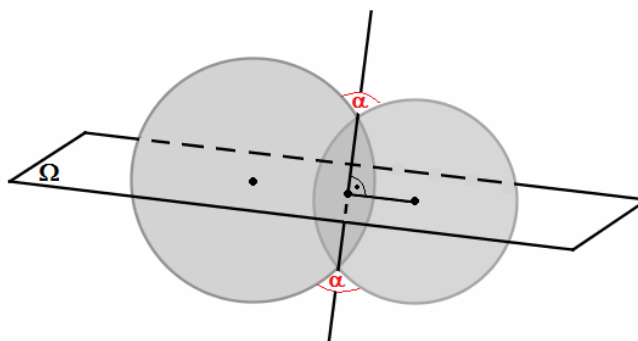
Okazuje się, że przekrój płaszczyzny Π z półsferą jest euklidesowym okręgiem \tilde{h} znajdującym się na półsferze i stycznym do brzegu półsfery w punkcie M . Okrąg ten pomaga nam określić kształt horocyklu.

Fakt 2.31. *Rzut prostokątny h okręgu \tilde{h} na płaszczyznę modelu jest horocyklem dla pęku prostych asymptotycznych w punkcie M .*

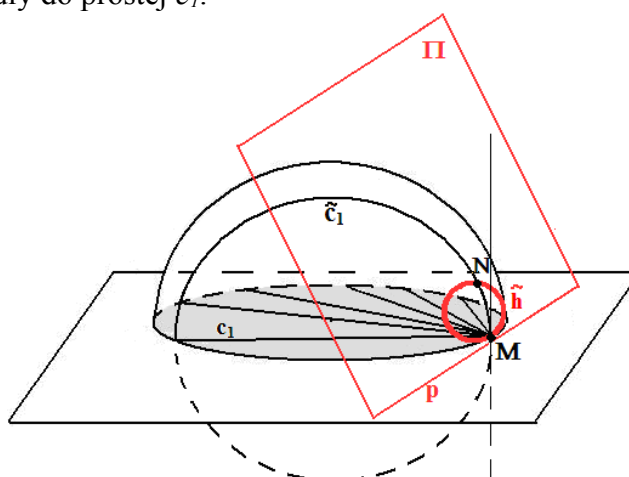


Dowód: Zgodnie z określeniem miar kątów, odwołując się do pomocniczej półsfery, aby pokazać, że h jest prostopadły do każdej z prostych c_i wystarczy udowodnić, że kąt pomiędzy okręgiem \tilde{h} a każdym z półokręgów \tilde{c}_i w punkcie ich przecięcia niebędącym M jest kątem prostym.

Okrąg \tilde{h} przecina każdy półokrąg \tilde{c}_i w dwóch punktach. W przestrzeni euklidesowej zachodzi własność, że jeśli dwa dowolnie położone okręgi przecinają się w dwóch punktach, to kąty ich przecięcia w tych punktach są jednakowe. Własność tę można łatwo dowieść; wystarczy poprowadzić płaszczyznę Ω przechodzącą przez środki tych okręgów, która jest prostopadła do prostej przechodzącej przez punkty wspólne danych okręgów (patrz rysunek poniżej). Kąty przecięcia okręgów w ich punktach wspólnych są wówczas symetryczne względem płaszczyzny Ω , a więc ich miary są jednakowe.



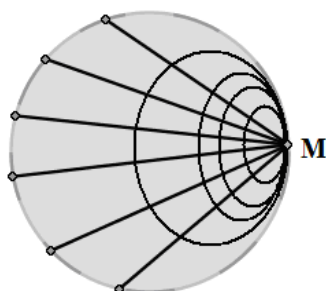
Poszukajmy teraz miary kąta pomiędzy okręgiem \tilde{h} a półokręgiem \tilde{c}_1 . Korzystając z wcześniej przytoczonej własności, kąt pomiędzy nimi w punkcie N (jak na rysunku poniżej) jest równy kątowi w punkcie M . Ten natomiast jest równy kątowi pomiędzy styczną do \tilde{h} w punkcie M , którą jest prosta p , a styczną do \tilde{c}_1 w punkcie M , którą jest pionowa prosta. Prosta p jest prostopadła do pionowej prostej przechodzącej przez M , zatem także styczne do okręgów \tilde{h} i \tilde{c}_1 poprowadzone w punkcie N przecinają się pod kątem prostym. Z interpretacji kątów w modelu Kleina otrzymujemy więc wniosek, że rzut prostokątny h okręgu \tilde{h} na płaszczyznę modelu jest prostopadły do prostej c_1 .



W analogiczny sposób pokazujemy, że h jest prostopadły do każdej z prostych c_i , co daje nam prawdziwość Faktu 2.31.

Uwaga: Przy wyznaczaniu okręgu \tilde{h} nie zostało dokładnie określone, pod jakim kątem

płaszczyzna Π ma przecinać płaszczyznę modelu. Ta dowolność poprowadzenia płaszczyzny Π sprawia, że można wyznaczyć większą liczbę horocykli ustalonego pęku prostych. Na poniższym rysunku zostały umieszczone przykładowe horocykle pęku prostych o punkcie wspólnym M .



Zadania dotyczące modelu Kleina

W poniższych zadaniach, zgodnie z tym, co przyjęliśmy na początku tego rozdziału, przyjmujemy, że promień modelu Kleina wynosi 1.

1. W obszarze dowolnego kąta wypukłego wskaż punkt, przez który nie przechodzi żadna prosta przecinająca oba ramiona kąta. Dla danego kąta opisz zbiór złożony z wszystkich punktów o tej własności.
2. Znajdź w modelu Kleina przykłady czworokątów Saccheri'ego, czyli czworokątów $ABCD$, w których $\angle A = \angle B = 90^\circ$ i $|AD| = |BC|$. Sprawdź, że ich kąty **nie** przy podstawie, tzn. kąty przy wierzchołkach C i D są ostre. Zrób to samo dla czworokątów, które mają trzy kąty proste i jeden kąt ostry (tzw. czworokąty Lamberta).
3. Punkt A leży w środku modelu Kleina zaś punkt B leży w euklidesowej odległości $\frac{1}{2}$ od A . Oblicz odległość nieeuklidesową $|AB|_{NE}$ oraz znajdź nieeuklidesowy środek odcinka AB .
4. Niech A będzie euklidesowym środkiem modelu Kleina. Na prostej m przechodzącej przez A znajdź punkty odległe od A (nieeuklidesowo) o $1, 2, n$.
5. Uzasadnij, że odcinki o wspólnym końcu w środku modelu mają jednakowe miary (nieeuklidesowe) dokładnie wtedy, gdy ich zwykłe (euklidesowe) długości są równe. Wywnioskuj stąd, że okręgami o środku w środku modelu są zwykłe okręgi.
6. Korzystając z poprzedniego zadania, podaj przykład okręgu, na którym nie można opisać trójkąta. Oblicz, jaki jest co najmniej jego promień. Zrób to samo dla czworokąta, pięciokąta itd. Wskazówka: rozważ okrąg o środku w środku modelu.
7. Dla okręgów o środku w środku modelu uzasadnij, że kąt wpisany oparty na średnicy nie jest kątem prostym. Czy jest to kąt ostry czy rozwarty? W zadaniu weź pod uwagę euklidesowe prostokąty wpisane w okręgi o środku w środku modelu.
- 8*. Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg o (nieeuklidesowym) promieniu R , przy czym bok AB jest średnicą tego okręgu. Oblicz miarę (a raczej cosinus) kąta w wierzchołku C w zależności od położenia punktu C na łuku okręgu pomiędzy punktami A i B . Za parametr możesz przyjąć miarę kąta α pomiędzy półprostymi OB i OC .
9. Uzasadnij, że zwykłe obroty wokół środka modelu oraz zwykłe odbicia względem średnic modelu są izometriami płaszczyzny nieeuklidesowej.
10. Oblicz miarę przeciwprostokątnej c w trójkącie prostokątnym o danych przyprostokątnych a i b . Przyjmij, że jeden z wierzchołków, ale nie ten o kącie prostym, znajduje się w środku modelu.

11. Uzasadnij, że przeciwprostokątna z poprzedniego zadania ma większą miarę niż obie przyprostokątne. Uzasadnij to również bez posługiwania się wyliczeniem z poprzedniego zadania. Korzystając z aksjomatu o przystawianiu trójkątów, uzasadnij powyższą własność dla dowolnego nieeuklidesowego trójkąta prostokątnego.
12. Korzystając z poprzedniego zadania oraz z aksjomatu przystawiania trójkątów uzasadnij, że rzut prostokątny punktu A na daną prostą jest punktem najbliższym punktowi A spośród punktów na tej prostej.
13. Proste p i q są asymptotyczne, $A \in q$, zaś A' jest rzutem prostokątnym A na p . Uzasadnij, że nieeuklidesowa odległość $|AA'|$ dąży do zera, gdy A dąży do wspólnego punktu prostych p i q na brzegu modelu. Przyjmij, że p jest średnicą modelu.
14. Zbadaj ciągłość, monotoniczność i granice na końcach przedziału dziedziny funkcji Łobaczewskiego.

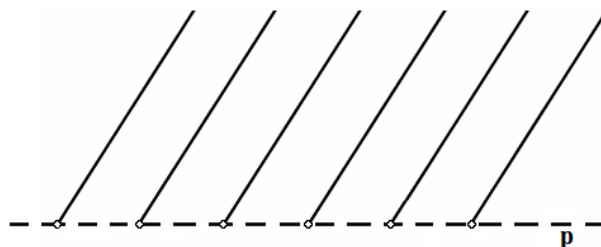
Rozdział 3

Model półpłaszczyznowy Poincarégo geometrii nieeuklidesowej

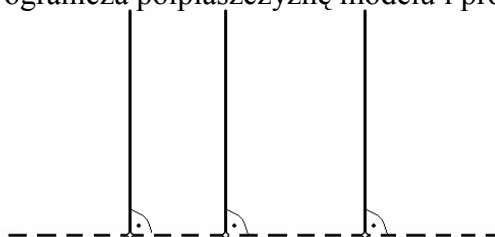
W tym rozdziale poznamy kolejny po modelu Kleina model geometrii nieeuklidesowej, który spełnia wszystkie jej aksjomaty i tym samym dowodzi jej niesprzeczności – jest to tzw. model półpłaszczyznowy zaproponowany przez wybitnego francuskiego matematyka Henri'ego Poincarégo w 1882 roku.

3.1 Pojęcia pierwotne w modelu Poincarégo

Model Poincarégo, podobnie jak model Kleina, został skonstruowany na bazie pojęć geometrii euklidesowej. W tym rozdziale określimy interpretację pojęć pierwotnych płaszczyzny nieeuklidesowej w omawianym modelu. Zaczniemy od płaszczyzny; u Poincarégo jest to dowolna euklidesowa półpłaszczyzna bez ograniczającej ją prostej p .



1. **Punkty** – są to punkty w rozumieniu euklidesowym należące do ustalonej półpłaszczyzny.
2. **Proste** – wyróżniamy dwa rodzaje prostych. Pierwszym są euklidesowe półproste o początkach na prostej, która ogranicza półpłaszczyznę modelu i prostopadłe do tej prostej.

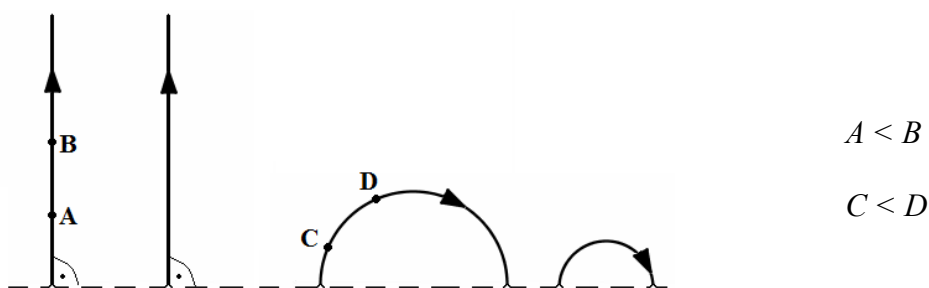


Drugi rodzaj prostych to euklidesowe półokręgi o środkach na brzegu modelu.



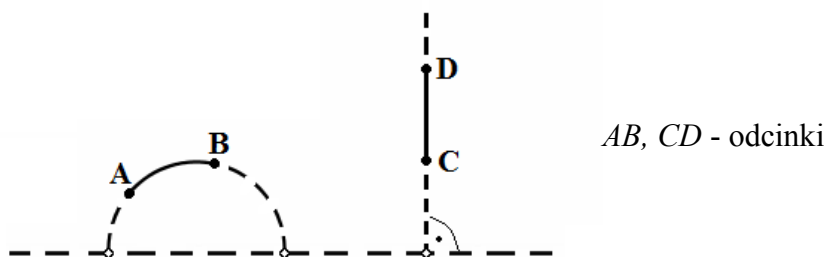
Uwaga: W rozdziale 3 dotyczącym modelu Poincarégo przyjmujemy, że brzeg modelu jest poziomy, zatem przez „pionowe proste” będziemy rozumieli proste reprezentowane w modelu euklidesowymi półprostymi prostopadłymi do brzegu modelu.

3. **Relacja należenia** - interpretowana jest podobnie, jak na płaszczyźnie euklidesowej, tzn. poprzez stwierdzenie, że punkt B należy do prostej p rozumiemy, że B leży na tej prostej (czyli na prostej pionowej lub na prostej reprezentowanej przez euklidesowy półokrąg).
4. **Relacja porządku** – dla dowolnych prostych, będących euklidesowymi półprostymi lub półokreęgami kierunek ustalamy tak, jak na rysunkach poniżej i zgodnie z nim w naturalny sposób zachodzi relacja porządku.

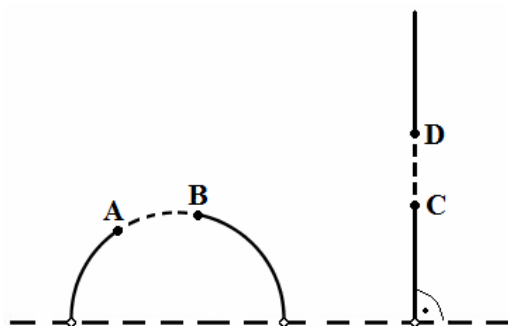


Na podstawie wyżej określonej relacji porządku w modelu Poincarégo możemy podać interpretację następujących definiowalnych pojęć:

- odcinek AB , gdzie $A, B \in p$ jest to zbiór złożony z punktów A i B oraz z wszystkich punktów C takich, że $A <_p C <_p B$ lub $B <_p C <_p A$,



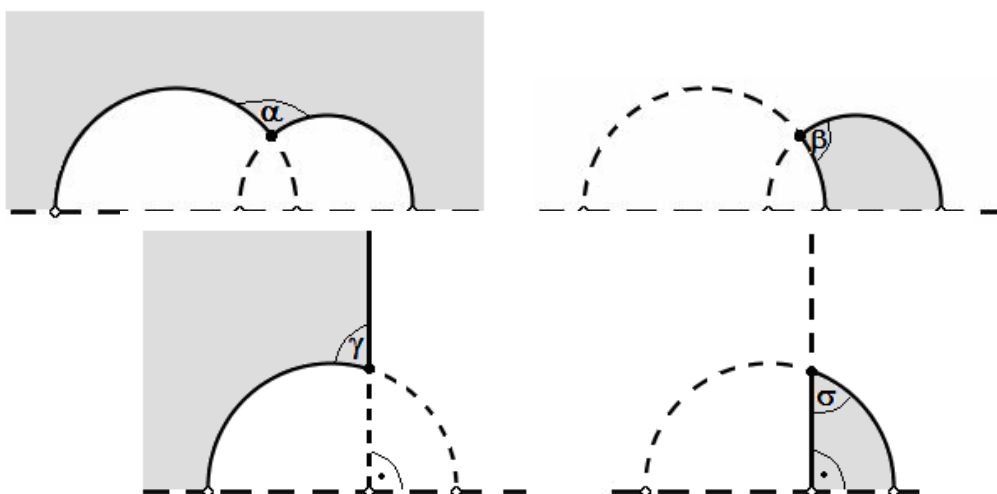
- półprosta o początku A to każdy zbiór postaci $\{A\} \cup \{X \in p : A <_p X\}$ lub postaci $\{A\} \cup \{X \in p : X <_p A\}$, gdzie p jest dowolną prostą zawierającą punkt A ,



na rysunku:
półproste o początkach w punktach:
 A, B, C i D

- kąt to dwie półproste o wspólnym początku nieleżące na jednej prostej.

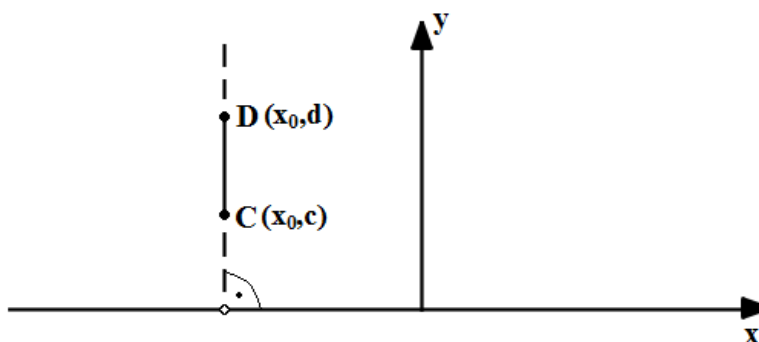
Przykłady kątów:



5. Miara odcinków

W modelu Poincarégo miarę odcinka określamy w zależności od tego, na jakiej prostej dany odcinek się znajduje; tzn. czy jest on częścią euklidesowej półprostej czy euklidesowego półokręgu. W przypadku odcinków zawartych w pionowych prostych korzystamy z kartezjańskiego układu współrzędnych umiejscowionego w modelu w taki sposób, aby oś OX pokrywała się z prostą ograniczającą półpłaszczyznę modelu. Każdemu punktowi modelu przyporządkowujemy współrzędne (x,y) zgodnie z położeniem tego punktu względem układu współrzędnych.

Uwaga: Punkty leżące na tej samej prostej pionowej mają takie same pierwsze współrzędne.

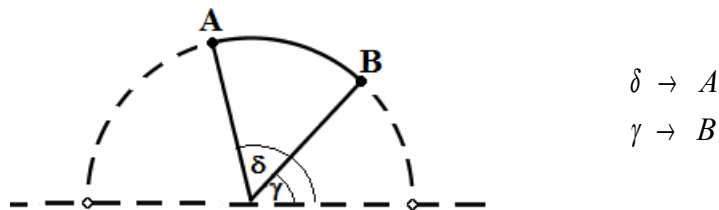


Definicja 3.1. Dla punktów $C = (x_0, c)$ i $D = (x_0, d)$ należących do tej samej prostej reprezentowanej w modelu Poincarégo euklidesową półprostą prostopadłą do brzegu modelu nienieuklidesową miarę odcinka CD definiujemy w następujący sposób:

$$m(CD) = \left| \ln \left(\frac{d}{c} \right) \right| = |\ln d - \ln c|.$$

W tak określonej mierze odcinka nie ma znaczenia kolejność punktów, gdyż z własności logarytmu mamy, że $\left| \ln \left(\frac{d}{c} \right) \right| = \left| \ln \left(\frac{c}{d} \right)^{-1} \right| = \left| -\ln \left(\frac{c}{d} \right) \right| = \left| \ln \left(\frac{c}{d} \right) \right|$, więc $m(CD) = m(DC)$.

W sytuacji, gdy odcinek AB znajduje się na euklidesowym półokręgu, nie korzystamy z układu współrzędnych, a z odpowiednich kątów. Otóż każdemu z punktów będących końcami odcinka AB przyporządkowujemy kąt pomiędzy promieniem półokręgu, który przechodzi przez dany punkt a brzegiem modelu, jak na rysunku poniżej.



Definicja 3.2. Dla punktów A i B , którym przyporządkowujemy odpowiednio kąty δ i γ , należących do tej samej prostej reprezentowanej w modelu Poincarégo euklidesowym półokręgiem o środku na brzegu modelu nienieuklidesową miarę odcinka AB definiujemy następująco:

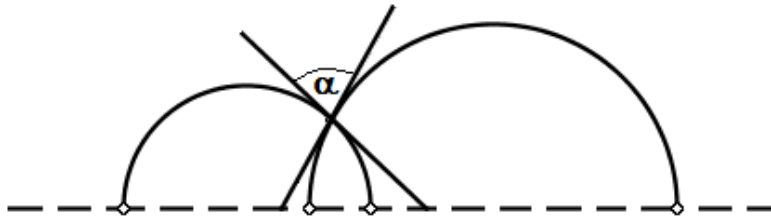
$$m(AB) = \left| \ln \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{\delta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}} \right) \right| = \left| \ln \left(\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \right) - \ln \left(\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \right) \right|.$$

W tym przypadku, podobnie jak dla punktów z pionowej prostej, miara odcinka AB nie zależy od kolejności punktów, gdyż:

$$m(AB) = \left| \ln \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{\delta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}} \right) \right| = \left| \ln \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\delta}{2}} \right)^{-1} \right| = \left| -\ln \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\delta}{2}} \right) \right| = \left| \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\delta}{2}} \right| = m(BA).$$

6. Miara kątów

Hiperboliczną miarę kątów pomiędzy dwiema półprostymi w modelu Poincarégo określamy podobnie, jak miarę kątów pomiędzy krzywymi na płaszczyźnie euklidesowej; są one równe euklidesowym miarom kątów ostrych pomiędzy stycznymi do półprostych tworzących kąt w punkcie ich przecięcia, np.



3.2 Spełnianie aksjomatów geometrii nieeuklidesowej

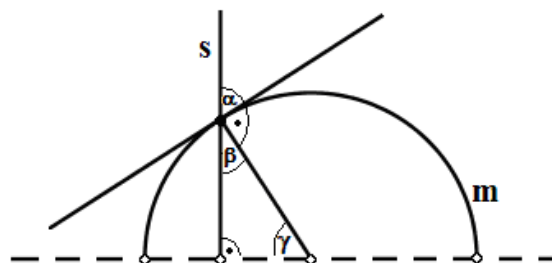
Model Poincarégo spełnia wszystkie aksjomaty geometrii nieeuklidesowej, jednak pominiemy weryfikację poszczególnych aksjomatów, gdyż znajduje się ona w skrypcie [2] na str. 79.

3.3 Ogląd własności geometrii nieeuklidesowej za pośrednictwem modelu Poincarégo

3.3.1 Kąty w modelu Poincarégo.

Zaletą modelu Poincarégo ułatwiającą w znacznym stopniu wyprowadzanie własności dla kątów w tym modelu jest to, że ich miary nieeuklidesowe są równe miarom euklidesowym.

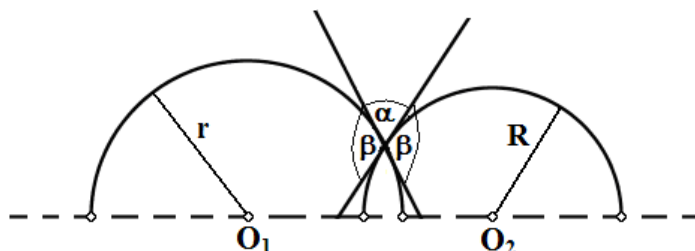
Własność 3.3. *Kąt α pomiędzy prostą m reprezentowaną w modelu Poincarégo euklidesowym półokręgiem a pionową prostą s jest równy kątowi γ pomiędzy promieniem półokręgu przechodzącym przez punkt przecięcia danych prostych a prostą będącą brzegiem modelu.*



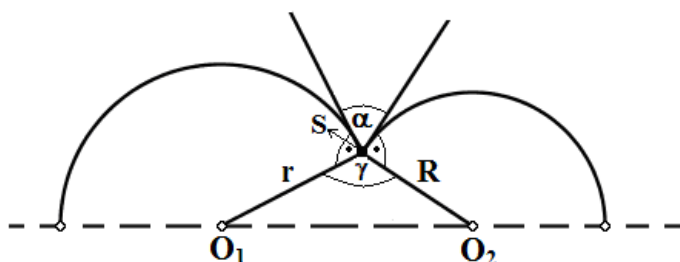
Dowód: Suma kątów: α , kąta prostego (pomiędzy promieniem półokręgu poprowadzonym do punktu przecięcia prostych i styczną do półokręgu w tym punkcie) oraz kąta β , jak na rysunku powyżej daje nam kąt półpełny, zatem $\beta = \pi - (\alpha + \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Promień półokręgu tworzy wraz z prostą s i z brzegiem modelu euklidesowy trójkąt prostokątny. Mamy zatem $\gamma + \beta + \frac{\pi}{2} = \pi$, z czego wynika, że $\gamma = \frac{\pi}{2} - \beta = \frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{2} - \alpha) = \alpha$.

Własność 3.4. *Niech β , jak na rysunku poniżej, będzie jednym z kątów utworzonych przez styczne poprowadzone w punkcie przecięcia dwóch prostych reprezentowanych w modelu euklidesowymi półokręgami, z których jeden jest półokręgiem o środku O_1 i promieniu r ; natomiast drugi ma środek w punkcie O_2 i promień R . Wtedy cosinus kąta β ma wartość równą*

$$\frac{R^2 + r^2 - d^2}{2Rr}, \text{ gdzie } d = |O_1O_2|.$$



Dowód: Kąt α jest kątem przyległym do β , zatem $\alpha + \beta = \pi$. Niech γ będzie kątem pomiędzy promieniami danych półokręgów o wierzchołku S w punkcie przecięcia tych półokręgów, jak na rysunku poniżej.



Jeśli weźmiemy pod uwagę kąt pełny o wierzchołku w punkcie S , to zauważymy, że $\alpha + \frac{\pi}{2} + \gamma + \frac{\pi}{2} = 2\pi$ lub równoważnie $\alpha + \gamma = \pi$, a więc $\gamma = \beta$. Korzystając z Twierdzenia Cosinusów dla trójkąta o bokach r , R , d , gdzie $d = |O_1O_2|$ otrzymujemy, że $d^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \beta$, z czego łatwo wyliczyć, że $\cos \beta = \frac{R^2 + r^2 - d^2}{2Rr}$.

Kąt pomiędzy nieeuklidesowymi prostymi określamy jako kąt ostry pomiędzy euklidesowymi stycznymi do tych prostych w punkcie ich przecięcia. Mamy $\alpha + \beta = \pi$, więc jeden z kątów α , β jest ostry. Jeśli $\beta \in (0, \frac{\pi}{2})$, wtedy zgodnie z powyższą interpretacją jest on kątem pomiędzy danymi prostymi. Jeśli natomiast tym kątem jest α , wtedy z trygonometrycznych wzorów redukcyjnych otrzymujemy $\cos \beta = \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$, zatem $\cos \alpha = -\cos \beta$ i prawdziwa jest następująca własność:

Własność 3.5 *Cosinus kąta pomiędzy prostymi reprezentowanymi w modelu euklidesowymi półokręgami, z których jeden jest półokręgiem o środku O_1 i promieniu r , natomiast drugi ma środek w punkcie O_2 i promień R ma wartość równą $\left| \frac{R^2 + r^2 - d^2}{2Rr} \right|$, gdzie $d = |O_1O_2|$.*

Z powyższej własności wynika kolejna własność, dzięki której w łatwy sposób można sprawdzić, czy dwie proste reprezentowane w modelu euklidesowymi półokręgami są względem siebie prostopadłe.

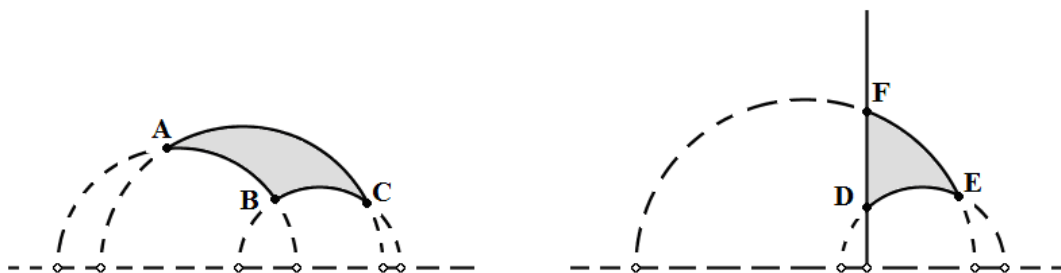
Własność 3.6. *Kąt α pomiędzy dwiema prostymi reprezentowanymi w modelu euklidesowymi półokręgami jest prosty dokładnie wtedy, gdy suma kwadratów promieni tych półokręgów jest równa kwadratowi odległości d pomiędzy ich środkami.*

Dowód: Niech jedna z prostych określonych w powyższej własności będzie miała środek O_1 i promień r , natomiast druga – środek O_2 i promień R . Jeśli proste te przecinają się pod kątem $\alpha = \frac{\pi}{2}$, wtedy z Własności 3.5 mamy $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left| \frac{R^2 + r^2 - d^2}{2Rr} \right|$. Po podstawieniu $\cos \frac{\pi}{2} = 0$

otrzymujemy $\left| \frac{R^2 + r^2 - d^2}{2Rr} \right| = 0$, co jest równoznaczne z tym, że $R^2 + r^2 - d^2 = 0$ lub równoważnie $R^2 + r^2 = d^2$, zatem Własność 3.6 jest spełniona.

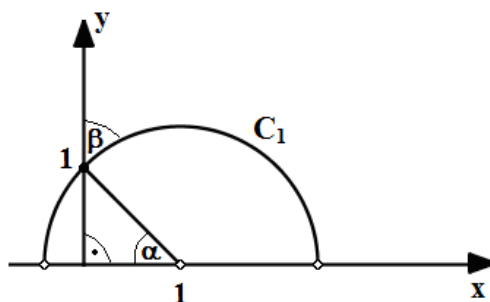
3.3.2. Wielokąty w modelu Poincarégo.

Wielokąty w modelu Poincarégo budujemy podobnie, jak na płaszczyźnie euklidesowej, czyli łącząc ze sobą w odpowiedni sposób odcinki. Wielokąty nieeuklidesowe nie spełniają jednak takich samych własności, jak wielokąty na \mathfrak{R}^2 . W rozdziale tym zaprezentujemy przykład, który to poświadczy. Będzie on dotyczył trójkątów, zobaczymy więc najpierw, jak w omawianym modelu mogą one wyglądać:

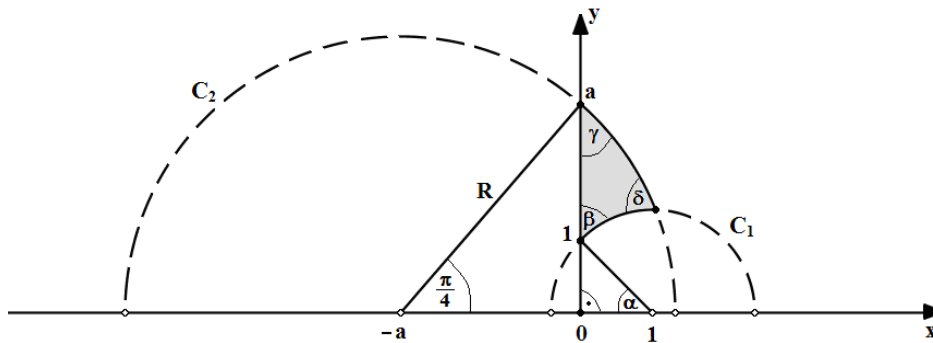


Trójkąt ABC powstał z trzech odcinków leżących na prostych reprezentowanych przez euklidesowe półokręgi, natomiast w trójkącie DEF jeden z odcinków zawiera się w prostej pionowej a pozostałe dwa w euklidesowych półokręgach.

Przykład: Pokażemy, że w modelu półpłaszczyznowym można zbudować trójkąt o wszystkich kątach równych $\frac{\pi}{4}$. Przeprowadźmy konstrukcję takiego trójkąta, w którym jeden z boków będzie odcinkiem na pionowej prostej a dwa boki będą odcinkami zawartymi w prostych reprezentowanych przez euklidesowe półokręgi. Będziemy korzystać z układu współrzędnych, którego oś OX pokrywa się z brzegiem modelu, natomiast oś OY pokrywa się z prostą zawierającą jeden z boków budowanego trójkąta. Na początku poprowadźmy półokrąg C_1 o środku w punkcie $(1,0)$ i promieniu r równym $\sqrt{2}$ (promień ten można wyznaczyć np. przez poprowadzenie odcinka łączącego punkty $(0,1)$ i $(1,0)$ tak, jak na rysunku poniżej).



Dla tak wyznaczonego półokręgu kąt α pomiędzy brzegiem modelu a promieniem półokręgu poprowadzonym do punktu jego przecięcia z osią OY jest równy $\frac{\pi}{4}$. Niech kąt β będzie jak na rysunku powyżej. Z Własności 3.3 mamy $\beta = \alpha = \frac{\pi}{4}$. Kąt β będzie pierwszym z trzech kątów szukanego trójkąta. Aby wyznaczyć drugi kąt trójkąta (kąt γ jak na rysunku poniżej) prowadzimy półokrąg C_2 o promieniu R i środku w $(-a, 0)$, gdzie a jest parametrem, którego dokładna wartość zostanie wyznaczona później, przy czym zakładamy, że $a > 1$. Promień R dobieramy w taki sposób, by punktem jego przecięcia z osią y był punkt o współrzędnych $(0, a)$. Wtedy kąt pomiędzy brzegiem modelu a promieniem tego półokręgu poprowadzonym do punktu jego przecięcia z osią y będzie równy $\frac{\pi}{4}$ i z Własności 3.3 otrzymamy, że $\gamma = \frac{\pi}{4}$. Teraz musimy jeszcze dobrać wartość parametru a w taki sposób, by także kąt δ (patrz rysunek poniżej) też był równy $\frac{\pi}{4}$.



Biorąc pod uwagę trójkąt prostokątny o przeciwprostokątnej długości R i korzystając z Twierdzenia Pitagorasa obliczamy $R = a\sqrt{2}$. Zauważmy teraz, że $\cos \delta = \frac{R^2 + r^2 - d^2}{2Rr}$

(Własność 3.5 dla $\delta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$), gdzie $r = \sqrt{2}$ i $d = a + 1$, co po podstawieniu daje

$$\cos \delta = \frac{(a\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 - (a+1)^2}{2(a\sqrt{2})\sqrt{2}} = \frac{2a^2 + 2 - a^2 - 2a - 1}{4a} = \frac{a^2 - 2a + 1}{4a}.$$

Z drugiej strony chcemy, by $\delta = \frac{\pi}{4}$, zatem $\cos \delta = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Mamy więc $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2 - 2a + 1}{4a}$, z czego wyliczamy

$$\frac{4a\sqrt{2}}{2} = a^2 - 2a + 1.$$

Dalej otrzymujemy równanie kwadratowe $a^2 - (2 + 2\sqrt{2})a + 1 = 0$, które ma dwa rozwiązania: $a_1 = 1 + \sqrt{2} - \sqrt{2\sqrt{2} + 2}$ i $a_2 = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{2\sqrt{2} + 2}$. Ponieważ szukamy $a > 1$, więc półokrąg C_2 będzie miał środek $(-a_2, 0)$ i promień $R = a_2\sqrt{2}$ i wraz z osią y i półokręgiem C_1 wyznaczy trójkąt o trzech kątach równych $\frac{\pi}{4}$.

Uwaga: Powyżej skonstruowaliśmy trójkąt o trzech kątach równych $\frac{\pi}{4}$, czyli o sumie

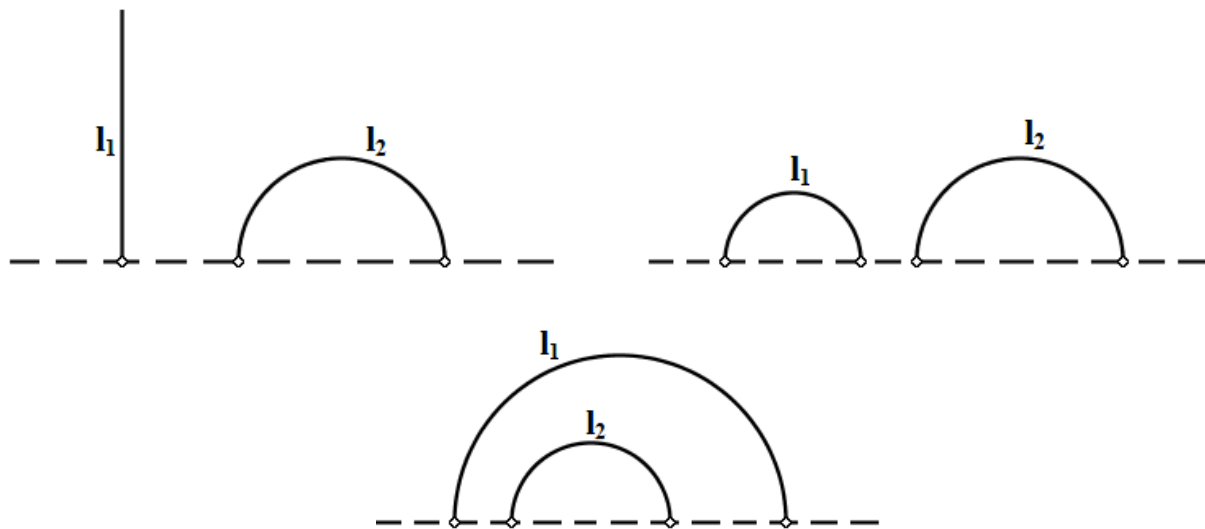
kątów równej $\frac{3\pi}{4}$. Przykład ten pokazuje, że w geometrii nieeuklidesowej suma kątów wewnętrznych trójkąta nie musi być równa π tak, jak ma to miejsce w geometrii euklidesowej.

3.3.3. Asymptotyczność i rozbieżność w modelu Poincarégo.

W rozdziale 2.4.2 poznaliśmy już definicje asymptotyczności i rozbieżności w geometrii nieeuklidesowej niezależną od modelu oraz definicje tych pojęć w modelu Kleina. Teraz określimy ich interpretację w modelu Poincarégo.

Definicja 3.7. W modelu Poincarégo rozłączne proste l_1, l_2 nie będące dwoma prostymi pionowymi nazywamy rozbieżnymi, jeśli po przedłużeniu ich do brzegu modelu proste te nie przetną się.

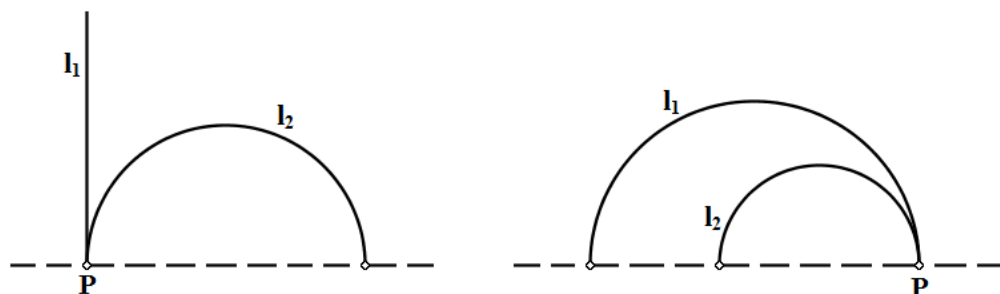
Przykłady prostych rozbieżnych (w każdym z przypadków proste l_1 i l_2 są rozbieżne):

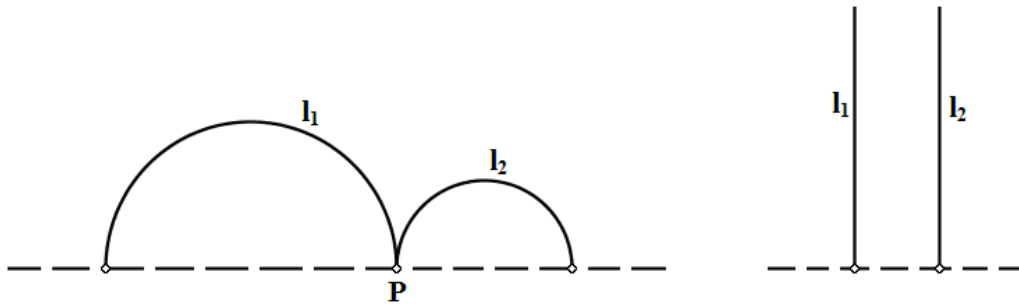


Jeżeli proste rozłączne w modelu nie są rozbieżne, to wtedy mówimy, że są asymptotyczne.

Definicja 3.8. W modelu Poincarégo rozłączne proste l_1, l_2 nazywamy asymptotycznymi, jeżeli po przedłużeniu do brzegu modelu posiadają punkt wspólny lub obie są prostymi pionowymi.

Na poniższych rysunkach zostały podane przykłady prostych asymptotycznych l_1 i l_2 , których przedłużenia w trzech pierwszych przypadkach mają punkt wspólny P .

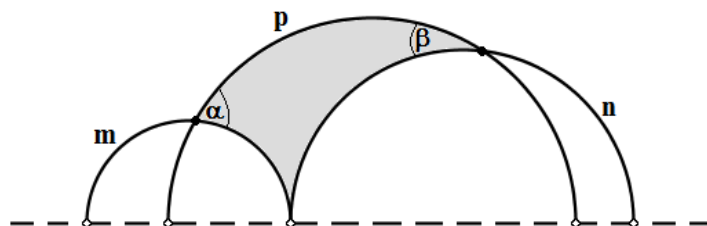




Istnieje jeszcze jeden sposób definiowania prostych asymptotycznych w modelu Poincarégo. Zanim jednak go poznamy, zastanówmy się, czym tak naprawdę jest punkt. Jako pojęcie pierwotne, zarówno w geometrii euklidesowej jak i nieeuklidesowej, punkt jest pojęciem niedefiniowalnym. Możemy go jednak intuicyjnie traktować jako pewne miejsce na określonej płaszczyźnie. Jeżeli mamy do czynienia z płaszczyzną nieskończoną, możemy przyjąć, że „nieskończoność” też jest pewnym miejscem, czyli zgodnie z wcześniejszym tokiem rozumowania także jest to pewien punkt, jednak nieco abstrakcyjny i nienależący do danej płaszczyzny. Nazwijmy ten punkt „punktem w nieskończoności”. Wobec tego, że w modelu Poincarégo pionowe proste są nieograniczone możemy przyjąć, że wszystkie przechodzą przez miejsce zwane nieskończonością, czyli mają punkt wspólny (poza płaszczyzną modelu), który jest „punktem w nieskończoności”. W przypadku płaszczyzny Poincarégo mamy do czynienia jeszcze z jednym rodzajem punktów, które zasługują na miano „punktów w nieskończoności”. Są to punkty leżące na prostej ograniczającej płaszczyznę modelu. Są one mniej abstrakcyjne, niż te wcześniej zdefiniowane, gdyż możemy wskazać i dokładnie zaznaczyć ich położenie. Jednak gdybyśmy wyobrazili sobie, że chodzimy po płaszczyźnie Poincarégo, to nigdy nie dotarlibyśmy do tych punktów, w związku z tym przyjmujemy, że one także są „punktami w nieskończoności”. Aby jednak odróżnić je od tych wcześniejszych, przyjmijmy, że punkty na prostej ograniczającej model będziemy nazywali „punktami w dolnej nieskończoności”, natomiast punkt wspólny prostych pionowych niech będzie „punktem w górnej nieskończoności”. Wobec tego proste asymptotyczne możemy także definiować jako proste, których przedłużenia poza płaszczyznę modelu posiadają punkt wspólny w górnej lub w dolnej nieskończoności.

Sieczne jednakowego nachylenia

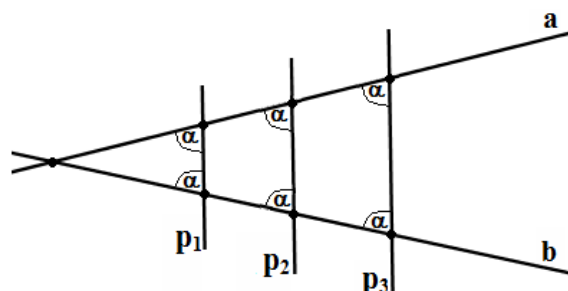
Dla prostych asymptotycznych wyróżniamy pewne charakterystyczne dla nich proste. Otóż jeżeli mamy dane dwie proste asymptotyczne, to wśród wszystkich prostych, które je przecinają, niektóre są szczególne i noszą nazwę siecznych jednakowego nachylenia. Zobaczmy, jaką wyróżniającą je własność one posiadają. Poprowadźmy zatem dwie dowolne proste asymptotyczne m i n i przetnijmy je trzecią prostą p , jak na rysunku poniżej.



Punkty przecięcia m i n z prostą p wyznaczyły dwie półproste asymptotyczne. Weźmy teraz pod uwagę kąty α i β , które mają jedno wspólne ramię na prostej p a drugie ramię danego kąta w każdym przypadku stanowi jedna z półprostych asymptotycznych.

Definicja 3.9. Jeśli prosta p przecina proste asymptotyczne m i n w taki sposób, że kąty α i β są sobie równe, to wtedy mówimy, że p jest sieczną jednakowego nachylenia dla prostych m i n .

W geometrii euklidesowej też istnieją proste, które mają podobną własność, jak sieczne jednakowego nachylenia. Są to wszystkie proste p_i , jak na rysunku obok, które przecinają dwie dowolne proste a i b w taki sposób, że miary kątów nachylenia prostych a i b do danej p_i są takie same.

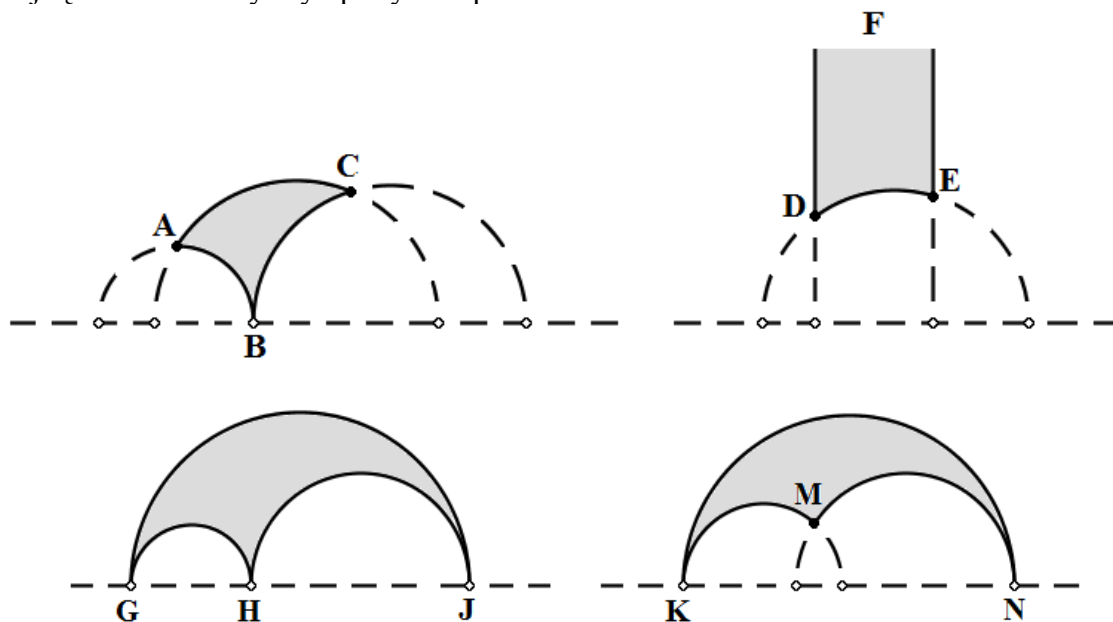


Pod koniec następnego podrozdziału przekonamy się, że dla danej pary prostych asymptotycznych istnieje wiele siecznych jednakowego nachylenia oraz poznamy metodę ich konstruowania w modelu półpłaszczyznowym.

Wielokąty idealne

Weźmy jeszcze raz pod uwagę sytuację, gdy dowolna prosta p przecina dwie proste asymptotyczne a i b . Proste a , b i p wyznaczają wtedy trzy obiekty: dwie półproste asymptotyczne oraz odcinek na prostej p , które tworzą specyficzne trójkąty, tzw. trójkąty idealne.

Poniżej podamy przykłady trójkątów idealnych (trójkąty ABC , DEF , GHI , KMN). W każdym z nich niektóre pary boków zostały zastąpione przez pary półprostych (lub prostych) asymptotycznych, np. w trójkącie ABC wyróżniamy asymptotyczne półproste AB i BC , a w trójkącie GHI mamy asymptotyczne proste GI i HI .



W geometrii hiperbolicznej można utworzyć nie tylko trójkąty, ale dowolne wielokąty, w których występują pary półprostych (lub prostych) asymptotycznych.

Definicja 3.10. Wielokąt, w których niektóre pary boków są zastąpione asymptotycznymi półprostymi (prostymi) nazywamy wielokątami idealnymi.

Jak widać na powyższych rysunkach, niektóre wierzchołki trójkątów idealnych są punktami, które nie należą do płaszczyzny modelu (punkty B, F, G, H, J, K, M).

Definicja 3.11. Wierzchołki wielokąta idealnego, które nie należą do płaszczyzny modelu nazywamy wierzchołkami idealnymi.

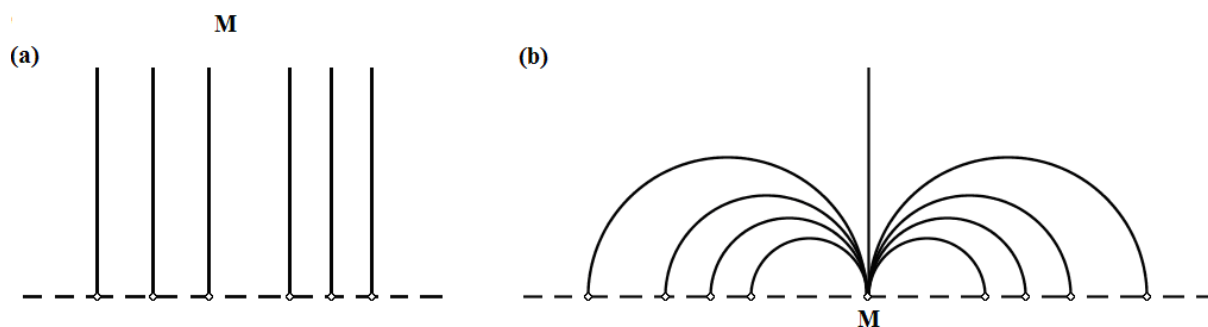
Każdy wielokąt idealny ma przynajmniej jeden wierzchołek idealny, co wynika z Definicji 3.10. Ponadto istnieją wielokąty, których wszystkie wierzchołki są idealne (np. trójkąt GHJ na rysunku powyżej).

3.3.4. Horocykle w modelu Poincarégo.

W modelu Poincarégo, podobnie jak w modelu Kleina, horocykl jest określany przy pomocy pęku prostych asymptotycznych. Zdefiniujmy więc pojęcie pęku prostych asymptotycznych w modelu Poincarégo.

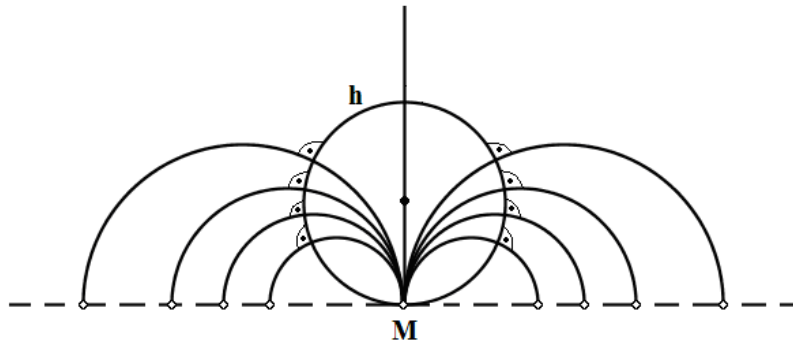
Definicja 3.12. Pęk prostych asymptotycznych w modelu Poincarégo to zbiór wszystkich prostych, których przedłużenia przechodzą przez dany punkt M , który jest „punktem w dolnej nieskończoności” lub „punktem w górnej nieskończoności”.

W omawianym modelu wyróżniamy dwa rodzaje pęków prostych asymptotycznych. Jednym jest pęk prostych, w skład którego wchodzi wszystkie proste pionowe (poniżej rysunek (a)) o punkcie wspólnym, którym jest „punkt w górnej nieskończoności”. Drugim natomiast jest pęk prostych, w skład którego wchodzi jedna prosta pionowa wychodząca z M (który jest „punktem w dolnej nieskończoności”) i proste reprezentowane przez euklidesowe półokręgi, których jeden koniec znajduje się w punkcie M (poniżej rysunek (b)).

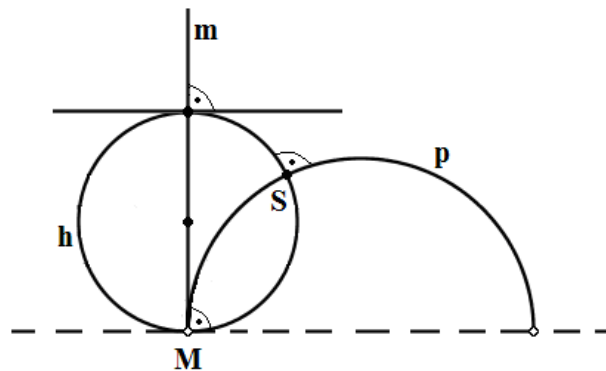


Przypomnijmy, że zgodnie z Definicją 2.30 horocyklem nazywamy linię prostopadłą do każdej prostej z ustalonego pęku prostych asymptotycznych. Wobec tego, że w modelu Poincarégo są dwa rodzaje pęków prostych, więc też wyróżniamy dwa rodzaje horocyklów.

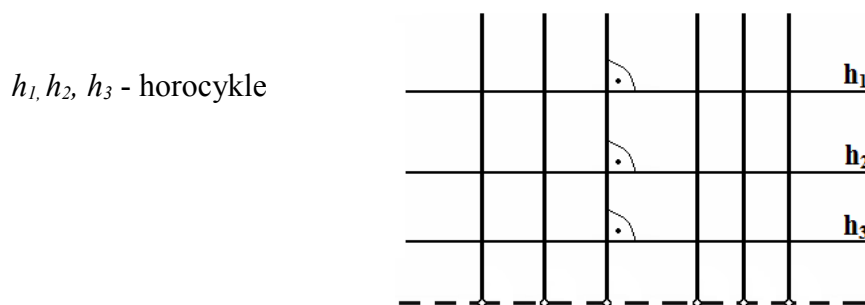
Fakt 3.13. Dla pęku prostych, których przedłużenia mają punkt wspólny M na brzegu modelu horocyklem h jest każdy euklidesowy okrąg styczny do brzegu modelu w punkcie M .



Dowód: Pokażemy, że dowolny euklidesowy okrąg h styczny do brzegu modelu w punkcie M jest prostopadły do każdej prostej z pęku prostych asymptotycznych, których przedłużenia przecinają się właśnie w punkcie M . Okrąg h jest prostopadły do pionowej prostej m z tego pęku prostych asymptotycznych, gdyż styczna do h poprowadzona w punkcie przecięcia z prostą m przecina ją pod kątem prostym (patrz rysunek poniżej). Weźmy teraz dowolną prostą p z naszego pęku prostych reprezentowaną w modelu euklidesowym półokręgiem. Styczną do h w punkcie M jest euklidesowa prosta będąca brzegiem modelu. Natomiast styczną w punkcie M do p jest euklidesowa prosta prostopadła do brzegu modelu. Skoro styczne do h i p w punkcie M są względem siebie prostopadłe, zatem prosta p i okrąg h przecinają się w punkcie M pod kątem prostym. Korzystając z własności, która mówi, że jeśli dwa dowolnie położone okręgi przecinają się w dwóch punktach, to kąty ich przecięcia w tych punktach są jednakowe (własność ta została uzasadniona w dowodzie Faktu 2.31) otrzymujemy, że także w punkcie S prosta p i euklidesowy okrąg h są prostopadłe. Z dowolności doboru h i p otrzymujemy dowód Faktu 3.13.



Fakt 3.14. *Horocyklem dla pęku prostych prostopadłych do brzegu modelu jest każda euklidesowa prosta równoległa do brzegu modelu.*



Dowód: Poziomy brzeg modelu jest prostopadły do pionowych prostych, zatem także każda

euklidesowa prosta równoległa do brzegu modelu jest prostopadła do pionowych prostych.

Uwaga: Można udowodnić, że horocykle opisane w Falcie 3.13 i w Falcie 3.14 są jedynymi horocykłami związanymi z poszczególnymi pękami prostych asymptotycznych, jednak dowód ten wymaga skorzystania z teorii równań różniczkowych.

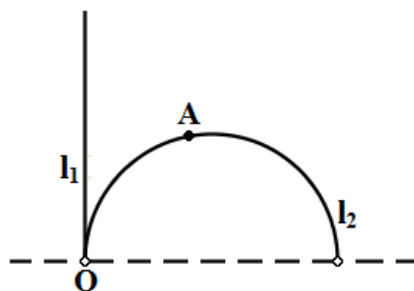
Wyznaczanie siecznej jednakowego nachylenia za pomocą horocyklu

Horocykle posiadają pewną własność związaną z siecznymi jednakowego nachylenia:

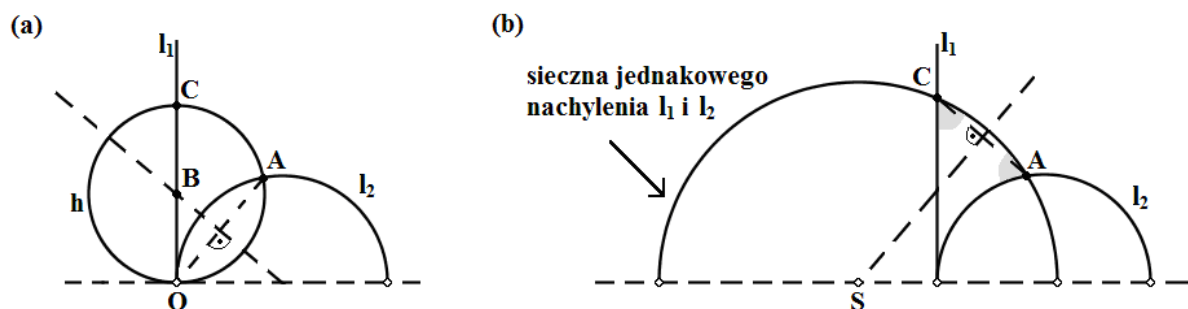
Własność 3.15. *Horocykl danego pęku prostych asymptotycznych przecina każdą parę prostych z tego pęku w punktach należących do siecznej jednakowego nachylenia tych prostych.*

Dowód tej własności pominiemy, gdyż wykracza on poza ramy tego skryptu.

Własność 3.15 pozwala nam w łatwy sposób wyznaczyć sieczną jednakowego nachylenia dwóch dowolnych prostych asymptotycznych przechodzącą przez ustalony punkt na jednej z nich. Weźmy przykładowo proste l_1 , l_2 i punkt $A \in l_2$ jak na rysunku poniżej.



Naszym celem jest poprowadzenie siecznej jednakowego nachylenia prostych l_1 i l_2 , która będzie przechodzić przez punkt A . Aby to zrobić, musimy najpierw wyznaczyć horocykl h (patrz rysunek (a) poniżej) przechodzący przez A . Konstruujemy więc euklidesową symetralną odcinka OA i zaznaczamy punkt B , który jest punktem przecięcia tej symetralnej z prostą l_1 . Punkt B będzie środkiem horocyklu, a odcinek OB jego promieniem. Niech punkt C będzie punktem przecięcia horocyklu z prostą l_1 . Na mocy Własności 3.15 przez punkty A i C przechodzi sieczna jednakowego nachylenia prostych l_1 i l_2 . Punkty A i C nie leżą na jednej prostej pionowej, więc sieczną jednakowego nachylenia będzie w tym przypadku prosta reprezentowana w modelu przez euklidesowy półokrąg. Jego środkiem S będzie punkt przecięcia symetralnej odcinka AC i brzegu modelu (rysunek (b) poniżej) a promieniem - odcinek AS (lub CS).



Zaprezentowana powyżej konstrukcja jest ogólną metodą wyznaczania siecznej jednakowego nachylenia dwóch prostych, zatem można ją stosować dla dowolnych dwóch prostych

w modelu Poincarégo. Ponadto metoda ta pozwala na udowodnienie faktu, iż dla dowolnego punktu A należącego do jednej z prostych asymptotycznych l_1, l_2 istnieje pewna sieczna jednakowego nachylenia tych prostych przechodząca przez A . Dla takiego punktu zachodzi też własność, że przechodząca przez niego sieczna jednakowego nachylenia prostych l_1, l_2 jest jedyna, jednak fakt ten nie wynika z powyższej metody.

Zadania dotyczące modelu Poincarégo

Ćwiczenia

- Znajdź oba kąty pomiędzy następującymi parami prostych:
 - $x^2 + y^2 = 3, (x - 1)^2 + y^2 = 4$;
 - $x^2 + y^2 = 5, x = -1$
- Znajdź równanie prostej (tzn. reprezentującego jej półokręgu) przechodzącej przez punkty $(-1, 2)$ oraz $(2, 1)$.
- Znajdź równanie prostej prostopadłej do prostej $L : x^2 + y^2 = 25$ i przechodzącej przez:
 - punkt $(3, 4)$ leżący na prostej L ;
 - punkt $(1, 7)$.
- Znajdź równania obu prostych przecinających prostą $x = 2$ w punkcie $(2, 5)$ pod kątem $\frac{\pi}{3}$.
- Znajdź równania obu prostych asymptotycznych do prostej $(x - 2)^2 + y^2 = 20$ przechodzących przez punkt $(1, 1)$.
- Uzasadnij, że dla dwóch nieasymptotycznych półprostych istnieje dokładnie jedna prosta asymptotyczna do obu z nich.

Zadania

- Znajdź prostą prostopadłą do prostej $(x - 7)^2 + y^2 = 4$ i przecinającą prostą $x = 6$ pod kątem $\frac{\pi}{6}$.
- Oblicz, posługując się tablicami funkcji trygonometrycznych lub kalkulatorem sumę kątów w trójkątach o zadanych wierzchołkach:
 - $(0, 1), (1, 1), (3, 1)$;
 - $(0, 1), (0, 2), (1, 2)$;
- Znajdź równania dwusiecznych obu kątów pomiędzy prostymi $x^2 + y^2 = 4, x = -1$.
- Znajdź w modelu półpłaszczyznowym:
 - trójkąt o sumie kątów równej $\frac{3\pi}{4}$;
 - kąt rozwarty zawarty w obszarze kąta ostrego;
 - prostopadłą wypuszczoną z jednego ramienia kąta ostrego, która nie przecina drugiego ramienia tego kąta;
 - czworokąt o trzech kątach prostych i czwartym kącie $\frac{\pi}{3}$.
- Uzasadnij, że proste asymptotyczne do prostej $x = 4$ nie mają z nią wspólnej prostopadłej.
- Znajdź wspólną prostopadłą do następujących par prostych rozbieżnych:

- a) $x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 4;$
 b) $x^2 + y^2 = 1, x = 2;$
 c) $x^2 + y^2 = 1, (x - 1)^2 + y^2 = 10;$
 d) $x^2 + y^2 = 1, (x - 4)^2 + y^2 = 4;$
7. Znajdź przykład trójkąta o jednym wierzchołku idealnym i o kątach $\frac{\pi}{3}$ w dwóch pozostałych wierzchołkach.
8. W czworokącie idealnym (o wszystkich czterech wierzchołkach idealnych) przekątnymi nazywamy proste „łączące” pary przeciwległych wierzchołków idealnych. Dla dowolnego kąta $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$ podaj przykład czworokąta idealnego, którego przekątne przecinają się pod kątem α .
9. Uzasadnij, że:
 a) prosta i horocykl b) dwa różne horocykle
 mogą mieć co najwyżej dwa punkty wspólne.
10. Uzasadnij, że prosta przecinająca horocykl w dwóch punktach tworzy z nim dwa jednakowe kąty przecięcia.
11. Dane są dwie asymptotyczne proste, z których przynajmniej jedna jest reprezentowana w modelu półokręgiem. Dla dowolnego punktu na którejkolwiek z tych prostych skonstruuj sieczną jednakowego nachylenia przechodzącą przez ten punkt. Wskazówka: skorzystaj z pomocniczego horocyklu.
12. Uzasadnij, że przez dwa różne punkty płaszczyzny nieeuklidesowej przechodzą dokładnie dwa horocykle. Rozważ odpowiednie przypadki wzajemnego położenia dwóch punktów na górnej półpłaszczyźnie.

3.4 Izometrie płaszczyzny nieeuklidesowej w modelu półpłaszczyznowym

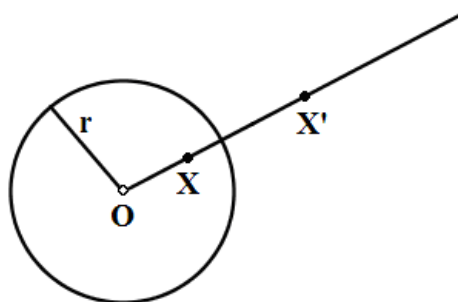
W niniejszym rozdziale opiszemy przekształcenia w modelu Poincarégo, które są izometriami. Przypomnijmy, że izometrią nazywamy odwzorowanie, które zachowuje odległości, tzn. odległość obrazów dwóch dowolnych punktów jest taka sama, jak odległość tych punktów.

Najpierw jednak omówimy jedno z przekształceń płaszczyzny euklidesowej, tzw. inwersję względem okręgu, która w dalszej części tego rozdziału posłuży nam do zdefiniowania pewnej rodziny izometrii w modelu Poincarégo.

3.4.1 Inwersja względem okręgu.

Inwersja względem okręgu jest przekształceniem płaszczyzny euklidesowej, które w przeciwieństwie do innych jej odwzorowań może przekształcać proste w okręgi i okręgi w proste. W tym paragrafie podamy definicję inwersji względem okręgu oraz poznamy pewne jej własności – jak się okaże, niektóre z nich będą podobne do własności symetrii osiowej na \mathbb{R}^2 .

Definicja 3.16. Niech dany będzie okrąg C o środku O i promieniu r . Inwersją względem okręgu C nazywamy przekształcenie $I_C : \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$, które dowolnemu punktowi X przyporządkowuje taki punkt X' leżący na półprostej OX^+ , że $|OX| \cdot |OX'| = r^2$. Fakt, że X' jest obrazem w inwersji punktu X zapisujemy jako $I_C(X) = X'$.

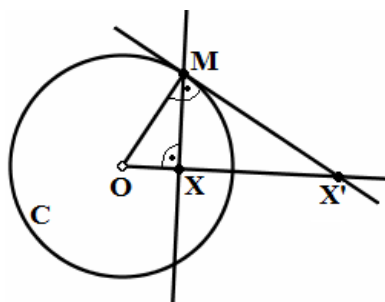


Uwaga: Na płaszczyźnie euklidesowej, podobnie jak w modelu Poincarégo, możemy rozpatrywać abstrakcyjny „dodatkowy” punkt, o którym myślimy, że znajduje się w nieskończoności. Wobec tego definicję inwersji względem okręgu można rozszerzyć, dodając do dziedziny przekształcenia punkt O oraz właśnie „punkt w nieskończoności”, który oznaczamy symbolem ∞ . Wtedy inwersja będzie przekształceniem $I_C : \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$, w którym obrazem punktu O w inwersji względem okręgu C o środku w O jest „punkt w nieskończoności”, natomiast obrazem „punktu w nieskończoności” jest O .

W niniejszym rozdziale, rozpatrując inwersję względem okręgu C , będziemy przyjmować, że środkiem okręgu C jest punkt O , a jego promieniem jest odcinek długości r .

Wyznaczenie obrazu danego punktu w inwersji względem okręgu

Zobaczmy, w jaki sposób można skonstruować punkt X' będący obrazem ustalonego punktu X w inwersji względem okręgu C . Rozpatrzmy najpierw sytuację, gdy X znajduje się we wnętrzu koła ograniczonego okręgiem C . W takim przypadku najpierw prowadzimy półprostą OX^\rightarrow , gdzie O jest środkiem okręgu C , a następnie w punkcie X wyznaczamy prostą prostopadłą do OX^\rightarrow (patrz rysunek poniżej). Oznaczmy jako M jeden z punktów przecięcia wyznaczonej prostopadłej i okręgu C i skonstruujmy styczną do okręgu w punkcie M . Punkt przecięcia tej stycznej i półprostej OX^\rightarrow jest obrazem X w inwersji względem C , czyli punktem X' .



Trójkąty OXM i $OX'M$ są podobne (cecha podobieństwa kkk⁵), zatem prawdziwa jest równość: $\frac{r}{|OX|} = \frac{|OX'|}{r}$, skąd otrzymujemy $|OX| \cdot |OX'| = r^2$, co na mocy Definicji 3.16 potwierdza, że rzeczywiście $I_C(X) = X'$.

W sytuacji, gdy punkt X leży na zewnątrz koła ograniczonego przez C przeprowadzamy konstrukcję punktu X' jak powyżej, ale zamieniając X z X' i w kolejności odwrotnej, tzn. zaczynamy od konstrukcji stycznej do okręgu przechodzącej przez X , a następnie prowadzimy prostą m prostopadłą do OX przechodzącą przez punkt wspólny okręgu i stycznej do okręgu. Punkt wspólny prostych: m i OX będzie obrazem punktu X w inwersji względem danego okręgu.

⁵ Cecha podobieństwa trójkątów kąt – kąt – kąt (kkk) mówi, że jeśli miary dwóch kątów jednego trójkąta są równe miarom odpowiednich dwóch kątów drugiego trójkąta, to te trójkąty są podobne (miary trzecich kątów też muszą być wtedy równe).

Własności inwersji

Własność 3.17. *Inwersja jest inwolucją, czyli przekształceniem odwrotnym do samego siebie.*

Dowód: Dane przekształcenie P jest odwracalne (tzn. posiada przekształcenie odwrotne oznaczane jako P^{-1}), jeśli jest wzajemnie jednoznaczne, czyli jest różnowartościowe i „na”⁶. Sprawdźmy, czy inwersja spełnia te warunki. Weźmy więc punkty X i Y takie, że $X \neq Y$. Niech X' i Y' będą obrazami X i Y w inwersji względem okręgu C . Jeśli X i Y leżą na różnych półprostych o początku w O , to także ich obrazy należą do różnych półprostych o początku w O i z Definicji 3.16 musi zachodzić $X' \neq Y'$. Jeśli natomiast punkt X leży na półprostej OY^{-1} , wtedy z warunku $X \neq Y$ wynika, że $|OX| \neq |OY|$. Na mocy Definicji 3.16 zachodzi $|OX| \cdot |OX'| = r^2$ i $|OY| \cdot |OY'| = r^2$, z czego $|OX| \cdot |OX'| = |OY| \cdot |OY'|$. Skoro $|OX| \neq |OY|$, więc musi zachodzić warunek $|OX'| \neq |OY'|$, skąd otrzymujemy $X' \neq Y'$, czyli inwersja względem okręgu jest przekształceniem różnowartościowym. Spójrzmy teraz na konstrukcję obrazu danego punktu w inwersji, która jest zamieszczona powyżej. Biorąc dowolny punkt Y ze zbioru $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ i wykonując konstrukcję odwrotną (czyli konstruując „od tyłu”) do tej wyznaczającej obraz danego punktu w inwersji względem okręgu, możemy znaleźć taki punkt X , że $I_C(X) = Y$, zatem inwersja jest przekształceniem „na”. Istnienie konstrukcji odwrotnej nie tylko uzasadnia, że inwersja jest surjekcją, ale też pokazuje, że jest ona przekształceniem odwrotnym do samej siebie, co dodatkowo potwierdza sama Definicja 3.16, według której $|OX| \cdot |OX'| = |OX'| \cdot |OX| = r^2$, co oznacza, że $I_C(X') = X$, gdzie $I_C(X) = X'$, więc $I_C^{-1} = I_C$.

Własność 3.18. *Okrąg C jest zbiorem punktów stałych inwersji względem C .*

Dowód: Niech $X \in C$, czyli $|OX| = r$ i niech X' będzie obrazem punktu X w inwersji względem okręgu C . Wtedy z Definicji 3.16 mamy $|OX| \cdot |OX'| = r^2$, a więc $r \cdot |OX'| = r^2$, zatem $|OX'| = r$. Z tego oraz z faktu, że $X' \in OX^{-1}$ otrzymujemy, że $X' = X$.

Własność 3.19. *Obrazami punktów z wnętrza koła K ograniczonego okręgiem C w inwersji względem tego okręgu są punkty znajdujące się na zewnątrz koła K , natomiast obrazami punktów znajdujących się na zewnątrz koła K są punkty z jego wnętrza.*

Dowód: Niech X' będzie obrazem punktu X w inwersji względem okręgu C . Wtedy z Definicji 3.16 $|OX| \cdot |OX'| = r^2$. Załóżmy, że X jest punktem z wnętrza koła ograniczonego przez C , czyli $|OX| < r$. Gdyby X' też leżał we wnętrzu tego koła lub na okręgu C , a więc $|OX'| \leq r$ to wtedy mielibyśmy $|OX| \cdot |OX'| < r^2$, co jest sprzeczne z Definicją 3.16.

Dla punktu leżącego na zewnątrz koła K dowód przeprowadza się analogicznie.

Własność 3.20. *Obszar znajdujący się na zewnątrz okręgu C w inwersji względem tego okręgu zostaje przekształcony na obszar z jego wnętrza.*

Dowód: Zgodnie z Własnością 3.19 każdy punkt znajdujący się na zewnątrz okręgu C przechodzi w inwersji na punkt z wnętrza koła K ograniczonego tym okręgiem. Ponadto

⁶ Przekształcenie zbiorów $T: X \rightarrow Y$ jest „na” (tzw. surjekcja), jeśli dla każdego $y \in Y$ istnieje taki $x \in X$, że $T(x) = y$.

inwersja jest przekształceniem „na” (fakt ten został uzasadniony w dowodzie Własności 3.17), więc każdy punkt z wnętrza koła K jest obrazem jakiegoś punktu znajdującego się na zewnątrz K , co dowodzi spełnienia Własności 3.20.

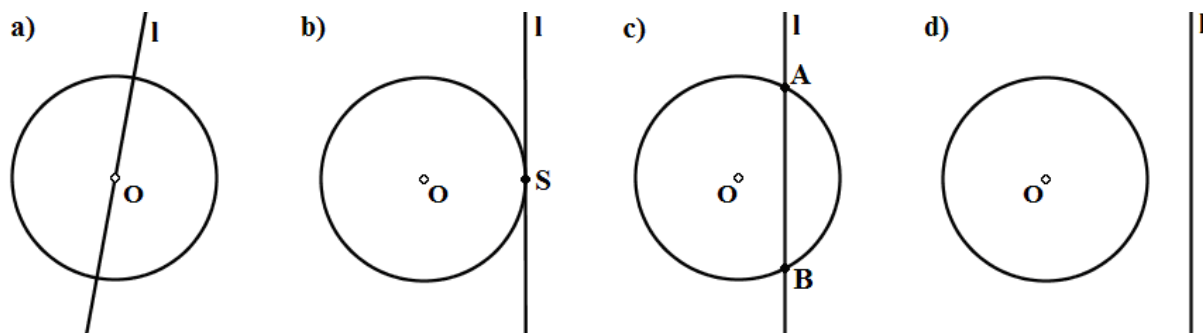
Własność 3.21. *Obrazem dowolnej półprostej OA^\rightarrow (bez punktu początkowego) jest ta sama półprosta.*

Dowód: Niech OA^\rightarrow będzie dowolną półprostą (bez punktu początkowego). Na mocy Definicji 3.16 i Własności 3.20 punkty należące do tej półprostej i znajdujące się na zewnątrz okręgu inwersji C przechodzą na punkty z wnętrza koła K ograniczonego przez C . Wobec faktu, że inwersja jest przekształceniem „na”, każdy punkt półprostej OA^\rightarrow z wnętrza K jest obrazem jakiegoś punktu należącego do OA^\rightarrow i znajdującego się na zewnątrz K . Na mocy Własności 3.17 także każdy punkt półprostej OA^\rightarrow leżący na zewnątrz K jest obrazem jakiegoś punktu z jego wnętrza. Skoro więc część danej półprostej zawarta we wnętrzu K przechodzi na część OA^\rightarrow leżąca na zewnątrz K i odwrotnie oraz punkt z okręgu C przechodzi na siebie (Własność 3.18), zatem obrazem OA^\rightarrow jest ta sama półprosta.

Zastanówmy się teraz, czym są obrazy prostych i okręgów w inwersji względem ustalonego okręgu.

Obraz prostej w inwersji

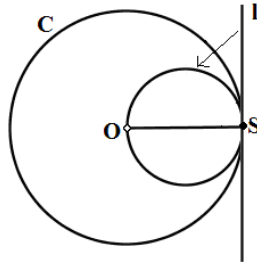
Możliwe przypadki wzajemnego położenia prostej i okręgu inwersji można zobrazować w następujący sposób:



O tym, jak wyglądają obrazy prostych w każdym z przedstawionych przypadków, mówi poniższy fakt.

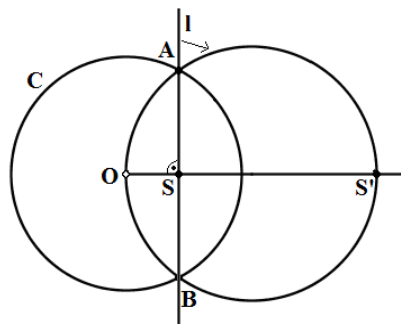
Fakt 3.22. *W inwersji względem okręgu C o środku w punkcie O i promieniu r :*

- a) *obrazem prostej l przechodzącej przez O (z wyłączeniem punktu O) jest ta sama prosta l ;*
- b) *obrazem prostej l stycznej do okręgu C (czyli mającej z nim dokładnie jeden punkt wspólny S) jest okrąg o średnicy OS (z wyłączeniem punktu O);*

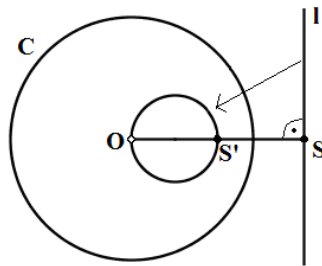


c) obrazem prostej l , która przecina okrąg C w dwóch punktach: A i B jest okrąg o średnicy OS' (z wyłączeniem punktu O), gdzie S' jest obrazem w inwersji rzutu prostokątnego S punktu O na prostą l .

Obraz prostej l w rozpatrywanej inwersji można równoważnie wyznaczyć, konstruując okrąg przechodzący przez punkty: O , A i B ;

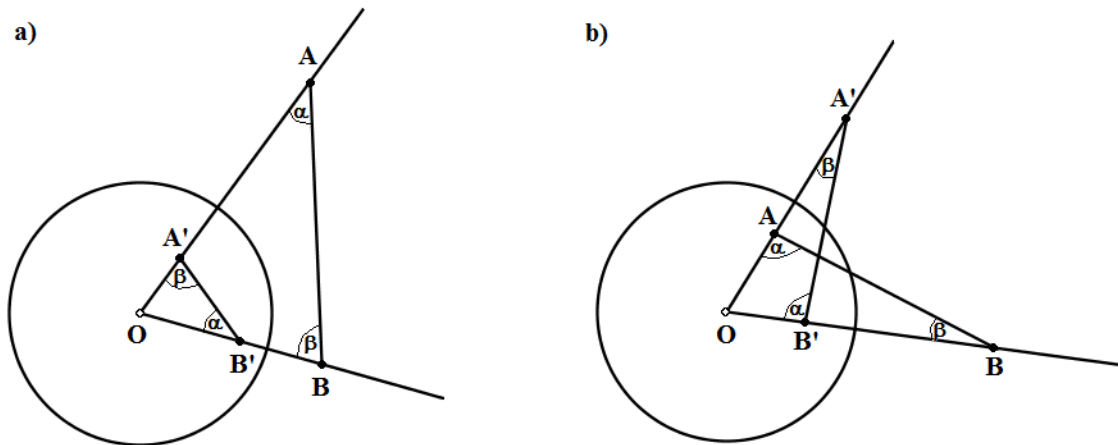


d) obrazem prostej l nieprzecinającej okręgu C jest okrąg o średnicy OS' , gdzie S' jest obrazem w inwersji rzutu prostokątnego S punktu O na prostą l .



Zanim dowiedzimy prawdziwości Faktu 3.22, wprowadzimy pewien lemat, z którego w tym dowodzie będziemy korzystać.

Lemat 3.23. Niech A i B będą takimi punktami, że O , A i B nie leżą na jednej prostej. Wtedy obrazem punktów A i B w inwersji względem okręgu C o środku O są punkty A' , B' takie, że trójkąty OAB i $OB'A'$ są podobne.

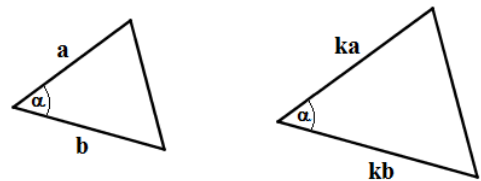


Uwaga: W powyższym lemacie bok OA trójkąta OAB odpowiada względem podobieństwa bokowi OB' trójkąta $OB'A'$ (a nie bokowi OA' , jak podpowiadałaby intuicja), ponieważ inwersja zmienia odległości punktów od środka okręgu inwersji w ten sposób, że jeśli dla dowolnych punktów A, B mamy $|OA| > |OB|$, to dla ich obrazów w inwersji względem okręgów zachodzi $|OA'| < |OB'|$. Własność tę łatwo uzasadnić, podstawiając w pierwszej nierówności $|OA| = \frac{r^2}{|OA'|}$ oraz $|OB| = \frac{r^2}{|OB'|}$, co wynika z Definicji 3.16.

Dowód Lematu 3.23: Na powyższych rysunkach zostały przedstawione dwa możliwe położenia punktów A i B . Na pierwszym oba te punkty leżą na zewnątrz okręgu C (na mocy Własności 3.17 sytuacja ta jest analogiczna do tej, gdy A i B leżą wewnątrz koła ograniczonego okręgiem C), natomiast na rysunku b) punkty te leżą po różnych stronach C (tzn. jeden na zewnątrz, a drugi we wnętrzu koła ograniczonego C). Dla obu przypadków dowód Lematu 3.22 przeprowadza się w ten sam sposób.

Będziemy korzystać z cechy podobieństwa trójkątów bok – kąt – bok (bkb), według której jeśli w jednym trójkącie jeden z kątów ma taką samą miarę, jak pewien kąt drugiego trójkąta, zaś odpowiadające sobie boki będące ramionami tych kątów w obu trójkątach pozostają w stałej proporcji (na rysunku obok w proporcji równej $k \in \mathbb{R}$), to wówczas te trójkąty są podobne.

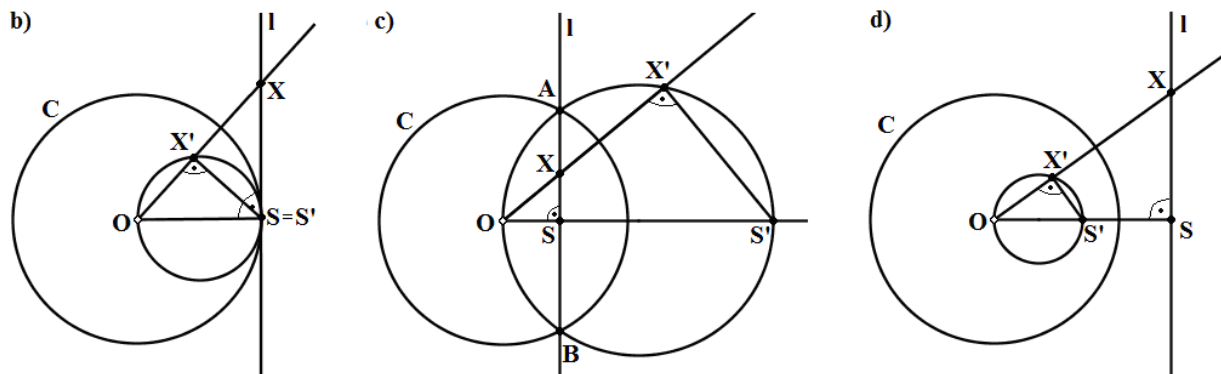
W trójkątach OAB i $OB'A'$ następujące boki odpowiadają sobie względem podobieństwa: OA i OB' , OB i OA' oraz AB i $A'B'$. Ponadto trójkąty te mają w wierzchołku O wspólny kąt, a dla boków, które są ramionami wspólnego kąta z Definicji 3.16 zachodzą równości $|OA| \cdot |OA'| = r^2$ oraz $|OB| \cdot |OB'| = r^2$, z czego wynika, że $|OA| \cdot |OA'| = |OB| \cdot |OB'|$, co możemy równoważnie przedstawić jako $\frac{|OA'|}{|OB|} = \frac{|OB'|}{|OA|}$. Oznacza to, że nasze trójkąty spełniają cechę bkb, zatem są podobne.



Dowód Faktu 3.22:

a) Daną prostą przechodzącą przez środek okręgu inwersji możemy traktować jako dwie półproste o początku w punkcie O (z wyłączeniem tego punktu). Wtedy dowód wynika z Własności 3.21.

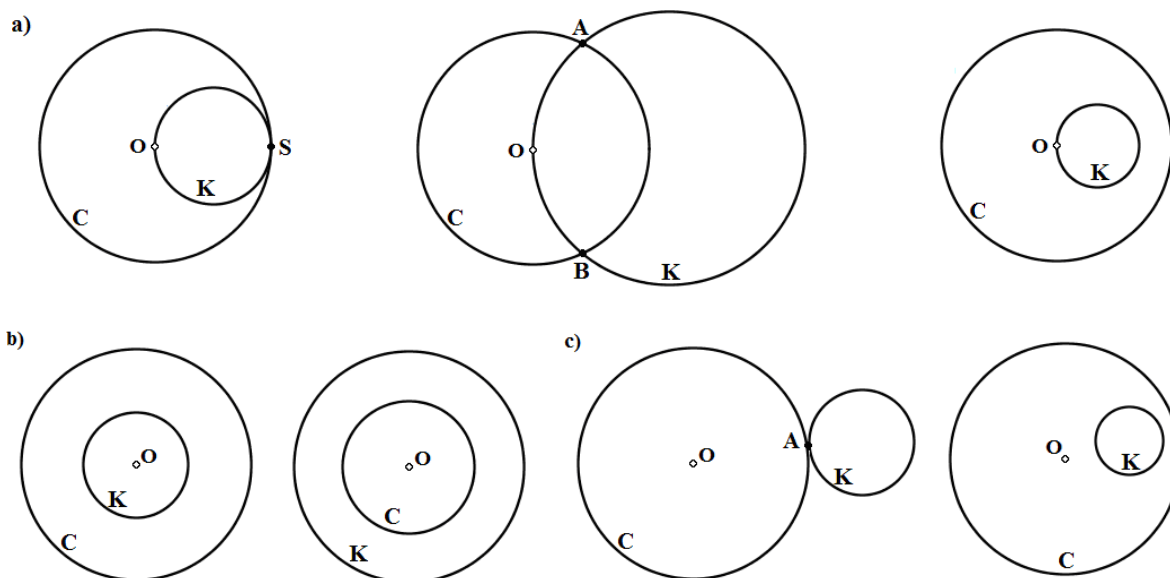
Podpunktów b), c), d) dowodzimy w ten sam, opisany poniżej sposób.

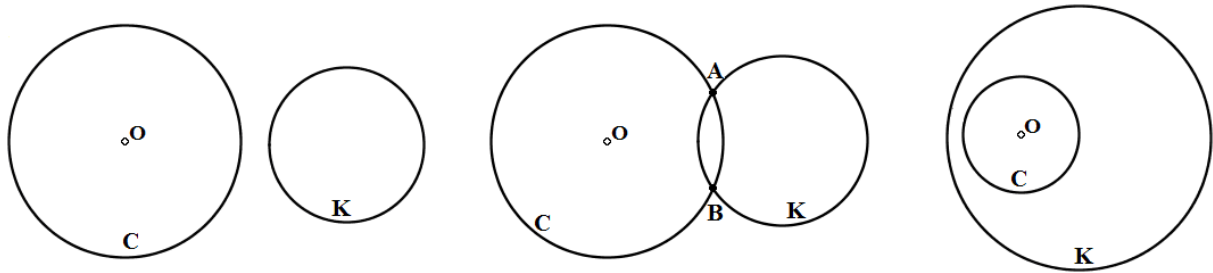


Niech S będzie rzutem prostokątnym punktu O na dowolną prostą l oraz niech S' będzie obrazem punktu S w inwersji względem okręgu C (w przypadku b) na mocy Własności 3.18 mamy $S = S'$). Dla dowolnego punktu $X \in l$ oznaczmy przez X' jego obraz w inwersji względem okręgu C . Zgodnie z Lematem 3.23 trójkąty OXS i $OX'S'$ są podobne, czyli kąty przy wierzchołkach S i X' mają tę samą miarę, stąd kąt $OX'S$ jest prosty. Obrazem prostej l w rozpatrywanej inwersji jest więc zbiór wszystkich takich punktów, które są wierzchołkami kąta prostego opartego na odcinku OS' . Taka własność charakteryzuje punkty na okręgu, zatem obrazem prostej l w inwersji względem okręgu C jest okrąg o średnicy OS' (z wyłączeniem punktu O). W przypadku c) prosta l ma z okręgiem C dwa punkty wspólne: A i B . Zgodnie z Własnością 3.18 mamy $A' = A$ i $B' = B$, więc okrąg będący obrazem prostej l będzie przechodził przez A i B , a ponadto, jak wynika z wcześniejszych rozważań, będzie też do niego „należał” punkt O . Trzy punkty jednoznacznie wyznaczają okrąg, więc zamiast wykonywać wyżej opisaną konstrukcję, wystarczy w tym przypadku poprowadzić okrąg przechodzący przez punkty O, A, B .

Obraz okręgu w inwersji

Na poniższych rysunkach zostały zaprezentowane wszystkie możliwości wzajemnego położenia dwóch okręgów, a dokładnie okręgu inwersji C i okręgu K , którego obraz będziemy badać względem rozpatrywanej inwersji.

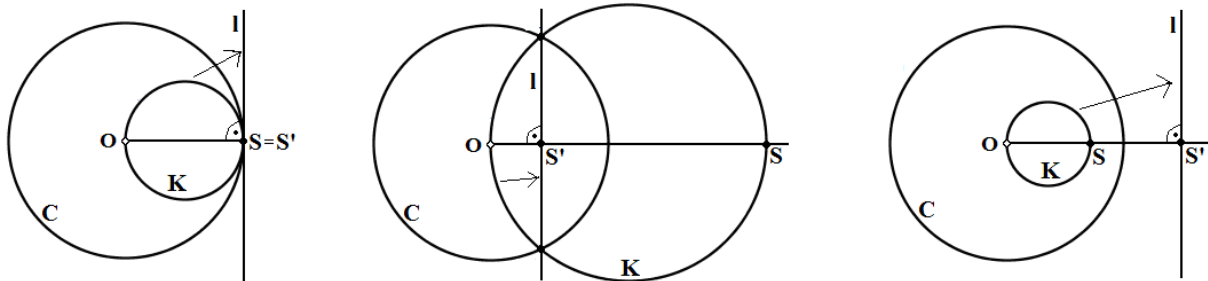




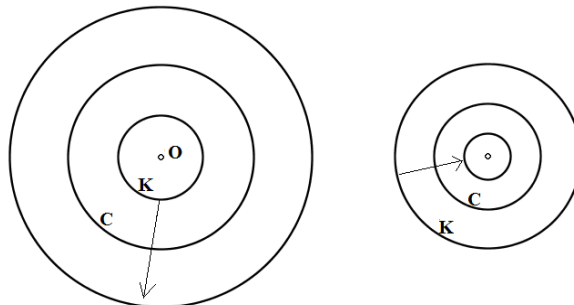
Obrazy okręgu K w zależności od jego położenia zostały opisane w poniższym fakcie (numeracja przypadków w Fakcie 3.24 odpowiada numeracji rysunków powyżej).

Fakt 3.24. W inwersji względem okręgu C o środku w punkcie O i promieniu r :

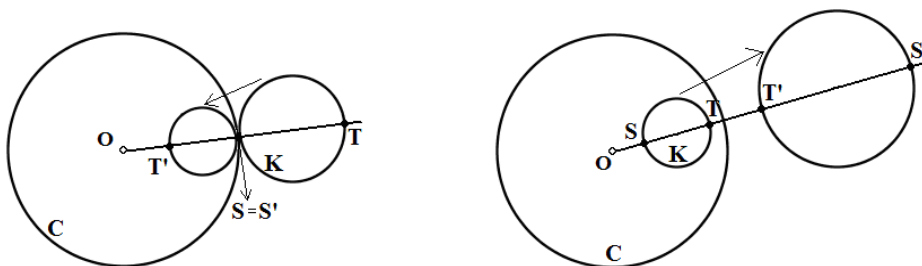
a) obrazem okręgu K o średnicy OS jest pionowa prosta l przechodząca przez punkt S' , gdzie $S' = I_C(S)$ i prostopadła do odcinka OS' .

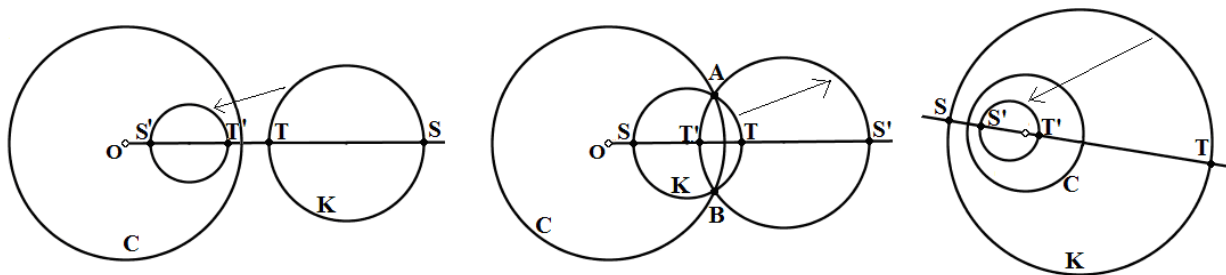


b) obrazem okręgu K o środku w O i promieniu k jest okrąg o środku w punkcie O i promieniu $\frac{r^2}{k}$;



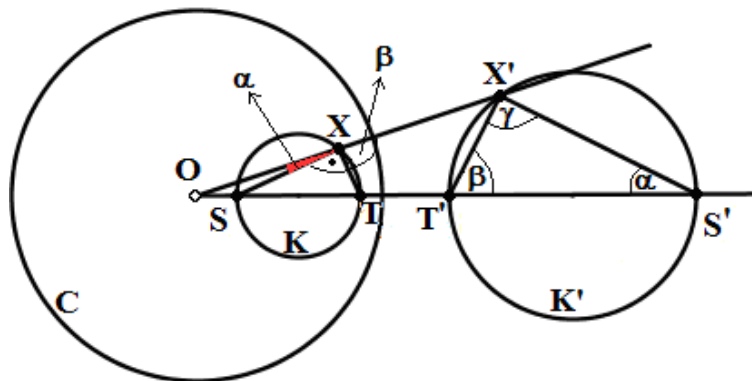
c) obrazem okręgu K o środku $O_2 \neq O$ i średnicy ST , który nie przechodzi przez punkt O jest okrąg o średnicy $T'S'$, gdzie $S' = I_C(S)$ i $T' = I_C(T)$. W szczególności, jeśli okrąg K ma z okręgiem C punkty wspólne, to okrąg będący obrazem K w rozpatrywanej inwersji będzie miał z C takie same punkty wspólne.





Dowód:

- a) Dowód w tym przypadku wynika z podpunktów b), c), d) Faktu 3.22 i z tego, że inwersja jest inwolucją (Własność 3.18).
- b) Niech M będzie dowolnym punktem okręgu K , zatem $|OM| = k$. Z Definicji 3.16 $|OM| \cdot |OM'| = r^2$, więc mamy $k \cdot |OM'| = r^2$, skąd $|OM'| = \frac{r^2}{k}$, czyli wszystkie obrazy punktów z okręgu K znajdują się w tej samej odległości od O , zatem tworzą okrąg o środku w punkcie O i promieniu $\frac{r^2}{k}$. Weźmy teraz dowolny punkt X okręgu o promieniu $\frac{r^2}{k}$. Obrazem X w rozpatrywanej inwersji jest punkt X' leżący na okręgu K , bo z Definicji 3.16 mamy $\frac{r^2}{k} \cdot |OX'| = r^2$, więc $|OX'| = k$. Wobec faktu, że inwersja jest inwolucją (Własność 3.17) punkt X jest obrazem w tej inwersji wskazanego wyżej punktu X' , co dowodzi, że cały okrąg o promieniu $\frac{r^2}{k}$ jest obrazem okręgu K .
- c) Przeprowadzimy dowód dla okręgu K znajdującego się wewnątrz C (dla pozostałych przypadków dowód przeprowadza się w analogiczny sposób).

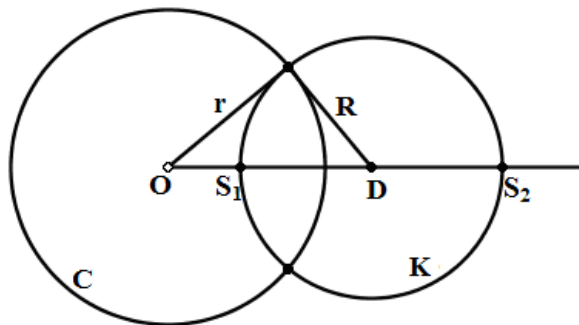


Niech K będzie okręgiem o średnicy ST i niech S' i T' będą obrazami w inwersji względem okręgu C odpowiednio punktów S i T , jak na rysunku powyżej. Weźmy dowolny punkt $X \in K$ taki, że $X \neq S$ i $X \neq T$. W okręgu każdy kąt oparty na jego średnicy jest prosty, zatem $\angle SXT$ jest prosty. Niech obrazem X w rozpatrywanej inwersji będzie punkt X' . Zgodnie z Lematem 3.23 trójkąty OSX oraz $OS'X'$ są podobne i kąty w tych trójkątach przy wierzchołkach X i S' są równe (na rysunku są to kąty oznaczone jako α). Na mocy tego samego lematu także trójkąty OTX i $OT'X'$ są podobne i kąty tych trójkątów przy wierzchołkach X i T' mają taką samą miarę, zatem także kąty przyległe do nich są sobie równe (te kąty przyległe na rysunku oznaczone są jako β). Biorąc pod uwagę kąt półpełny o wierzchołku w punkcie X otrzymujemy, że $\alpha + \beta + 90^\circ = 180^\circ$. Stąd mamy $\alpha + \beta = 90^\circ$. W trójkącie $T'S'X'$ $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ (bo suma kątów wewnętrznych trójkąta jest równa

180°), zatem $\gamma = 90^\circ$. Skoro zaś obrazem dowolnego punktu $X \in K$ jest punkt X' będący wierzchołkiem kąta prostego opartego na odcinku $S'T'$, więc obrazem okręgu K jest okrąg o średnicy $S'T'$.

Własność 3.25. *Obrazem okręgu $K \neq C$ w inwersji względem okręgu C jest ten sam okrąg K tylko wtedy, gdy K przecina C pod kątem prostym.*

Dowód: Okręgi rozłączne z C bądź do niego styczne, które znajdują się we wnętrzu koła ograniczonego przez C przechodzą na okręgi znajdujące się na zewnątrz C (i na odwrót). Jediną możliwością, aby obrazem okręgu $K \neq C$ o środku D i promieniu R był ten sam okrąg K jest więc sytuacja, gdy K ma z C dwa punkty wspólne (patrz rysunek poniżej).

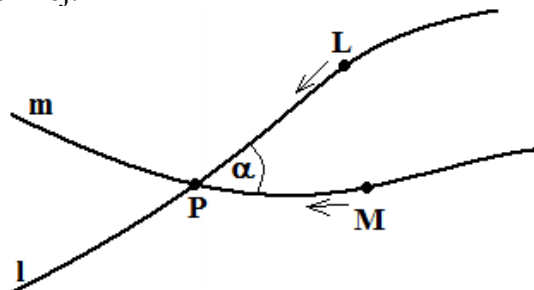


Zgodnie z Własnością 3.19 i Faktem 3.24 c) aby okrąg K mógł przejść na siebie musi zachodzić: $I_C(S_1) = S_2$. Na mocy Definicji 3.16 oznacza to, że $|OS_1| \cdot |OS_2| = r^2$. Niech $|OD| = d$, wtedy $|OS_1| = d - R$ i $|OS_2| = d + R$, skąd $|OS_1| \cdot |OS_2| = (d - R) \cdot (d + R) = r^2$, z czego $d^2 - R^2 = r^2$. Aby zatem okrąg K mógł przejść w inwersji na siebie, musi być spełniony warunek $d^2 = R^2 + r^2$ co zgodnie z Własnością 3.6 oznacza, że okręgi C i K muszą być względem siebie prostopadłe.

Obrazy kątów w inwersji

Kąt pomiędzy dwiema liniami interpretowaliśmy dotychczas jako kąt pomiędzy stycznymi do tych linii w punkcie ich przecięcia. W poniższych rozważaniach kąt pomiędzy liniami będziemy określać w nieco inny, ale równoważny sposób.

Weźmy dwie dowolne linie l i m przecinające się w punkcie P . Niech $L \in l$ i $M \in m$ będą punktami jak na rysunku poniżej.



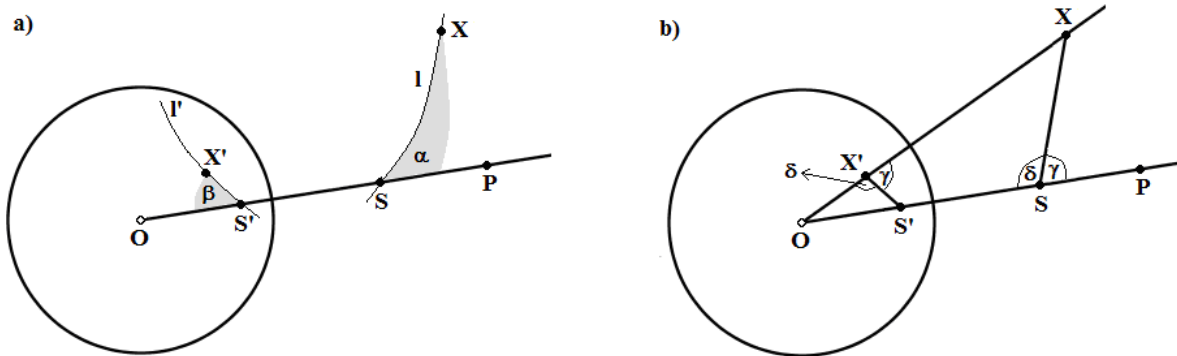
Definicja 3.26. Miarę kąta α pomiędzy liniami l i m definiujemy jako granicę miar kątów LPM , gdy punkty L i M dążą do punktu P po swoich liniach:

$$\alpha = \lim_{\substack{L \rightarrow P \\ M \rightarrow P}} |\angle LPM|$$

Własność 3.27. *Inwersja jest przekształceniem konforemnym, tzn. jest przekształceniem, które zachowuje kąty pomiędzy liniami.*

Dowód: Wystarczy, że pokażemy prawdziwość tej własności dla kąta pomiędzy dowolną linią a półprostą OS^\rightarrow gdzie O jest środkiem okręgu inwersji, natomiast S niech będzie punktem należącym do ustalonej linii. Każdy inny kąt można przedstawić jako sumę lub różnicę takich właśnie kątów.

Niech l będzie dowolną linią a l' - jej obrazem w inwersji względem okręgu C , jak na rysunku a) poniżej. Niech $S \in l$ oraz $S' = I_C(S)$. Określmy α jako kąt pomiędzy linią l a półprostą OS^\rightarrow oraz β jako kąt pomiędzy l' a półprostą OS^\rightarrow . Z Definicji 3.26 mamy $\alpha = \lim_{X \rightarrow S} |\angle XSP|$ i $\beta = \lim_{X' \rightarrow S'} |\angle X'S'O|$. Będziemy więc badać, co się dzieje z miarą kąta XSP , a co z miarą kąta $X'S'O$ w miarę zbliżania się punktu $X \in l$ do punktu S i punktu $X' \in l'$ do punktu S' , gdzie $X' = I_C(X)$.



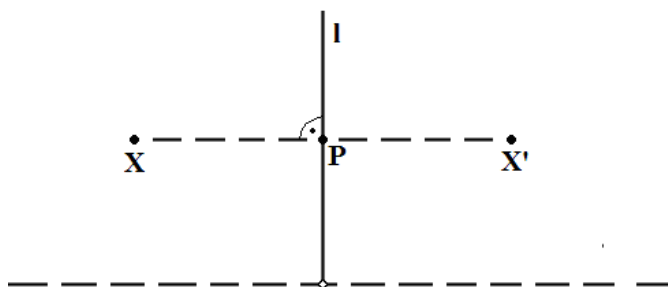
Przyjrzyjmy się teraz trójkątom OSX i $OS'X'$ jak na rysunku b) powyżej. Na mocy Lematu 3.23 kąty w wierzchołkach X' i S tych trójkątów są równe (na rysunku oznaczone są jako δ), więc także ich kąty przyległe (oznaczone jako γ) mają równe miary. Spełnione są więc równości $|\angle XSP| = |\angle S'X'X| = \pi - |\angle S'X'O| = \pi - (\pi - |\angle X'S'O| - |\angle X'OS'|)$. Ostatecznie otrzymujemy równanie $|\angle XSP| = |\angle X'S'O| + |\angle X'OS'|$, które przy założeniu, że X jest punktem zbliżającym się do S i tym samym X' zbliża się do S' przyjmuje następującą postać: $\lim_{X \rightarrow S} |\angle XSP| = \lim_{X \rightarrow S} |\angle X'S'O| + \lim_{X \rightarrow S} |\angle X'OS'|$. Mamy jednak $\lim_{X \rightarrow S} |\angle X'OS'| = 0$, co po podstawieniu daje nam, że $\lim_{X \rightarrow S} |\angle XSP| = \lim_{X \rightarrow S} |\angle X'S'O| = \lim_{X' \rightarrow S'} |\angle X'S'O|$, a więc $\alpha = \beta$.

3.4.2 Nieeuklidesowe symetrie osiowe (odbicia)

Na płaszczyźnie hiperbolicznej jedynymi izometriami są symetrie hiperboliczne względem prostych oraz ich złożenia, przy czym każda izometria hiperboliczna jest złożeniem co najwyżej trzech symetrii hiperbolicznych (jest więc podobnie jak na płaszczyźnie euklidesowej, gdzie każdą izometrię można przedstawić jako złożenie jednej, dwóch lub trzech symetrii osiowych, czego jednak nie będziemy udowadniać). W tym rozdziale zdefiniujemy pojęcie symetrii względem prostej w modelu Poincarégo. Wobec tego, że w modelu tym istnieją dwa rodzaje prostych, więc też wyróżniamy dwa rodzaje hiperbolicznej symetrii osiowej w zależności od tego, względem jakiej prostej będziemy wykonywać przekształcenie. Zaczniemy od prostych pionowych:

Definicja 3.28. Symetrią hiperboliczną S_l względem pionowej prostej l w modelu Poincarégo nazywamy euklidesową symetrię osiową względem l ograniczoną do płaszczyzny modelu.

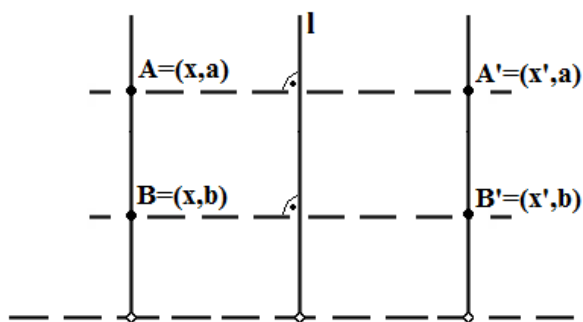
Zgodnie z powyższą definicją obrazem danego punktu X w symetrii względem pionowej prostej l jest taki punkt X' leżący po drugiej stronie prostej l , że euklidesowy odcinek XX' jest prostopadły do l oraz $|XP|_E = |X'P|_E$, gdzie P jest rzutem prostokątnym (w rozumieniu euklidesowym) punktu X na prostą l (patrz rysunek poniżej).



Symetria hiperboliczna względem pionowych prostych ma takie same własności, jak symetria osiowa na płaszczyźnie euklidesowej, a więc jest ona przekształceniem wzajemnie jednoznacznym oraz inwolucją (czyli $S_l^{-1} = S_l$) a zbiorem jej punktów stałych jest prosta l .

Fakt 3.29. *Symetria hiperboliczna S_l względem pionowej prostej l jest izometrią płaszczyzny nieeuklidesowej.*

Dowód: Pokażemy, że S_l zachowuje odległość pomiędzy dwoma dowolnymi punktami płaszczyzny nieeuklidesowej. Weźmy więc dowolne punkty A i B . Niech A', B' będą obrazami A i B w symetrii względem pionowej prostej l . Gdy punkty A i B leżą na jednej pionowej prostej (patrz rysunek poniżej), to po przekształceniu tych punktów przez symetrię ich odległość od brzegu modelu nie zmienia się, zatem nie zmienia się też ich wzajemna odległość.



Na mocy Definicji 3.1:

$$m(AB) = \left| \ln \left(\frac{a}{b} \right) \right|,$$

$$m(A'B') = \left| \ln \left(\frac{a}{b} \right) \right| = m(AB).$$

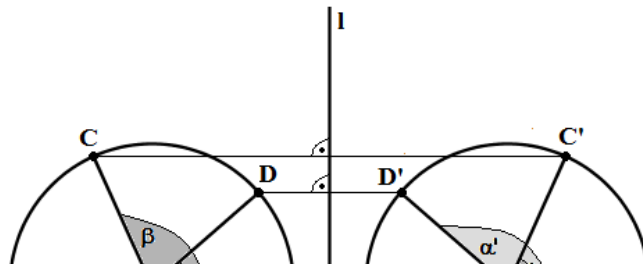
Weźmy teraz pod uwagę punkty C i D leżące na prostej reprezentowanej w modelu przez euklidesowy półokrąg (patrz rysunek poniżej) i ich obrazy w symetrii S_l : C', D' . Przyporządkujemy punktom C, D, C' i D' kąty, jak w Definicji 3.2. Mamy $C \rightarrow \alpha$ i $D \rightarrow \beta$. Zauważmy, że obrazom punktów C i D przyporządkowujemy następujące kąty: $C' \rightarrow \pi - \alpha$ oraz $D' \rightarrow \pi - \beta$, co wynika z własności symetrii. Zgodnie z Definicją 3.2 obliczamy:

$$m(CD) = \left| \ln \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) - \ln \left(\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \right) \right|, \quad m(C'D') = \left| \ln \left(\operatorname{tg} \frac{\pi - \alpha}{2} \right) - \ln \left(\operatorname{tg} \frac{\pi - \beta}{2} \right) \right|. \quad \text{Korzystając}$$

z trygonometrycznych wzorów redukcyjnych przekształcamy: $\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ i podobnie

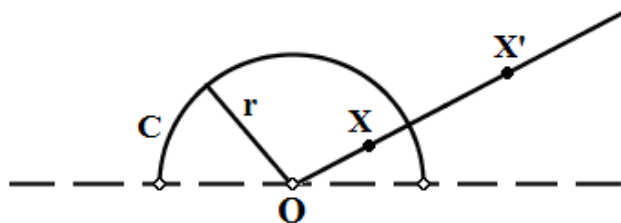
$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}\right) = \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$. Podstawiamy do wzoru na $m(C'D')$:

$$m(C'D') = \left| \ln\left(\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right) - \ln\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right) \right| = \left| \ln\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}\right) - \ln\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\right) \right| = \left| -\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right) + \ln\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right) \right| = \left| \ln\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right) - \ln\left(\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right) \right| = m(CD).$$



Definicja 3.30. Symetria hiperboliczna S_C względem prostej C reprezentowanej w modelu Poincarégo euklidesowym półokręgiem o środku na brzegu modelu nazywamy euklidesową inwersją względem okręgu zawierającego prostą C ograniczoną do płaszczyzny modelu.

Niech prosta C będzie euklidesowym półokręgiem o środku w punkcie O i promieniu r . Wtedy zgodnie z powyższą definicją i na mocy Definicji 3.16 obrazem dowolnego punktu X w symetrii względem prostej C jest punkt X' leżący na półprostej OX^\rightarrow i spełniający warunek $|OX|_E \cdot |OX'|_E = r^2$.



Tak określona symetria względem prostej C jest przekształceniem wzajemnie jednoznacznym i spełnia wszystkie własności, jakie posiada inwersja na płaszczyźnie euklidesowej.

Uwaga: Na mocy uwagi do Definicji 3.16 inwersję na płaszczyźnie euklidesowej można rozszerzyć o środek okręgu inwersji oraz o „punkt w nieskończoności”. Symetrię hiperboliczną S_C względem prostej C będącej euklidesowym półokręgiem, która jest definiowana przy pomocy inwersji na \mathfrak{R}^2 , można określić w podobny sposób, tzn. dodając do dziedziny przekształcenia punkty w „dolnej i górnej nieskończoności”. Wtedy obrazem punktu O „z dolnej nieskończoności” będzie „punkt w górnej nieskończoności”, natomiast obrazem punktów różnych od O z brzegu modelu są punkty określone według Faktu 3.22 a).

Fakt 3.31. Symetria hiperboliczna S_C względem prostej C reprezentowanej w modelu Poincarégo euklidesowym półokręgiem o środku na brzegu modelu jest izometrią płaszczyzny nieeuklidesowej.

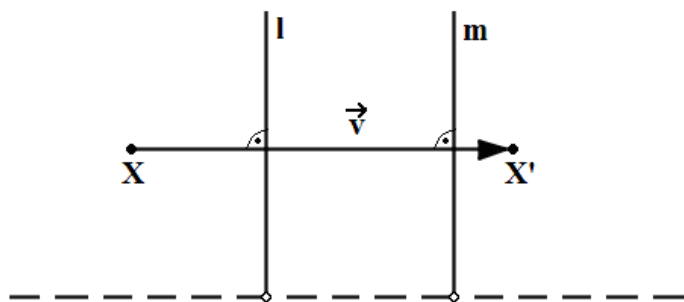
Dowód: Ze względu na dużą liczbę przypadków i żmudne obliczenia dowód tego faktu pominiemy.

3.4.3 Przykłady izometrii nieeuklidesowych będących złożeniem odbić hiperbolicznych

W tym rozdziale zajmiemy się złożeniami symetrii nieeuklidesowych, które jako złożenia izometrii także są izometriami. Ograniczymy się jednak do złożenia dwóch takich przekształceń. Okaze się, że jednym z nich jest zwykła, tzn. euklidesowa translacja, natomiast drugim z tych złożań jest euklidesowa jednokładność, która, jak wiemy, na płaszczyźnie euklidesowej nie jest izometrią.

Rozpatrzmy najpierw przypadek, gdy składamy dwa odbicia względem pionowych prostych l i m , gdzie $l \neq m$. Na płaszczyźnie euklidesowej złożenie dwóch odbić względem prostych równoległych odległych od siebie o długość d jest translacją o wektor \vec{v} o długości $2d$, który jest prostopadły do danych prostych. Wobec faktu, że symetria hiperboliczna względem pionowych prostych jest obcięciem symetrii osiowej płaszczyzny euklidesowej w taki sposób, że zachowuje wszystkie jej własności, więc na płaszczyźnie nieeuklidesowej prawdziwe jest stwierdzenie:

Fakt 3.32. *Złożenie dwóch odbić względem pionowych prostych l i m jest euklidesową translacją o wektor \vec{v} równoległy do brzegu modelu, który ma długość równą euklidesowej podwojonej odległości prostych l i m .*



$S_m \circ S_l = T_{\vec{v}}$, gdzie T jest euklidesową translacją

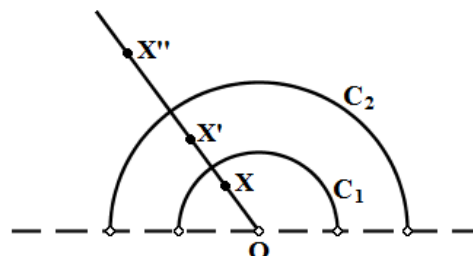
Wniosek 3.33. *Każda euklidesowa translacja o wektor równoległy do brzegu modelu jest izometrią płaszczyzny nieeuklidesowej.*

Dowód: Niech $T_{\vec{u}}$ będzie dowolną euklidesową translacją o wektor \vec{u} długości a , który jest równoległy do brzegu modelu. Weźmy dwie dowolne pionowe proste m i l , których euklidesowa odległość wynosi $\frac{1}{2}a$. Na mocy Faktu 3.32 złożenie odbić hiperbolicznych względem tych prostych (które jest izometrią) jest translacją o wektor długości $2 \cdot \left(\frac{1}{2}a\right) = a$, więc o wektor \vec{u} lub o wektor $-\vec{u}$. Teraz wystarczy odpowiednio dobrać złożenie $S_m \circ S_l$ lub $S_l \circ S_m$ w taki sposób, by zwrot wektora przesunięcia był zgodny ze zwrotem wektora \vec{u} i otrzymamy izometrię równą $T_{\vec{u}}$.

Weźmy teraz pod uwagę złożenie dwóch odbić hiperbolicznych względem prostych będących euklidesowymi półokręgami o wspólnym środku na brzegu modelu. W takim przypadku zachodzi następujący fakt:

Fakt 3.34. Złożenie dwóch odbić hiperbolicznych względem prostych C_1 i C_2 reprezentowanych w modelu euklidesowymi półokręgami o wspólnym środku na brzegu modelu O i o promieniach R_1 i R_2 jest euklidesową jednokładnością o środku w punkcie O i dodatniej skali $k = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2$ (lub $k = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2$ w przypadku, gdy składamy w kolejności $I_{C_1} \circ I_{C_2}$).

Dowód: Niech I_{C_1} będzie odbiciem względem prostej C_1 będącej euklidesowym półokręgiem o środku w punkcie O i promieniu R_1 , natomiast I_{C_2} - odbiciem względem prostej C_2 , która jest reprezentowana w modelu półokręgiem o środku w O i promieniu R_2 (patrz rysunek po prawej).



Zobaczmy, jakim przekształceniem jest złożenie odbić I_{C_1} i I_{C_2} . W tym celu weźmy dowolny punkt X i znajźmy jego obraz przez to złożenie. Niech $I_{C_1}(X) = X'$ oraz $I_{C_2}(X') = X''$, więc $I_{C_2} \circ I_{C_1}(X) = I_{C_2}(I_{C_1}(X)) = I_{C_2}(X') = X''$. Z Definicji 3.16 mamy $|OX|_E \cdot |OX'|_E = R_1^2$ oraz

$|OX'|_E \cdot |OX''|_E = R_2^2$. Z pierwszego równania obliczamy $|OX'|_E = \frac{R_1^2}{|OX|_E}$, co po

podstawieniu do drugiego równania daje $\frac{R_1^2}{|OX|_E} \cdot |OX''|_E = R_2^2$, skąd $|OX''|_E = \frac{R_2^2}{R_1^2} \cdot |OX|_E$.

Długości odcinków OX i OX'' są więc proporcjonalne, a ponadto odcinki te z Definicji 3.16 leżą na jednej półprostej o początku w punkcie O . Odwzorowaniem przekształcającym X

w X'' jest zatem euklidesowa jednokładność J_O^k o środku w punkcie O i skali $k = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 > 0$.

W taki sam sposób, jak powyżej pokazujemy, że złożenie $I_{C_1} \circ I_{C_2}$ jest jednokładnością o środku w punkcie O i skali $k = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 > 0$.

Wniosek 3.35 Każda euklidesowa jednokładność o środku w punkcie na brzegu modelu i dodatniej skali jest izometrią płaszczyzny nieeuklidesowej.

Dowód: Niech J_O^k będzie dowolną euklidesową jednokładnością o środku w punkcie O na brzegu modelu i skali $k > 0$. Dla dwóch dowolnych prostych C_1 i C_2 reprezentowanych w modelu euklidesowymi półokręgami o środku w punkcie O i promieniach $R_1 = 1$ i $R_2 = \sqrt{k}$

mamy $\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{k}}{1}\right)^2 = k$. Z Faktu 3.34 mamy więc $I_{C_2} \circ I_{C_1} = J_O^k$, przy czym złożenie

$I_{C_2} \circ I_{C_1}$ jest izometrią, zatem także J_O^k jest izometrią.

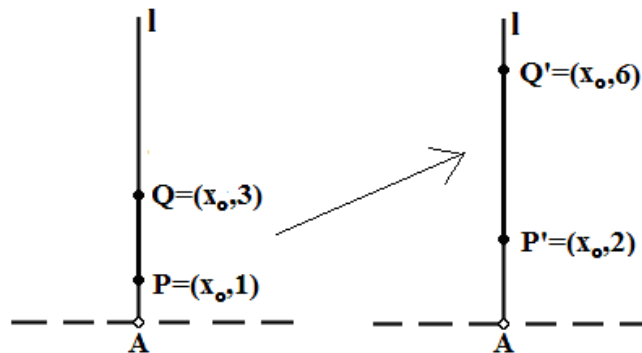
3.4.4. Wnioski wynikające z własności izometrii hiperbolicznych

Definicja 3.36. Dwie figury nazywamy przystającymi, jeżeli istnieje izometria

przekształcająca jedną z nich na drugą. Fakt, że figura A jest przystająca do B oznaczamy jako $A \equiv B$.

Posługując się pojęciem figur przystających w geometrii nieeuklidesowej należy wystrzegać się intuicji nabytych w geometrii euklidesowej. Na \mathfrak{H}^2 takie figury wyglądają bowiem identycznie, tzn. mają taki sam kształt i wielkość, co nie ma miejsca na płaszczyźnie hiperbolicznej. Poniższy przykład i znajdująca się pod nim własność pokazują, że izometrie hiperboliczne mogą w taki sposób przekształcić daną figurę, że zmieni się nie tylko jej wizualna wielkość, ale także i kształt, przy czym nieeuklidesowe odległości punktów i odległości ich obrazów będą takie same.

Weźmy odcinek o końcach P i Q na prostej l umieszczonej w układzie współrzędnych w modelu Poincarégo, jak na rysunku poniżej. Zgodnie z Definicją 3.1 nieeuklidesowa miara odcinka PQ jest równa $m(PQ) = \left| \ln \left(\frac{3}{1} \right) \right| = \ln 3$. Przekształćmy ten odcinek przez euklidesową jednokładność J_A^k o środku w punkcie A i skali $k = 2$, która jest nieeuklidesową izometrią: obrazami punktów P i Q są odpowiednio punkty $P' = (x_0, k \cdot 1) = (x_0, 2)$ oraz $Q' = (x_0, k \cdot 3) = (x_0, 6)$, a zatem $m(P'Q') = \left| \ln \left(\frac{6}{2} \right) \right| = \ln 3 = m(PQ)$ i mimo tego, że na rysunku poniżej może się wydawać, że odcinek PQ przez izometrię hiperboliczną wydłużył się, to jednak, czego dowodzą obliczenia, jego nieeuklidesowa miara nie uległa zmianie.

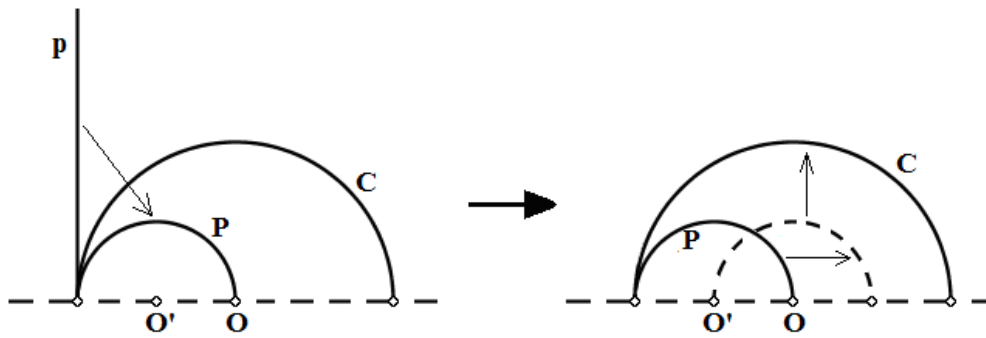


Proste, pęki prostych i horocykle w modelu półpłaszczyznowym

Własność 3.37. *W modelu Poincarégo każda prosta pionowa jest izometryczna z dowolną prostą reprezentowaną przez euklidesowy półokrąg.*

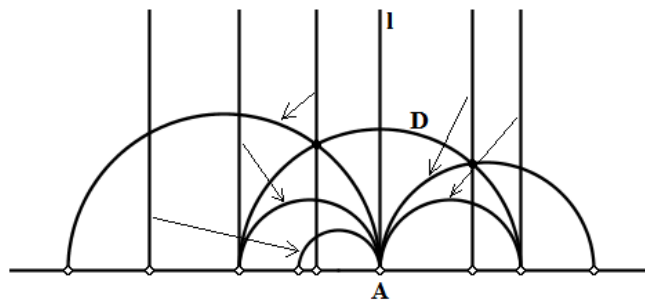
Dowód: Weźmy dowolne dwie proste: p i C , gdzie p jest prostą pionową, natomiast C jest euklidesowym półokręgiem o środku O . Jeśli prosta p nie przechodzi przez środek półokręgu C , wówczas przekształcamy ją przez symetrię względem prostej C i zgodnie z Faktem 3.22 otrzymujemy prostą P reprezentowaną przez euklidesowy półokrąg o środku O' . Prostą P przesuwamy o wektor $\vec{OO'}$ lub $\vec{O'O}$ w taki sposób, by miała wspólny środek z C w punkcie O , a następnie korzystając z jednokładności o środku O i odpowiednio dobranej skali k przekształcamy prostą P w prostą C . Prostą p przekształciliśmy więc w C przy pomocy izometrii będącej złożeniem jednokładności, translacji i symetrii hiperbolicznej: $J_O^k \circ T \circ S_C(p) = C$. W przypadku, gdy p przechodzi przez punkt O postępujemy jak powyżej z tą różnicą, że w pierwszym przekształceniu wykonujemy symetrię względem dowolnie wybranego półokręgu o środku w punkcie różnym od O – wtedy obrazem prostej pionowej będzie półokrąg. Poniżej przedstawiamy schemat wyżej opisanego postępowania dla dwóch

przykładowych prostych.



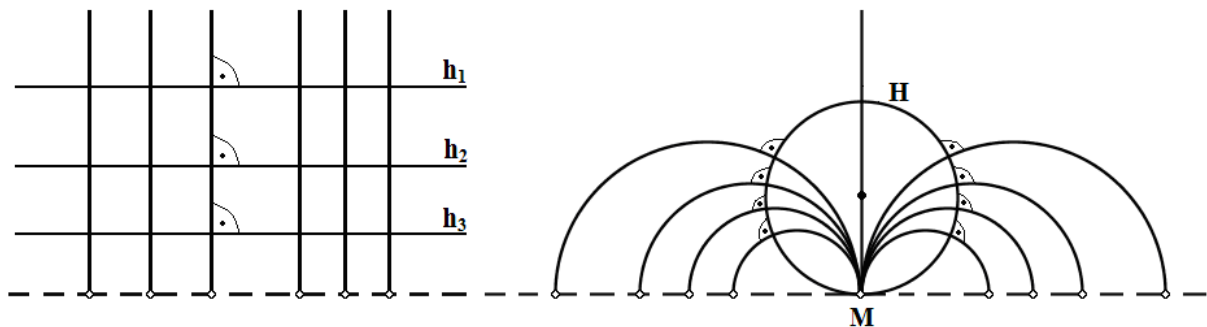
Własność 3.38. *Pęk asymptotycznych prostych pionowych jest przystający do każdego pęku prostych, w skład którego wchodzi wszystkie proste, których przedłużenia przechodzą przez ustalony punkt A na brzegu modelu.*

Dowód: Izometrią przekształcającą pierwszy z danych pęków prostych na drugi jest hiperboliczna symetria względem prostej D reprezentowanej w modelu euklidesowym półokręgiem o środku w punkcie A i dowolnym promieniu r . Pionowa prosta l przechodząca przez A (jak na rysunku poniżej) zostanie przekształcona na siebie (Fakt. 3.22 a)), natomiast obrazem każdej z pozostałych prostych pionowych jest półokrąg przechodzący przez punkt A , co wynika z Faktu 3.22 b), c), d). Ponadto z Faktu 3.22 wynika, że dla każdego półokręgu C o końcu w A istnieje pionowa prosta, której obrazem w danej symetrii jest C .



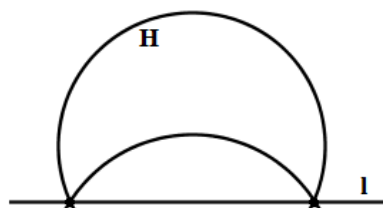
Własność 3.39. *Każdy horocykl pęku pionowych prostych jest przystający do dowolnego horocyklu pęku prostych, których przedłużenia mają wspólny punkt na brzegu modelu.*

Dowód: Przypomnijmy, że zgodnie z Faktem 3.13 horocyklem h pęku pionowych prostych jest każda euklidesowa prosta równoległa do brzegu modelu, natomiast horocyklem H drugiego pęku prostych na mocy Faktu 3.14 jest każdy euklidesowy okrąg styczny do brzegu modelu w punkcie M , który jest wspólny dla prostych z pęku (patrz rysunek poniżej).



Weźmy teraz dowolny horocykl H , czyli okrąg styczny do brzegu modelu w punkcie M (patrz

rysunek poniżej). Niech S_C będzie hiperboliczną symetrią względem prostej C reprezentowanej w modelu euklidesowym półokręgiem o środku w punkcie M i dowolnym promieniu. Na mocy Faktu 3.24 obrazem okręgu H przez S_C jest euklidesowa prosta l równoległa do brzegu modelu. Prosta l można przekształcić na dowolną prostą równoległą do brzegu modelu (czyli horocykl h) przy pomocy jednokładności o środku w punkcie M i odpowiednio dobranej skali. Wobec tego każdy horocykl H można przekształcić na dowolny horocykl h przez izometrię będącą złożeniem hiperbolicznej symetrii i euklidesowej jednokładności.



Każde dwa horocykle pęku pionowych prostych są przystające (przez jednokładność o dowolnym środku na brzegu modelu i odpowiednio dobranej skali). Przystające są także dowolne dwa horocykle pęku prostych, których przedłużenia mają wspólny punkt M na brzegu modelu (izometrią która je przekształca jest jednokładność o środku w punkcie M i odpowiednio dobranej skali). W związku z powyższym oraz na mocy Własności 3.39 możemy wysunąć następujący wniosek:

Wniosek 3.40. *Każde dwa horocykle są przystające.*

Ekwidystanty w modelu półpłaszczyznowym

Przy pomocy izometrii hiperbolicznych w modelu Poincarégo możemy ustalić kształt ekwidystant. Przypomnijmy, że na mocy Definicji 2.27 ekwidystantą prostej k nazywamy linię złożoną ze wszystkich punktów leżących w ustalonej odległości d od prostej k i po tej samej stronie tej prostej. Prosta k nazywamy wtedy prostą bazową ekwidystanty. W omawianym modelu rozróżniamy dwa rodzaje prostych, będziemy zatem rozpatrywać dwie sytuacje: gdy prostą bazową jest pionowa prosta oraz gdy jest nią prosta będąca euklidesowym półokręgiem. Określmy najpierw kształt ekwidystant dla pierwszego przypadku. Weźmy dowolną pionową prostą l i dowolny punkt $X \notin l$, którego odległość od prostej l wynosi d (dla $X \in l$ mamy $d = 0$ i prosta bazowa pokrywa się z ekwidystantą). Oznacza to, że $|XX'|_{NE} = d$, gdzie X' jest nieeuklidesowym rzutem prostokątnym punktu X na prostą l , określonym w Definicji 2.11.

Zgodnie z Definicją 3.2 $|XX'|_{NE} = \left| \ln \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) - \ln \left(\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \right) \right|$, gdzie $\alpha = \frac{\pi}{2}$ i β są kątami przyporządkowanymi odpowiednio punktom X' i X , jak na rysunku a) poniżej. Chcemy ustalić położenie dowolnego punktu Y takiego, że jego odległość od prostej l będzie taka sama, jak odległość punktu X od l , czyli równa d . Oznaczmy przez Y' nieeuklidesowy rzut prostokątny punktu Y na prostą l . Na mocy Definicji 3.2 dla punktów Y i Y' zachodzi:

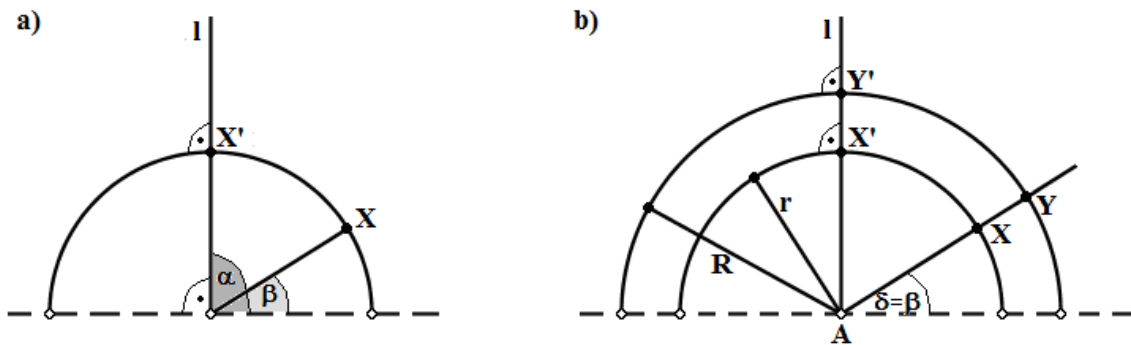
$|YY'|_{NE} = \left| \ln \left(\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \right) - \ln \left(\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \right) \right|$, przy czym punkt Y' należy do pionowej prostej, zatem

przyporządkowany mu kąt γ jest równy $\frac{\pi}{2}$, natomiast punktowi Y przyporządkowujemy kąt δ .

Chcemy, by było: $|YY'|_{NE} = |XX'|_{NE}$, czyli żeby było spełnione równanie

$\left| \ln \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \right) - \ln \left(\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \right) \right| = \left| \ln \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \right) - \ln \left(\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \right) \right|$. Podstawiamy $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$ i korzystamy z faktu,

że $\ln 1 = 0$. Otrzymujemy $|\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}\right)| = |\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)|$, gdzie $\beta, \delta \in (0, \frac{\pi}{2})$ lub $\beta, \delta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, bo β i δ są kątami przyporządkowanymi punktom X i Y , które na mocy Definicji 2.27 znajdują się po jednej stronie pionowej prostej l , skąd dostajemy równanie $\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}\right) = \ln\left(\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)$. Korzystając z różnowartościowości funkcji logarytmicznej na całej swojej dziedzinie oraz funkcji trygonometrycznej na przedziale $(0, \frac{\pi}{2})$ (lub na przedziale $(\frac{\pi}{2}, \pi)$) uzyskujemy $\delta = \beta$. Punkty X i Y , którym są przyporządkowane kąty β i δ , muszą więc leżeć na jednej euklidesowej półprostej o początku w punkcie A , jak na rysunku b) poniżej.



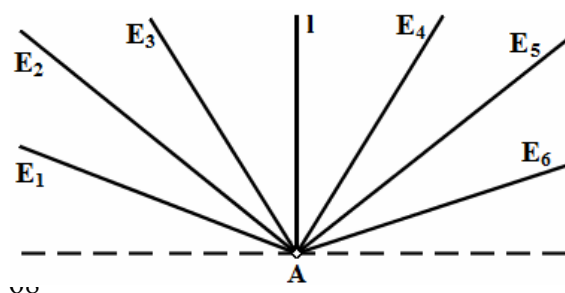
Pokażemy, że ta półprosta jest zbiorem punktów równoodległych od pionowej prostej l , czyli że jest jej ekwidystantą.

Punkty X' i Y' leżą na euklidesowej półprostej l o początku w punkcie A , a punkty X i Y na euklidesowej półprostej AX , która także ma początek w punkcie A . Ponadto punkty X i X' leżą na jednej prostej prostopadłej do l , która jest euklidesowym półokręgiem o środku w punkcie A i promieniu r ; natomiast punkty Y i Y' leżą na euklidesowym półokręgu o środku w A i promieniu R , co powoduje, że długości odcinków AX i AY oraz AX' i AY' pozostają w tych samych stosunkach, tzn. $\frac{AY}{AX} = \frac{AY'}{AX'} = \frac{R}{r}$. Punkty X, Y oraz X', Y' jako punkty z tych samych

półprostych można więc na siebie przekształcić w następujący sposób: $J_A^k(X) = Y$ oraz $J_A^k(X') = Y'$, gdzie J_A^k jest euklidesową jednokładnością o początku w punkcie A i skali $k = \frac{R}{r}$. Obrazem odcinka XX' w danej jednokładności jest zatem odcinek YY' . Euklidesowa

jednokładność jest na płaszczyźnie Poincarégo izometrią, zatem $|YY'|_{NE} = |XX'|_{NE} = d$. Z dowolności wyboru punktu Y mamy, że półprosta AX^\rightarrow jest ekwidystantą prostej l , natomiast z dowolności doboru punktu $X \notin l$ otrzymujemy następujący fakt:

Fakt 3.41. *Ekwidystantą E pionowej prostej l w modelu Poincarégo jest każda euklidesowa półprosta o początku w punkcie A , który jest punktem przecięcia przedłużenia prostej l i euklidesowej prostej będącej brzegiem modelu.*



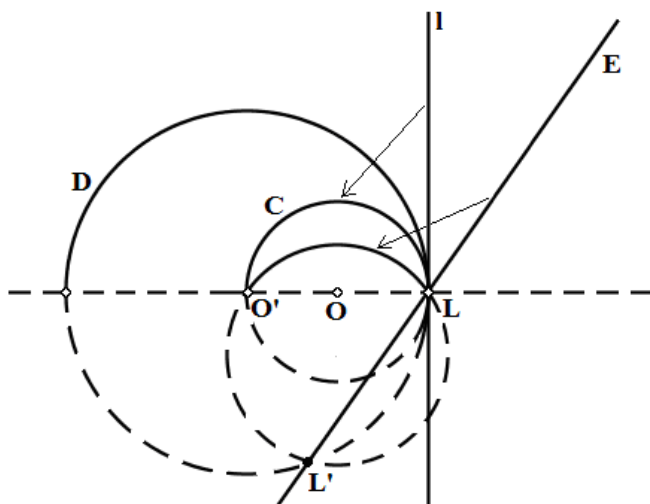
E_i – przykładowe ekwidystanty prostej l ,
 $i \in \{1, 2, \dots, 6\}$

Zobaczmy teraz, jaki kształt przybierają ekwidystanty prostej bazowej „półkregowej”. Weźmy dowolną prostą C reprezentowaną w modelu euklidesowym półokręgiem o środku w punkcie O i promieniu r . Na mocy Faktu 3.22 b) tę prostą można przekształcić izometrycznie na pionową prostą l styczną do C przez inwersję względem okręgu D o promieniu $2r$ i środku w punkcie O' , który jest punktem przecięcia półokręgu C i prostej będącej brzegiem modelu (patrz rysunek poniżej). Inwersja jest involucją (Własność 3.17), więc $I_D(l) = C$. Potrafimy już wyznaczyć ekwidystanty prostej l (Fakt 3.41). Dzięki tej umiejętności i przy pomocy poniższego lematu znajdziemy ekwidystanty prostej C .

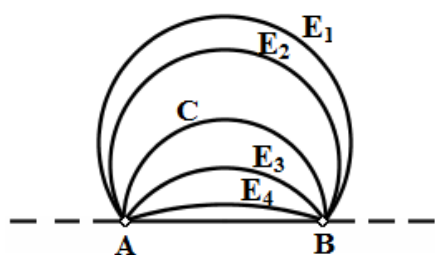
Lemat 3.42. *Obrazem ekwidystanty E prostej m w izometrii nieeuklidesowej Z jest linia $Z(E)$ będąca ekwidystantą prostej $Z(m)$.*

Dowód: Niech ekwidystanta E prostej m będzie w każdym punkcie odległa od prostej m o długość d . Izometria zachowuje odległości, zatem linia $Z(E)$ także będzie w każdym punkcie odległa od prostej $Z(m)$ o długość d , a więc będzie jej ekwidystantą, co kończy dowód.

Znajdźmy teraz ekwidystanty prostej C reprezentowanej w modelu euklidesowym półokręgiem. Prosta C jest obrazem w izometrii prostej l , zatem zgodnie z Lematem 3.42 ekwidystanty prostej C są obrazami ekwidystant prostej l w tej samej izometrii, czyli w inwersji względem półokręgu D . Pozostaje nam sprawdzić, jaki kształt będą miały te ekwidystanty. Weźmy więc dowolną ekwidystantę E prostej l (patrz rysunek poniżej). Jest ona euklidesową półprostą i przecina okrąg inwersji w dwóch punktach: L i L' , więc zgodnie z Faktem 3.22 c) jej obrazem będzie okrąg przechodzący przez punkty L, L' oraz O' . W modelu Poincarégo zawiera się jedynie łuk $O'L$ tego okręgu, z czego wynika Fakt 3.43 zamieszczony poniżej.



Fakt 3.43. *Ekwidystantą E prostej C reprezentowanej w modelu Poincarégo euklidesowym półokręgiem ograniczonym punktami A i B na brzegu modelu jest łuk AB (zawarty w płaszczyźnie modelu) każdego okręgu przechodzącego przez punkty A i B .*

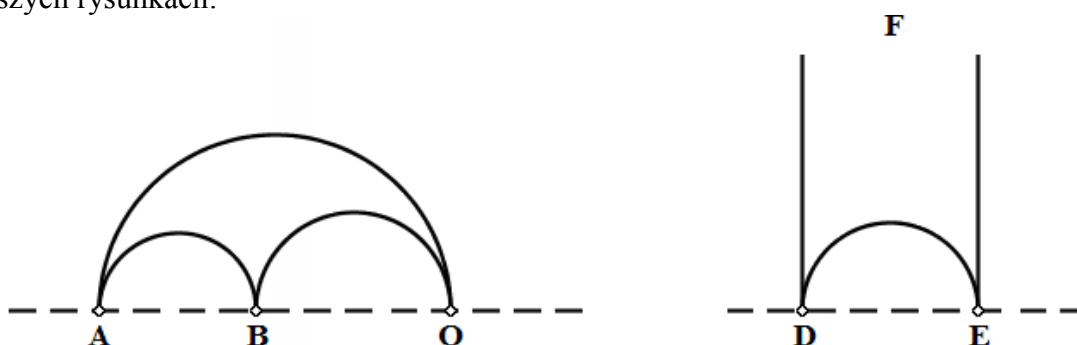


E_i – przykładowe ekwidystanty prostej C , $i \in \{1, 2, 3, 4\}$

Trójkąty idealne w modelu półpłaszczyznowym

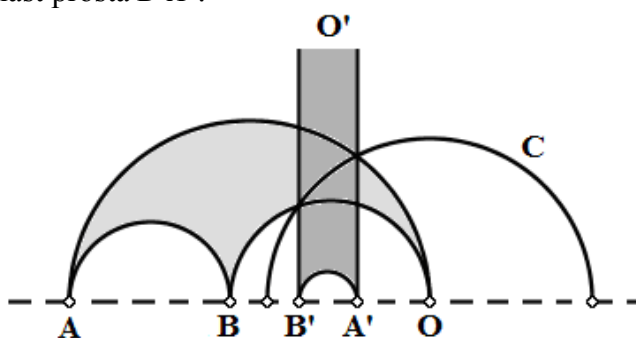
Własność 3.44. Każde dwa trójkąty idealne o wszystkich trzech wierzchołkach idealnych są przystające.

Dowód: Przypomnijmy, że zgodnie z Definicją 3.10 trójkątami idealnymi nazywamy trójkąty, w których niektóre pary boków są zastąpione asymptotycznymi półprostymi lub asymptotycznymi prostymi. W trójkątach idealnych, gdzie wszystkie wierzchołki są idealne, każde dwa boki są względem siebie asymptotyczne, a trójkąty mogą wyglądać, jak na poniższych rysunkach:



Najpierw udowodnimy, że dowolny trójkąt ABO o wszystkich wierzchołkach w „dolnej nieskończoności”, czyli na brzegu modelu, jest przystający do dowolnego trójkąta DEF , w którym dwa wierzchołki są na brzegu modelu, a jeden w „górnym nieskończoności”.

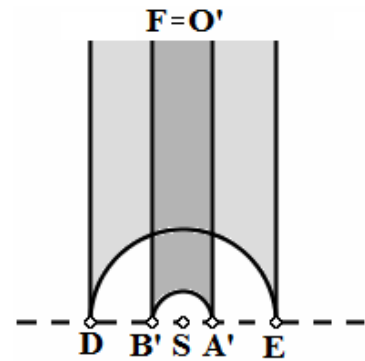
Weźmy teraz trójkąty ABO i DEF jak na rysunkach powyżej. Pokażemy, że istnieje izometria przekształcająca pierwszy z nich na drugi. Na początku przekształćmy izometrycznie trójkąt ABO w taki sposób, by jeden z jego wierzchołków, np. O znalazł się w „górnym nieskończoności”, czyli przekształćmy euklidesowe półokręgi AO i BO w pionowe proste. W tym celu posłużymy się symetrią hiperboliczną I_C względem prostej C reprezentowanej w modelu euklidesowym półokręgiem o środku w punkcie O i dowolnym promieniu r . Zgodnie z Faktem 3.24 a) obrazami prostych AO i BO przez takie odwzorowanie są pionowe proste, których przedłużenia przecinają brzeg modelu w punktach A' i B' , gdzie $A' = I_C(A)$ oraz $B' = I_C(B)$, jak na rysunku poniżej. Na mocy uwagi do Definicji 3.30 obrazem punktu O jest punkt O' będący „punktem w górnej nieskończoności”. Obrazem prostej AB w symetrii względem C jest natomiast prosta $B'A'$.



Przesuńmy teraz trójkąt $B'A'O'$ poziomo w taki sposób, by środek euklidesowego półokręgu reprezentującego prostą $B'A'$ pokrywał się ze środkiem półokręgu DE (translacja pozioma T jest izometrią hiperboliczną).

Niech $|DS|_E = R$, natomiast $|B'S|_E = r$. Wtedy trójkąt $B'A'O'$ można izometrycznie przekształcić na trójkąt DEF przez jednokładność J_S^k o środku w punkcie S i skali $k = \frac{R}{r}$.

Przekształciliśmy więc trójkąt ABC na trójkąt DEF przez odwzorowanie będące złożeniem izometrii hiperbolicznych: $J_S^k \circ T \circ I_C(\Delta ABC)$, zatem trójkąty te są przystające.



Mając dane dwa trójkąty o jednym wierzchołku w „punkcie w górnej nieskończoności” postępujemy, jak w przypadku trójkątów $B'A'O'$ i DEF w powyższym dowodzie. Chcąc natomiast pokazać przystawanie dwóch dowolnych trójkątów ABO i XYZ , w których wszystkie wierzchołki znajdują się na brzegu modelu, również możemy skorzystać z dowodu zaprezentowanego powyżej. Otóż bierzemy dowolny trójkąt DEF o jednym wierzchołku w „punkcie w górnej nieskończoności” i pokazujemy, że $ABO \equiv DEF$. W ten sam sposób uzasadniamy, że $DEF \equiv XYZ$, skąd otrzymujemy $ABO \equiv XYZ$.

Zadania dotyczące izometrii w modelu Poincarého

Na poniższej liście zadań będziemy używać symbolu H^2 , który oznaczać będzie płaszczyznę w modelu Poincarého.

1. Uzasadnij, że dla każdego dwóch punktów A i B z H^2 istnieje prosta w H^2 taka, że odbicie w tej prostej przekształca A na B . Prosta tę nazywamy symetralną odcinka AB .
2. Uzasadnij, że symetralne boków trójkąta o wierzchołkach $(0, 1)$, $(1, 1)$ i $(2, 1)$ w modelu półpłaszczyznowym nie przecinają się. Wywnioskuj stąd, że nie istnieje okrąg opisany na tym trójkącie. Skonstruuj trójkąt, w którym symetralne boków są rozbieżne.
3. Uzasadnij, że dla każdego dwóch prostych w H^2 istnieje izometria przekształcająca jedną na drugą. Czy może to być odbicie (inwersja)?
4. Dane są proste l i m oraz punkty $A \in l$, $B \in m$. Uzasadnij, że istnieje izometria I taka, że $I(l) = m$ oraz $I(A) = B$.
5. Uzasadnij, że dwa trójkąty o dwóch wierzchołkach idealnych są przystające wtedy i tylko wtedy, gdy kąty przy wierzchołkach właściwych są równe.
6. Udowodnij, że trójkąty o jednym wierzchołku idealnym są przystające wtedy i tylko wtedy, gdy ich kąty przy wierzchołkach właściwych są odpowiednio równe. Uzasadnij też, że w takich trójkątach suma dwóch kątów przy wierzchołkach zwykłych jest mniejsza niż 180° .
7. Uzasadnij cechy przystawania BKB i KBK trójkątów w H^2 .

Poniższe zadania rozwiąż, sprowadzając ogólny przypadek do prostszego przypadku szczególnego, przekształcając dane występujące w zadaniu przez odpowiednią izometrię.

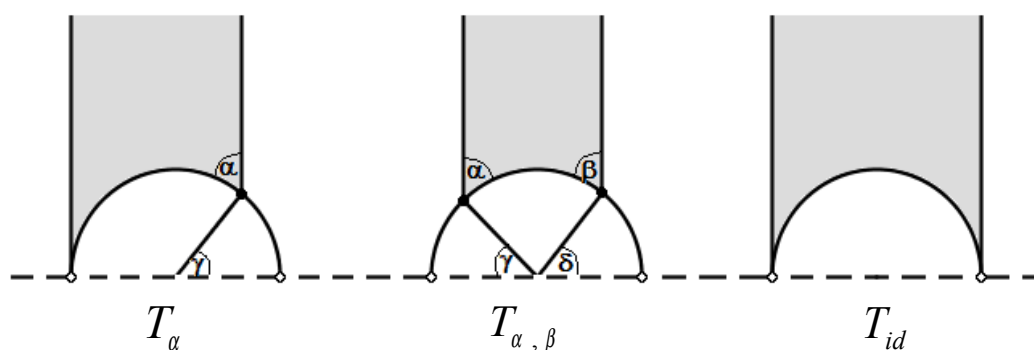
8. Pokaż, że dla każdego dwóch prostych rozbieżnych l i m istnieje dokładnie jedna prosta k prostopadła do l i do m .
9. Uzasadnij, że jeżeli symetralne dwóch boków pewnego trójkąta są asymptotyczne, to symetralna trzeciego boku jest asymptotyczna do obu poprzednich symetralnych.

10. Pokaż, że dwie proste a i b prostopadłe do trzeciej prostej c są względem siebie rozbieżne. Pokaż to samo dla prostych a i b tworzących z trzecią prostą c kąty naprzemianległe równe.
11. Niech a i b będą prostymi rozbieżnymi. Sprawdź, że zbiór rzutów prostopadłych punktów prostej b na prostą a zawiera się w ograniczonym odcinku prostej a .

3.5 Pola powierzchni wielokątów na płaszczyźnie nieeuklidesowej

W tym rozdziale zbadamy pola trójkątów idealnych oraz pola trójkątów o wierzchołkach właściwych (tzn. nieidealnych). Następnie skorzystamy z faktu, że wielokąty, zarówno na płaszczyźnie euklidesowej jak i nieeuklidesowej, możemy traktować jako figury, które są sumą skończonej liczby nie zachodzących na siebie trójkątów, zatem ich pole jest równe sumie pól tych trójkątów.

Weźmy najpierw pod uwagę trójkąty idealne. Mogą one mieć jeden, dwa lub trzy wierzchołki idealne. Aby móc je (tzn. te trójkąty) odróżniać, wprowadzimy oznaczenia: T_α niech będzie trójkątem idealnym z jednym wierzchołkiem właściwym o kącie $\alpha \in (0, \pi)$ i dwoma wierzchołkami idealnymi, zaś $T_{\alpha, \beta}$ niech będzie trójkątem idealnym, w którym są dwa wierzchołki właściwe o kątach α i β (oba z przedziału $(0, \pi)$) oraz jeden wierzchołek idealny. Oznaczenie T_{id} niech natomiast dotyczy trójkąta idealnego o wszystkich trzech wierzchołkach idealnych. Na poniższych rysunkach zostały przedstawione przykłady takich trójkątów.



Zauważmy, że zgodnie z Własnością 3.3 na przedstawionych powyżej rysunkach zachodzi: $\alpha = \gamma$ oraz $\beta = \delta$. Dzięki temu w modelu Poincarégo w łatwy sposób można wyznaczać trójkąty T_α i $T_{\alpha, \beta}$ o zadanych kątach, a także porównywać kąty, w których jedno ramię zawiera się w prostej reprezentowanej przez euklidesowy półokrąg.

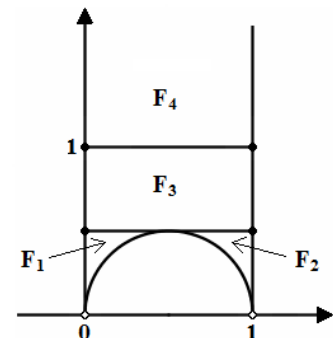
Pole trójkąta o trzech wierzchołkach idealnych

Zbadamy pole trójkąta T_{id} , który jest figurą nieograniczoną i może się wydawać, że jego pole jest nieskończone. Nie jest to jednak prawdą, co udowodnimy w poniższym fakcie.

Fakt 3.45. Trójkąt T_{id} jest wielokątem o skończonym polu powierzchni.

Uwaga: W poniższym dowodzie będziemy korzystać z własności pola figur nieeuklidesowych, które mówią, że figury przystające mają równe pola oraz że figury ograniczone mają skończone pola.

Dowód Faktu 3.45: Wystarczy, że przeprowadzimy dowód dla jednego dowolnie wybranego trójkąta T_{id} , ponieważ na mocy Własności 3.44 każde dwa trójkąty idealne T_{id} są przystające, zatem mają równe pola. Posłużymy się układem współrzędnych, którego oś OX pokrywa się z brzegiem modelu, natomiast oś OY pokrywa się z jednym z boków trójkąta T_{id} .



Będziemy dowodzić w następujący sposób: w trójkącie T_{id} „odetniemy” figury F_1 , F_2 i F_4 przy wierzchołkach idealnych w taki sposób, by pozostała figura F_3 była ograniczona (patrz rysunek powyżej).

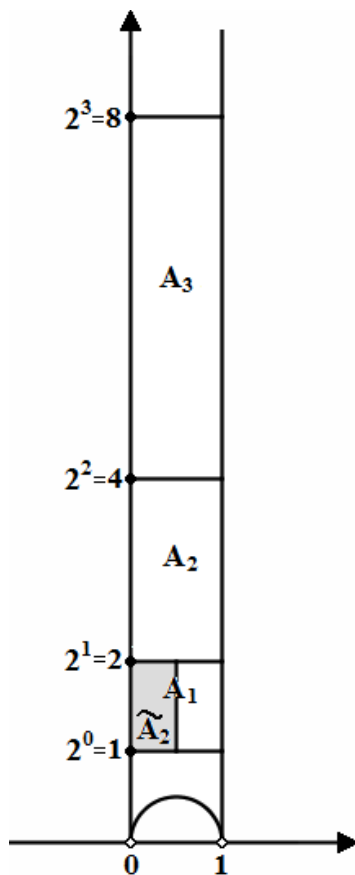


Figura F_3 jako ograniczona ma skończone pole. Problem stanowią figury F_1 , F_2 i F_4 .

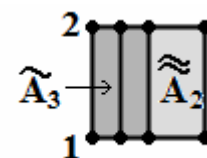
Ponieważ istnieją izometrie przekształcające każde dwa wierzchołki idealne na siebie (patrz dowód Własności 3.44), więc wszystkie wierzchołki idealne są „równouprawnione”. Wystarczy zatem udowodnić, że pole jednej z odciętych figur przy wierzchołku idealnym jest skończone, wtedy pola pozostałych dwóch także będą skończone. Wybierzmy F_4 i podzielmy ją na euklidesowe prostokąty A_n o euklidesowych wymiarach $1 \times 2^{n-1}$, gdzie $n \in \{1, 2, \dots\}$, jak na rysunku po lewej.

Pokażemy, że $P(F_4) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = 2P(A_1)$, gdzie $P(A)$ – pole figury A .

Podzielmy figurę A_1 pionowym odcinkiem na dwie przystające części, tzn. na dwa euklidesowe prostokąty o wymiarach $\frac{1}{2} \times 1$.

Niech \tilde{A}_2 będzie tym z nich, który przylega do osi OY (patrz rysunek powyżej). Okazuje się, że \tilde{A}_2 można przekształcić izometrycznie przez jednokładność o środku w 0 i skali $k_2 = 2$ na figurę A_2 , więc $A_2 \stackrel{NE}{\cong} \tilde{A}_2$.

Teraz \tilde{A}_2 przesunąć poziomo na drugi z prostokątów, na które podzieliliśmy A_1 . Oznaczmy $T(\tilde{A}_2) = \tilde{\tilde{A}}_2$. Prostokąt, na którym wcześniej leżał \tilde{A}_2 dzielimy pionowym odcinkiem na dwa przystające euklidesowe prostokąty o wymiarach $\frac{1}{4} \times 1$, jak na rysunku po prawej.



Niech $\tilde{\tilde{A}}_3$ będzie tym z nich, który przylega do osi OY . Podobnie, jak wcześniej, także figurę $\tilde{\tilde{A}}_3$ można przekształcić izometrycznie przez jednokładność o środku

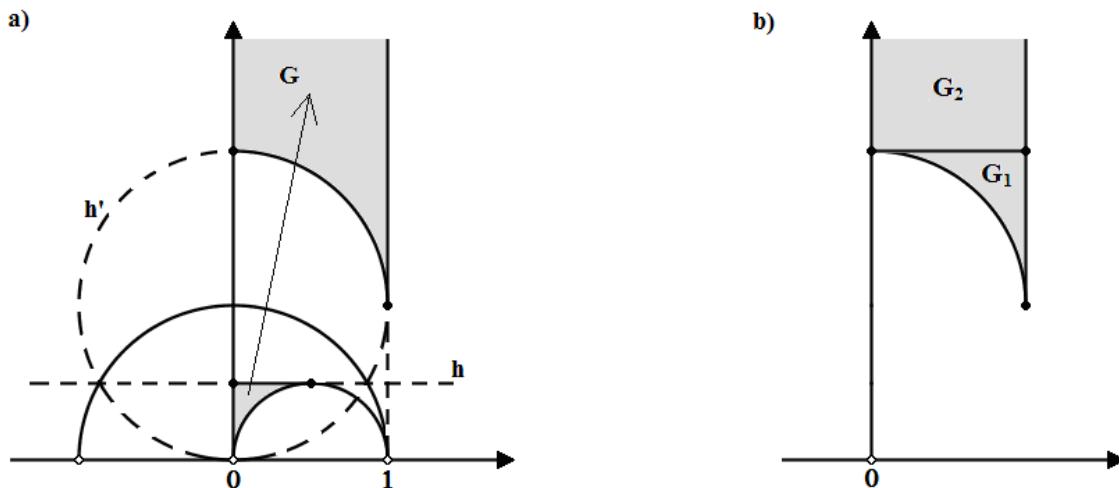
w 0 i skali $k_3 = 4$ na figurę A_3 , więc $A_3 \stackrel{NE}{=} \tilde{A}_3$. Teraz \tilde{A}_3 przesuniemy poziomo na drugi z prostokątów, na które podzieliliśmy \tilde{A}_2 i oznaczymy $T(\tilde{A}_3) = \tilde{A}_3$. Okazuje się, że wykonując powyższe procedury nieskończenie wiele razy otrzymujemy coraz to węższe euklidesowe prostokąty \tilde{A}_i , gdzie $i \in \{2, 3, \dots\}$, z których każdy ma wymiary $\frac{1}{2^{i-1}} \times 1$ i jest przystający do figury A_i przez jednokładność o środku w 0 i skali $k_i = 2^{i-1}$. Ponadto $\square \tilde{A}_i$ jest równa figurze A_i bez jednego odcinka. Innymi słowy oznacza to, że euklidesowy prostokąt A_i można zapełnić figurami \tilde{A}_i , z których każda jest przystająca do A_i . Figury przystające mają równe pola, zatem $P(A_i) = P(\tilde{A}_i) = P(\tilde{A}_i)$. Mamy więc: $\sum_{i=2}^{\infty} P(A_i) = \sum_{i=2}^{\infty} P(\tilde{A}_i) = \sum_{i=2}^{\infty} P(\tilde{A}_i) = P(A_1)$, z czego

$$P(F_4) = P(A_1) + \sum_{i=2}^{\infty} P(A_i) = P(A_1) + P(A_1) = 2P(A_1). \text{ Figura } A_1 \text{ jest ograniczona, więc ma}$$

skończone pole, stąd także pole figury F_4 , które jest równe $2P(A_1)$, jest skończone.

Pokażemy teraz, że faktycznie F_1 jest także figurą o skończonym polu - wtedy też F_2 będzie miało skończone pole, gdyż F_2 jest przystający do F_1 (izometrią przekształcającą jedną z tych figur na drugą jest symetria hiperboliczna względem pionowej prostej przechodzącej przez punkt $(\frac{1}{2}, 0)$). W tym celu przekształćmy izometrycznie trójkąt F_1 w symetrii hiperbolicznej

względem prostej reprezentowanej euklidesowym półokręgiem o środku w punkcie 0 i promieniu $r = 1$. Przekształcając w tej inwersji boki F_1 otrzymujemy figurę G jak na rysunku a) poniżej. Zwróćmy uwagę na to, że bok F_1 będący poziomym odcinkiem stanowi część horocyklu h pęku pionowych prostych, którego obrazem w danej inwersji jest horocykl h' będący euklidesowym okręgiem przechodzącym przez punkt 0.



Następnie trójkąt G dzielimy na figury G_1 i G_2 , jak na rysunku b) powyżej. Figura G_1 jest ograniczona, więc ma skończone pole, natomiast fakt, że figura G_2 także ma skończone pole pokazujemy, jak w przypadku figury F_4 . Trójkąt G ma skończone pole, gdyż składa się z dwóch figur o skończonym polu. Oznacza to, że trójkąt F_1 a tym samym także trójkąt F_2 jest figurą o skończonym polu.

Mamy $P(T_{id}) = P(F_1) + P(F_2) + P(F_3) + P(F_4)$, zatem T_{id} jako wielokąt będący sumą czterech wielokątów o skończonym polu także ma skończone pole.

Uwaga: Trójkąt T_{id} może stanowić uniwersalny wzorec pola na płaszczyźnie nieeuklidesowej, ponieważ zgodnie z Własnością 3.44 każde dwa trójkąty idealne T_{id} są przystające, czyli innymi słowy istnieje tylko jeden taki trójkąt z dokładnością do izometrii.

Określenie 3.46. Będziemy przyjmować, że trójkąt idealny T_{id} ma pole powierzchni $P(T_{id})$ równe π .

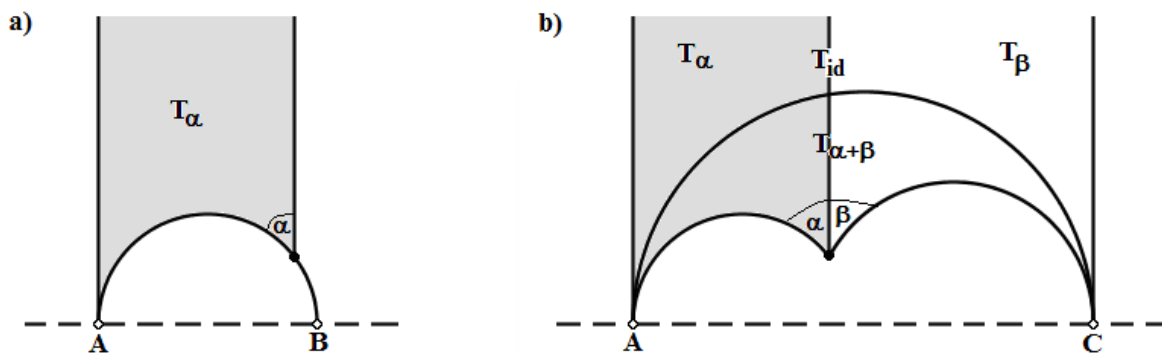
Pole trójkąta o dwóch wierzchołkach idealnych

Zbadajmy teraz pola trójkątów z jednym wierzchołkiem właściwym i dwoma idealnymi. Ponieważ wszystkie takie trójkąty o ustalonym kącie α w wierzchołku właściwym są przystające (o czym mówi poniższy fakt), ograniczymy się do wyznaczenia pola jednego trójkąta T_α .

Fakt 3.47. Dwa trójkąty o dwóch wierzchołkach idealnych są przystające wtedy i tylko wtedy, gdy kąty przy ich wierzchołkach właściwych są równe.

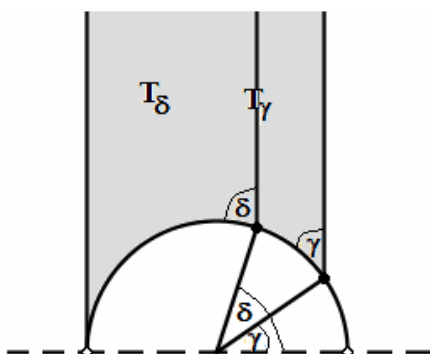
Dowód: Dowód tego faktu jest treścią zadania nr 5 na liście zadań na str. 71.

Weźmy teraz dowolny trójkąt T_α o dowolnym kącie $\alpha \in (0, \pi)$ (patrz rysunek a) poniżej).



Dorysujmy do T_α trójkąt T_β , jak na rysunku b) powyżej.

Wtedy mamy $P(T_\alpha) + P(T_\beta) = P(T_{\alpha+\beta}) + P(T_{id})$. Podstawiając $P(T_{id}) = \pi$ otrzymujemy $P(T_\alpha) + P(T_\beta) = P(T_{\alpha+\beta}) + \pi$, co po odjęciu z obu stron 2π daje nam równanie $(P(T_\alpha) - \pi) + (P(T_\beta) - \pi) = P(T_{\alpha+\beta}) - \pi$. Rozważmy teraz pomocniczą funkcję $f: (0, \pi) \rightarrow (-\pi, \infty)$ określoną wzorem: $f(\alpha) = P(T_\alpha) - \pi$. Dzięki wcześniej wyznaczonemu równaniu $(P(T_\alpha) - \pi) + (P(T_\beta) - \pi) = P(T_{\alpha+\beta}) - \pi$ możemy zauważyć, że funkcja f zdefiniowana powyżej jest addytywna, gdyż spełnia dla dowolnych jej argumentów α i β zachodzi $f(\alpha) + f(\beta) = f(\alpha + \beta)$. Odwzorowanie f jest ponadto malejące.



Rzeczywiście, dla dowolnych kątów $\delta, \gamma \in (0, \pi)$ takich, że $\delta > \gamma$ zachodzi $T_\delta \subset T_\gamma$, skąd $P(T_\delta) < P(T_\gamma)$, zatem $P(T_\delta) - \pi < P(T_\gamma) - \pi$, czyli $f(\delta) < f(\gamma)$.

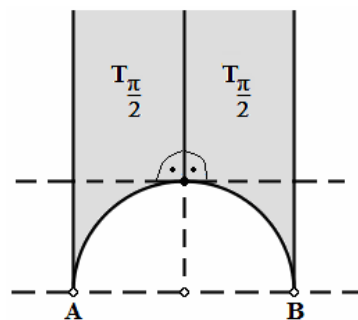
Wiedząc że f jest addytywna i monotoniczna, możemy skorzystać z twierdzenia analizy matematycznej, którego dowód pominiemy w tym skrypcie:

Fakt 3.48. *Jeżeli funkcja f spełnia zależność $f(\alpha) + f(\beta) = f(\alpha + \beta)$ dla dowolnych argumentów α, β i jest monotoniczna, to dla pewnej stałej $c \in \mathbb{R}$ zachodzi $f(\alpha) = c \cdot \alpha$.*

Wyznamy stałą c dla naszej funkcji. Na razie wiemy jedynie, ile wynosi pole trójkąta T_{id} . Ponadto dwa odpowiednio dobrane trójkąty $T_{\frac{\pi}{2}}$ (patrz rysunek poniżej) dopełniają się do T_{id} .

Wykorzystajmy te informacje do obliczenia pola trójkąta $T_{\frac{\pi}{2}}$:

$$P(T_{\frac{\pi}{2}}) = \frac{1}{2} P(T_{id}) = \frac{\pi}{2}$$



Obliczmy teraz stałą c , wstawiając do wzoru $f(\alpha) = c \cdot \alpha$ argument $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Z jednej strony mamy $f(\frac{\pi}{2}) = P(T_{\frac{\pi}{2}}) - \pi = \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2}$, a z drugiej $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} \cdot c$. Otrzymujemy więc $-\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot c$, skąd $c = -1$. Dla każdej wartości α spełnione jest zatem równanie $f(\alpha) = -\alpha$.

Wróćmy teraz do wzoru funkcji f , który ma postać $f(\alpha) = P(T_\alpha) - \pi$. Wstawiając $f(\alpha) = -\alpha$ dostajemy równanie $-\alpha = P(T_\alpha) - \pi$, skąd $P(T_\alpha) = \pi - \alpha$, co dowodzi prawdziwości poniższego faktu.

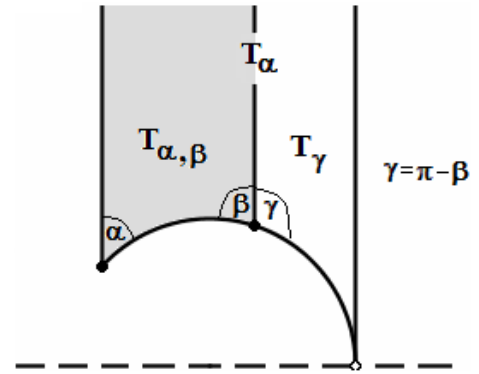
Fakt 3.49. *Pole powierzchni trójkąta T_α , w którym są dwa wierzchołki idealne i jeden właściwy o kącie $\alpha \in (0, \pi)$ jest równe $\pi - \alpha$.*

Pole trójkąta o jednym wierzchołku idealnym

Podobnie, jak w poprzednich przypadkach, także i teraz zbadamy pole dla wybranego typu trójkątów $T_{\alpha, \beta}$ o ustalonych kątach α i β , ponieważ istnieje tylko jeden taki trójkąt z dokładnością do izometrii. Mówi o tym poniższy fakt, którego dowód pozostawimy czytelnikowi do samodzielnego przeprowadzenia (jest to część zadania nr 6 z listy zadań na str. 71).

Fakt 3.50. *Każde dwa trójkąty o jednym wierzchołku idealnym i dwóch właściwych, w których są kąty α i β z przedziału $(0, \pi)$ są przystające.*

Obliczmy teraz pole trójkąta $T_{\alpha, \beta}$. W tym celu weźmy dowolny trójkąt $T_{\alpha, \beta}$ i dorysujmy do niego trójkąt T_γ , który w wierzchołku właściwym ma kąt γ przyległy do kąta β , zatem $T_\gamma = T_{\pi - \beta}$.



Dla trójkątów $T_{\alpha, \beta}$, $T_{\pi - \beta}$ oraz T_α jak na rysunku powyżej zachodzi: $P(T_{\alpha, \beta}) + P(T_{\pi - \beta}) = P(T_\alpha)$. Z Faktu 3.49 mamy $P(T_{\pi - \beta}) = \pi - (\pi - \beta) = \beta$ oraz $P(T_\alpha) = \pi - \alpha$, co po podstawieniu do pierwszego równania daje nam $P(T_{\alpha, \beta}) + \beta = \pi - \alpha$, skąd $P(T_{\alpha, \beta}) = \pi - \alpha - \beta$, zatem prawdziwy jest poniższy fakt.

Fakt 3.51. *Pole powierzchni trójkąta $T_{\alpha, \beta}$, w którym jest jeden wierzchołek idealny i dwa właściwe o kątach α i β z przedziału $(0, \pi)$ jest równe $\pi - \alpha - \beta$.*

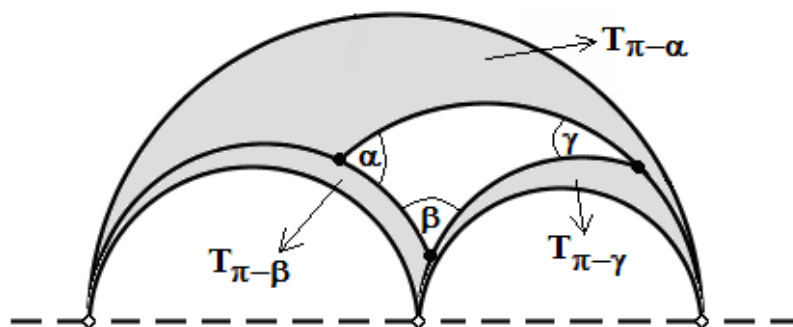
Pole trójkąta o trzech wierzchołkach właściwych

Wyznaczyliśmy już wzory na pola wszystkich trójkątów idealnych. Czas, byśmy w końcu zbadali pola trójkątów, w których wszystkie trzy wierzchołki są właściwe. W przypadku tych trójkątów pole $P(T_{\alpha, \beta, \gamma})$ jest wyznaczone jednoznacznie, co wynika z Faktu 3.52 zamieszczonego poniżej.

Istnienie związku pomiędzy długością odcinka a kątem (pokazane w rozdziale 2.4.4, str. 27) sprawia, że w geometrii nieeuklidesowej nie ma podobieństw, a jedynie przystawanie, natomiast do tego, by trójkąty były przystające wystarczy, by miały takie same kąty (czego w tym skrypcie nie będziemy udowadniać). Jest to tzw. cecha kkk (kąt – kąt – kąt) przystawiania trójkątów. Z cechy tej wynika następujący fakt:

Fakt 3.52. *Dowolne dwa nieeuklidesowe trójkąty o wszystkich wierzchołkach właściwych i kątach α , β , γ są przystające.*

Znajdźmy teraz wzór na pole trójkąta $T_{\alpha, \beta, \gamma}$. W tym celu weźmy dowolny trójkąt $T_{\alpha, \beta, \gamma}$ o kątach α , β , γ i trzech wierzchołkach właściwych. Przedłużmy każdy z jego boków z jednej strony do brzegu modelu, jak to zostało zrobione na rysunku poniżej.



Powstały trzy trójkąty idealne $T_{\pi-\alpha}$, $T_{\pi-\beta}$ oraz $T_{\pi-\gamma}$, każdy o dwóch wierzchołkach idealnych i jednym właściwym, w którym kąt jest równy kątowi przyległemu odpowiednio do kątów α , β i γ . Trójkąty te dopełniają $T_{\alpha,\beta,\gamma}$ do trójkąta T_{id} o wszystkich wierzchołkach idealnych. Dla tych trójkątów zachodzi: $P(T_{\alpha,\beta,\gamma}) + P(T_{\pi-\alpha}) + P(T_{\pi-\beta}) + P(T_{\pi-\gamma}) = P(T_{id})$. Na mocy Faktu 3.49 mamy $P(T_{\pi-\alpha}) = \pi - (\pi - \alpha) = \alpha$ i podobnie $P(T_{\pi-\beta}) = \beta$ oraz $P(T_{\pi-\gamma}) = \gamma$, natomiast zgodnie z Określeniem 3.46 $P(T_{id}) = \pi$. Podstawiając te wartości do równania powyżej otrzymujemy $P(T_{\alpha,\beta,\gamma}) + \alpha + \beta + \gamma = \pi$, skąd $P(T_{\alpha,\beta,\gamma}) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$. Prawdziwy jest zatem poniższy fakt.

Fakt 3.53. Pole powierzchni trójkąta $T_{\alpha,\beta,\gamma}$ o wszystkich trzech wierzchołkach właściwych i kątach α, β, γ przedziału $(0, \pi)$ jest równe $\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$.

Uwaga: Jeśli przyjmiemy, że kąt w wierzchołku idealnym wynosi 0° , to wówczas powyższy wzór wylicza także pola trójkątów idealnych, tzn.

$$P(T_\alpha) = P(T_{\alpha,0,0}) = \pi - (\alpha + 0 + 0) = \pi - \alpha \text{ oraz}$$

$$P(T_{\alpha,\beta}) = P(T_{\alpha,\beta,0}) = \pi - (\alpha + \beta + 0) = \pi - \alpha - \beta$$

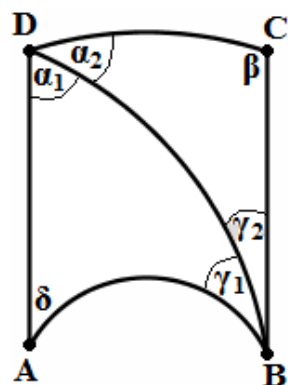
Definicja 3.54. Różnicę $\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$, czyli różnicę sumy kątów w trójkącie euklidesowym oraz sumy kątów w trójkącie nieeuklidesowym nazywamy defektem.

Zgodnie z powyższą definicją oraz na mocy Faktu 3.53 i Uwagi do tego faktu zachodzi następujący fakt:

Fakt 3.55. Pole trójkąta nieeuklidesowego jest równe jego defektowi.

Pole wielokąta nieeuklidesowego

Potrąfimy już obliczyć pole dowolnego, także idealnego trójkąta. Teraz wykorzystamy tę wiedzę, by określić pole dowolnego n -kąta nieeuklidesowego. Na początku rozdziału 3.5 wspominaliśmy już, że na płaszczyźnie nieeuklidesowej każdy wielokąt można przedstawić w postaci sumy skończonej liczby nie zachodzących na siebie trójkątów. Spójrzmy na rysunek poniżej, gdzie na takie trójkąty został podzielony przykładowy czworokąt hiperboliczny.



Pole dowolnego czworokąta $ABCD$ o kątach $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, gdzie $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ oraz $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ jest równe sumie pól trójkątów ABD

i BCD .

Trójkąty te mają wszystkie wierzchołki właściwe, więc na mocy Faktu 3.53 $P_{ABD} = \pi - (\alpha_1 + \delta + \gamma_1)$ i $P_{BCD} = \pi - (\alpha_2 + \beta + \gamma_2)$.

Mamy zatem:

$$\begin{aligned} P_{ABCD} &= P_{ABD} + P_{BCD} = \pi - (\alpha_1 + \delta + \gamma_1) + \pi - (\alpha_2 + \beta + \gamma_2) = \\ &= 2\pi - (\alpha_1 + \delta + \gamma_1 + \alpha_2 + \beta + \gamma_2) = 2\pi - (\alpha + \beta + \gamma + \delta). \end{aligned}$$

Zauważmy, że suma kątów dowolnego czworokąta euklidesowego wynosi 2π , natomiast suma kątów w czworokącie $ABCD$ jest równa $\alpha + \beta + \gamma + \delta$. Różnica $2\pi - (\alpha + \beta + \gamma + \delta)$ jest więc defektem czworokąta $ABCD$. Oznacza to, że pole dowolnego czworokąta o wszystkich wierzchołkach właściwych jest równe jego defektowi.

Jak się za chwilę okaże, także dla czworokątów idealnych, a co więcej - również dla dowolnego wielokąta nieeuklidesowego pole powierzchni jest równe defektowi.

Twierdzenie 3.56. *Pole powierzchni dowolnego n -kąta nieeuklidesowego (o wierzchołkach zwykłych lub idealnych w dowolnych kombinacjach) jest równe defektowi, który określamy jako różnicę pomiędzy sumą kątów dowolnego n -kąta euklidesowego wynoszącą $\pi(n-2)$, a sumą kątów danego n -kąta nieeuklidesowego.*

Zgodnie z powyższą definicją pole danego n -kąta nieeuklidesowego o kątach $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ obliczymy ze wzoru $\pi(n-2) - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)$, przy czym przyjmujemy, że w wierzchołkach idealnych kąt jest równy 0° , zatem dla pewnego i może być $\alpha_i = 0^\circ$.

Uwaga: W indukcyjnym dowodzie Twierdzenia 3.56 istotną rolę będzie odgrywać podział rozpatrywanego wielokąta za pomocą przekątnej. Na płaszczyźnie hiperbolicznej przez przekątną wielokąta pomiędzy wierzchołkami A i B rozumiemy odcinek, półprostą lub prostą łączącą punkty A i B i nie będącą bokiem danego wielokąta. W przypadku, gdy mamy do czynienia z wierzchołkami idealnymi, przekątnymi będą proste (lub ich części), których przedłużenia przechodzą przez punkt w „górnej lub dolnej nieskończoności”, np. przekątna p jak na rysunku poniżej.

Dowód Twierdzenia 3.56: Zastosujemy indukcję matematyczną względem liczby wierzchołków wielokąta nieeuklidesowego i pokażemy, że Twierdzenie 3.56 jest prawdziwe dla każdej liczby naturalnej $n \geq 3$.

Dla $n = 3$ twierdzenie to jest prawdziwe na mocy Faktu 3.55.

Wprowadzimy pomocnicze oznaczenia: niech W_k oznacza wielokąt o k wierzchołkach, natomiast W_{k+1} niech będzie wielokątem o $(k+1)$ wierzchołkach. Wtedy $P(W_k)$ będzie polem wielokąta o k wierzchołkach.

Założmy, że dla W_k zachodzi $P(W_k) = \pi(k-2) - (\alpha_1 + \dots + \alpha_k)$, gdzie $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ są kątami danego W_k . Udowodnimy, że dla W_{k+1} prawdziwa jest równość:

$$P(W_{k+1}) = \pi((k+1)-2) - (\alpha_1 + \dots + \alpha_k + \alpha_{k+1}), \text{ gdzie } \alpha_1, \dots, \alpha_{k+1} \text{ są kątami danego } W_{k+1}.$$

Każdy wielokąt nieeuklidesowy o $(k+1)$ wierzchołkach można podzielić przy pomocy jednej przekątnej na dwa wielokąty, z których jeden będzie trójkątem, a drugi wielokątem o k wierzchołkach. Własność ta zachodzi zarówno dla wielokątów wypukłych jak i wklęsłych, jednak nie będziemy tego dowodzić. Podzielmy zatem W_{k+1} przy pomocy przekątnej p (patrz rysunek poniżej) na dwie figury: trójkąt i wielokąt o k wierzchołkach. Ponumerujmy następnie kąty W_{k+1} w takiej kolejności, by p dzieliła kąty α_1 i α_3 na dwie części. Wtedy mamy $\alpha_1 = \beta_1 + \beta_2$ oraz $\alpha_3 = \gamma_1 + \gamma_2$, gdzie β_1, γ_1 są kątami utworzonego k -kąta, natomiast β_2, γ_2 są

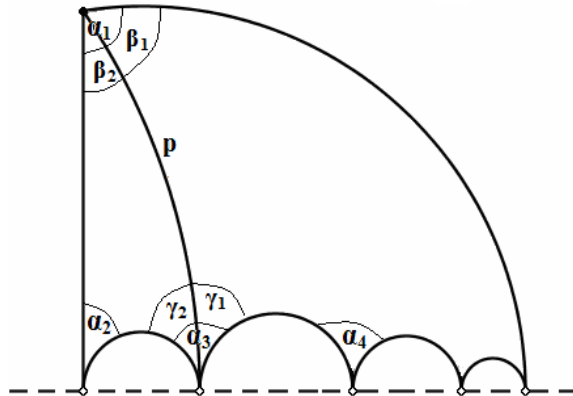
kątami trójkąta. Ponadto także kąt α_2 należy do tego trójkąta. Stosując założenie indukcyjne otrzymujemy:

$$P(W_{k+1}) = P(W_k) + P(W_3) = \pi(k-2) - (\beta_1 + \gamma_1 + \alpha_4 + \alpha_5 + \dots + \alpha_{k+1}) + P(W_3).$$

Zgodnie z Faktem 3.55 mamy $P(W_3) = \pi - (\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2)$, zatem

$$\begin{aligned} P(W_{k+1}) &= \pi(k-2) - (\beta_1 + \gamma_1 + \alpha_4 + \dots + \alpha_{k+1}) + \pi - (\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2) = \\ &= \pi(k+1-2) - (\beta_1 + \gamma_1 + \beta_2 + \gamma_2 + \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5 + \dots + \alpha_{k+1}) = \pi((k+1)-2) - (\alpha_1 + \dots + \alpha_{k+1}). \end{aligned}$$

Z zasady indukcji matematycznej wnioskujemy, że Twierdzenie 3.56 jest prawdziwe dla każdej liczby naturalnej $n \geq 3$, co należało dowieść.



Bibliografia

- [1] R. Doman, *Wykłady z geometrii elementarnej*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2001
- [2] A. Sznajder Otfinowska, *Podstawy geometrii i elementy geometrii nieeuklidesowej. Skrypt do zajęć na specjalności nauczycielskiej*, praca magisterska napisana w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Wrocław 2005

