TWIERDZENIE 4.1. *Funkcja P_0 spełnia aksjomaty pola.*

DOWÓD: Pokażemy, że aksjomaty pola są spełnione:

- **Aksjomat jednostki**

Weźmy kwadrat jednostkowy K_0, podzielmy go na dwa trójkąty prostokątne, przystające T_1, T_2, które mają wtedy podstawę i wysokość długości 1.

Zatem $P_0(K_0) = P_0(T_1) + P_0(T_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$ ■

- **Aksjomat monotoniczności**

Dane są dwa wielokąty W_1, W_2. Niech $W_1 \subseteq W_2$.

a) Jeżeli $W_1 = W_2$ to wtedy $P_0(W_1) = P_0(W_2)$ i teza aksjomatu zachodzi.

b) Jeżeli zaś $W_1 \subset W_2$ i $W_1 \neq W_2$ wtedy istnieją trójkąty $\Delta_1 \ldots \Delta_k$ niezachodzące na siebie i na W_1, takie że: $W_2 = W_1 \cup \Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_k$

Wielokąt W_1 dzielimy na trójkąty $T_1, \ldots, T_n$ niezachodzące na siebie. Otrzymujemy wtedy:

$$P_0(W_1) = P_0(T_1) + \ldots + P_0(T_n),$$
$$P_0(W_2) = P_0(T_1) + \ldots + P_0(T_n) + P(\Delta_1) + \ldots + P(\Delta_k).$$

Ponieważ $P_0(\Delta_i) = \frac{1}{2}\, a_i h_i > 0$ więc $\sum_{i=1} P_0(\Delta_i) > 0$,

co daje, że $P_0(W_1) < P_0(W_2)$. ■

- **Aksjomat sumy**

Wielokąty W_1, W_2 możemy podzielić na rozłączne trójkąty $T_1, \ldots, T_n$ i $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ odpowiednio. Wtedy,

$$P_0(W_1) = P_0(T_1) + \ldots + P_0(T_n), \quad P_0(W_2) = P_0(\Delta_1) + \ldots + P_0(\Delta_k),$$

oraz

$$P_0(W_1 \cup W_2) = P_0(T_1) + \ldots + P_0(T_n) + P(\Delta_1) + \ldots + P(\Delta_k).$$

Stąd już widać, że $P_0(W_1) + P_0(W_2) = P_0(W_1 \square W_2)$. ■

- **Aksjomat przystawania**

Dane są dwa przystające wielokąty W_1, W_2, które dzielimy na rozłączne trójkąty $T_1, \ldots, T_n$ i $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ odpowiednio, tak by $T_1 \equiv \Delta_1, \ldots, T_n \equiv \Delta_n$.

Wtedy $P_0(T_i) = \frac{1}{2}\, a_i h_i = P_0(\Delta i)$.

Zatem otrzymujemy szukaną równość

$$P_0(W_1) = P_0(T_1) + \ldots + P_0(T_n) = P_0(\Delta_1) + \ldots + P_0(\Delta_n) = P_0(W_2).$$ ■

WNIOSEK 4.1. Aksjomaty pola są niesprzeczne.

Ponieważ powyższe rozumowania pokazują, że istnieje efektywnie skonstruowana funkcja P_0 spełniająca wszystkie cztery aksjomaty pola.

ZUPEŁNOŚĆ

<u>zupełność</u> – teoria niesprzeczna, w której każde sensownie sformułowane stwierdzenie można albo udowodnić, albo obalić

Jak dowieść że teoria nie jest zupełna?

- Wskazać stwierdzenie niezależne od aksjomatów tej teorii, czyli stwierdzenie którego nie da się ani udowodnić ani obalić

  W praktyce, oznacza to skonstruowanie dwóch modeli teorii:

  1. w których spełnione są wszystkie aksjomaty oraz nasze stwierdzenie
  2. — " — a nasze stwierdzenie nie zachodzi.

<u>Pd.</u> AJ, AM, AP. Istnieje wielokąt mający <u>zerowe pole</u>.

Jak dowieść że teoria jest zupełna?

- Pokazać, że powyższa sytuacja z modelami 1. i 2. nie może mieć miejsca np. przez udowodnienie, że teoria ma <u>dokładnie jeden</u> model spełniający wszystkie aksjomaty (z dokładnością do istoty, a nie drugorzędnych szczegółów).

Np. $\tilde{P}$

(1) $\tilde{P}(\triangle_{a,b}) = \frac{a \cdot b}{2}$

(2) $\tilde{P}(W) = \sum \tilde{P}(T_i)$

gdzie T_i to trójkąty rozkładu W na pewne nie zachodzące trójkąty prostokątne.

$\tilde{P}$ jest z dokładnością do istoty tym samym modelem co $\overline{P}$, bo $\tilde{P}(W) = \overline{P}(W)$ dla każdego wielokąta W.

To że do opisu $\tilde{P}$ użyte zostały inne obiekty pomocnicze stanowi właśnie drugorzędne szczegóły.

OBSERWACJA:

Teoria pola wielokątów jest teorią zupełną.

<u>Dowód:</u>

Wiemy już, że jest to teoria niesprzeczna.

Pokażemy, że posiada ona, z dokładnością do tego co istotne (izomorfizmu), dokładnie jeden model.

W tym celu zauważmy, że dla dowolnego modelu $\hat{P}$ spełniającego aksjomaty, i dla dowolnego wielokąta W wartość $\hat{P}(W)$ jest jednoznacznie zdeterminowana i równa $\bar{P}(W)$.

Niech $W = T_1 \cup \dots \cup T_n$ będzie rozkładem W na trójkąty.

Ponieważ dla $\hat{P}$ zachodzą aksjomaty, zachodzi też wzór na

$\hat{P}(T) = \frac{a \cdot h}{2}$ dla dowolnego trójkąta T o podstawie a i wysokości h.
[bo wzór ten wynika z aksjomatów]

Podobnie, dla $\hat{P}$ zachodzi uogólniony aksjomat sumy.

Zatem:

$$\hat{P}(W) = \sum_{i=1}^{n} \hat{P}(T_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i \cdot h_i}{2} = \bar{P}(W).$$

Tak więc model $\hat{P}$ jest co do istoty taki sam jak $\bar{P}$. $\square$

Aksjomaty geometrii euklidesowej wg Davida Hilberta, 1899 r.
(nieco zmodyfikowane)

Pojęcia pierwotne:

1. punkt,
2. prosta,
3. relacja należenia (dla par punkt–prosta), oznaczana symbolem $\in$,
4. relacja porządku dla punktów z dowolnej prostej p, oznaczana symbolem $<_p$,
5. miara odcinków, oznaczana symbolem m,
6. miara kątów, oznaczana symbolem μ.

Inne pojęcia pojawiające się w treści aksjomatów są zdefiniowane za pomocą pojęć pierwotnych. Oto ich definicje:

- dla różnych punktów A, B należących do prostej p *odcinkiem* AB nazywamy zbiór złożony z punktów A i B oraz z wszystkich punktów C takich, że $A <_p C <_p B$ lub $B <_p C <_p A$;
- *półprostą* o początku A nazywamy każdy zbiór postaci $\{A\} \cup \{X \in p : A <_p X\}$ lub postaci $\{A\} \cup \{X \in p : X <_p A\}$, gdzie p jest dowolną prostą zawierającą punkt A;
- *kąt* to dwie półproste o wspólnym początku nie leżące na jednej prostej;
- półpłaszczyzną ograniczoną prostą p jest każdy zbiór postaci $\{Y : Y \in p\} \cup \{C\} \cup \{X : CX \cap p = \emptyset\}$, gdzie C jest dowolnym punktem nienależącym do p.

Aksjomaty incydencji (czyli dotyczące relacji należenia)

I1. Dla dowolnych różnych punktów A i B istnieje dokładnie jedna prosta p przechodząca przez te punkty.
I2. Na każdej prostej leżą przynajmniej 2 punkty.
I3. Istnieją 3 punkty nie leżące na jednej prostej.

Aksjomaty porządku

P1. Dla punktów z dowolnej prostej p relacja $<_p$ jest relacją liniowego porządku, tzn.:
  (a) jeśli $A <_p B$ to $A \neq B$;
  (b) jeśli $A \in p$, $B \in p$ oraz $A \neq B$ to zachodzi dokładnie jedna z relacji $A <_p B$, $B <_p A$;
  (c) jeśli $A <_p B$ i $B <_p C$ to $A <_p C$.
P2. (aksjomat Moritza Pascha) Dla dowolnych niewspółliniowych punktów A, B, C oraz dowolnej prostej p nie przechodzącej przez żaden z punktów A, B, C jeśli p przecina odcinek AB to przecina też dokładnie jeden spośród odcinków BC i AC.

Aksjomaty miary odcinków

M1. Dla każdego odcinka AB miara $m(AB)$ jest liczbą dodatnią.
M2. Dla każdej półprostej r o początku w A i dla dowolnej liczby dodatniej d istnieje punkt $B \in r$ taki, że $m(AB) = d$.
M3. Jeśli $A <_p B <_p C$ to $m(AB) + m(BC) = m(AC)$.

Aksjomaty miary kątów

K1. Dla każdego kąta rs (utworzonego z półprostych r i s o wspólnym początku) miara $\mu(rs)$ jest liczbą z otwartego przedziału $(0, \pi)$.
K2. Dla dowolnej prostej p, dowolnej półpłaszczyzny Ω ograniczonej przez p, dowolnej półprostej r zawartej w p i dowolnej liczby $\alpha \in (0, \pi)$ istnieje półprosta s zawarta w Ω tworząca wraz z r kąt rs taki, że $\mu(rs) = \alpha$.
K3. Niech A, B, C i A', B', C' będą dwoma trójkami niewspółliniowych punktów. Jeśli $m(AB) = m(A'B')$, $m(AC) = m(A'C')$ i $\mu(BAC) = \mu(B'A'C')$ to $\mu(ABC) = \mu(A'B'C')$.

Aksjomat równoległości

R. Jeśli punkt A nie leży na prostej p, to istnieje dokładnie jedna prosta przechodząca przez A i nie przecinająca p.

1899

• aksjomaty Hilberta (uzupełnienie i doprecyzowanie układu aksjomatów zaproponowanych przez Euklidesa [III w. p.n.e.]

UWAGI: ⓪ teoria jest oparta (korzysta) z teorii liczb rzeczywistych.

① różne słowne określenia związane z relacją należenia

- punkt leży na prostej [albo nie leży]
- prosta przechodzi przez punkt [albo nie przechodzi]
- proste przecinają się w punkcie (czyli punkt należy do obu prostych)
- proste nie przecinają się - $p_1 \cap p_2 = \emptyset$ -
  - czyli nie istnieje punkt należący do obu tych prostych
- itd.

② rysunki to tylko pomocnicze schematy pozwalające skrótowo zapisać założenia

③ Na każdej prostej oprócz wyróżnionego porządku $<_p$ istnieje drugi porządek, przeciwny do $<_p$,

zdefiniowany przez $A \underset{p}{\succ} B \iff B <_p A$

Gdy zmienimy na jednej lub na wielu prostych $<_p$ na $\underset{p}{\succ}$ to aksjomaty dalej będą spełnione.

W praktyce więc możemy na prostej pracować z dowolnym spośród porządków $<_p$ i $\underset{p}{\succ}$.

④ Istnieją równoważne ścisłe i kompletne zestawy aksjomatów dla geometrii Euklidesowej płaszczyzny różne od układu Hilberta

- Sam układ Hilberta był nieco inny
  nie było pojęcia miary, był aksjomat ciągłości
  (aksjomat Dedekinda, taki jak dla liczb rzeczywistych)

- układy, w których pojęciem pierwotnym są ruchy (izometrie) płaszczyzny [patrz. książka R. Doman „Wykłady z geometrii elementarnej"

8

Metoda aksjomatyczna w geometrii

W dowolnej koncepcji kursu geometrii elementarnej rzeczą nieuniknioną jest wprowadzenie pewnych pojęć geometrycznych, których nie definiuje się w zwykłym sensie. Zwane są one *pojęciami pierwotnymi* i należą do nich np. pojęcie punktu, prostej czy płaszczyzny. Nie definiując pojęć pierwotnych postulujemy jednakże, iż posiadają one pewne własności oraz że zachodzą między nimi pewne związki. Zdania wyrażające te własności i związki, przyjmowane bez dowodu, nazywamy *aksjomatami* geometrii elementarnej. W szkolnych podręcznikach geometrii często jedynie pewne aksjomaty formułowane są w sposób jawny. W naszym wykładzie również nie zajmujemy się dogłębnie aksjomatyką geometrii. Należy to do dziedziny matematyki zwanej *podstawami geometrii.* Poruszymy jednak kilka zagadnień z tej dziedziny, co pozwoli nam przejść w naturalny sposób od tradycyjnej geometrii euklidesowej do tzw. geometrii nieeuklidesowych.

8.1. Pojęcia pierwotne i aksjomaty

Metoda aksjomatyczna w geometrii została zapoczątkowana przez Euklidesa z Aleksandrii. Jest on autorem pierwszego znanego w pełni wykładu geometrii opracowanego tą metodą, zawartego w jego dziele pt. *„Elementy”* napisanym około roku 300 przed naszą erą. W metodzie tej, zwanej również dedukcyjną, punktem wyjściowym budowy teorii jest przyjęcie pewnego układu pojęć, tak zwanych *pojęć pierwotnych*, które powinny mieć możliwie jasny sens intuicyjny, ale których nie definiuje się w zwykłym sensie. Zamiast tego ustala się układ zdań zwanych *aksjomatami*, które postulują pewne własności pojęć pierwotnych i, ewentualnie, pojęć zdefiniowanych za ich pomocą. Za twierdzenia teorii uznaje się aksjomaty oraz zdania, które są logicznymi konsekwencjami aksjomatów, pojęć określonych za pomocą pojęć pierwotnych i aksjomatów, a także pojęć i twierdzeń z teorii uważanych za wcześniejsze (np. z logiki, teorii zbiorów czy arytmetyki) oraz twierdzeń uprzednio udowodnionych.

Dla ścisłości należałoby zaznaczyć, że *Elementy* Euklidesa były w zasadzie jedynie pierwszą próbą zbudowania teorii aksjomatycznej. W systemie geometrii przedstawionym przez Euklidesa były bowiem pewne luki. Nie można było np. udowodnić w nim twierdzenia mówiącego, że jeśli prosta nieprzechodząca przez wierzchołek trójkąta przecina jeden z jego boków, to musi przecinać jeszcze jeden jego bok. Nie umniejsza to jednak zasług Euklidesa szczególnie, jeśli uświadomimy sobie, że wolny od mankamentów natury logicznej układ aksjomatów geometrii euklidesowej podał dopiero w roku 1899 matematyk niemiecki David Hilbert.

W różnych podręcznikach czy książkach z geometrii elementarnej lub poświęconych podstawom geometrii, można znaleźć różne, ale równoważne (tzn. prowadzące do tego samego zbioru twierdzeń) układy pojęć pierwotnych i aksjomatów geometrii euklidesowej. Przytoczony poniżej przykładowy współczesny *układ aksjomatów planimetrii euklidesowej* pochodzi z książki [11] i jako teorie wcześniejsze przyjmuje, oprócz logiki, teorię zbiorów i arytmetykę liczb rzeczywistych.

Pojęcia pierwotne planimetrii

1. *Płaszczyzna* – zbiór $\mathcal{P}$, którego elementy nazywamy *punktami*
2. *Proste* – pewne podzbiory zbioru $\mathcal{P}$
3. *Odległość geometryczna*

Aksjomaty planimetrii

I. Aksjomaty incydencji

(I a) *Przez dwa różne punkty A, $B \in \mathcal{P}$ przechodzi dokładnie jedna prosta. Oznaczamy ją przez (AB).*

(I b) *Do każdej prostej należą przynajmniej dwa różne punkty.*

(I c) *Istnieją trzy punkty nienależące do jednej prostej.*

Aksjomaty uprządkowania

(II a) *Na każdej prostej istnieją dwie wzajemnie odwrotne relacje po*rządku liniowego *(tzn. zwrotne, antysymetryczne, przechodnie i spójne).*

Aksjomat (II a) pozwala zdefiniować *odcinek* i *półprostą* w następujący sposób. Mówimy, że punkt C *leży między punktami* A i B, jeśli C należy do prostęj $\mathcal{D}$ przechodzącej przez A i B oraz $A \preceq C \preceq B$, gdzie $\preceq$ jest tą relacją porządku liniowego na $\mathcal{D}$, dla której $A \preceq B$. *Odcinkiem* $[AB]$ nazywamy zbiór punktów leżących między A i B. Jeśli A i B są różnymi punktami, to *półprostą* $AB^{\rightarrow}$ nazywamy podzbiór prostej (AB) składający się ze wszystkich takich punktów C, że C leży między A i B lub B leży między A i C. Punkt A nazywamy *początkiem* półprostej $AB^{\rightarrow}$.

(II b) (Aksjomat Pascha)
Jeśli punkty A, B, C nie leżą na jednej prostej i prosta $\mathcal{D}$ przecina jeden z odcinków $[AB]$, $[BC]$ lub $[CA]$, to przecina ona jeszcze co najmniej jeden z nich.

Aksjomat ten wprowadzony dopiero w roku 1882 przez M. Pascha pozwala w następujący sposób zdefiniować półpłaszczyznę: Dla dowolnej prostej $\mathcal{D}$, określamy relację $\mathcal{R}$ na zbiorze $\mathcal{P} \setminus \mathcal{D}$ za pomocą następującego warunku: $A\mathcal{R}B \iff [AB] \cap \mathcal{D} = \emptyset$. Posługując się aksjomatem **II b**, możemy udowodnić, że $\mathcal{R}$ jest relacją równoważności rozkładającą zbiór $\mathcal{P} \setminus \mathcal{D}$ na dokładnie dwie klasy. Każdą z nich nazywamy *półpłaszczyzną otwartą* ograniczoną przez $\mathcal{D}$. *Półpłaszczyznę* definiujemy jako sumę półpłaszczyzny otwartej i ograniczającej ją prostej.

III. Aksjomaty odległości

Odległość geometryczna *jest funkcją* $d : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \longrightarrow [0, \infty)$ *mającą następujące własności:*

(III a) *Dla dowolnych A, B zachodzi równość $d(A, B) = d(B, A)$.*

(III b) $d(A, B) = 0 \iff A = B$.

(III c) *Punkt C prostej (AB) należy do odcinka $[AB]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $d(A, B) = d(A, C) + d(C, B)$.*

(III d) *Dla każdej półprostej $AB^{\rightarrow}$ i dla dowolnej dodatniej liczby rzeczywistej x istnieje taki punkt $M \in AB^{\rightarrow}$, że $d(A, M) = x$.*

IV. Aksjomaty symetrii

(IV a) *Dla dowolnej prostej $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$ istnieje dokładnie jedno różne od identyczności przekształcenie $s_{\mathcal{D}} : \mathcal{P} \xrightarrow{na} \mathcal{P}$ przeprowadzające proste na proste, zachowujące odległość geometryczną i takie, że każdy punkt prostej $\mathcal{D}$ jest jego punktem stałym. Przekształcenie $s_{\mathcal{D}}$ nazywamy* symetrią osiową *względem prostej $\mathcal{D}$.*

(IV b) *Dla dowolnej pary $(AB^{\rightarrow}, AC^{\rightarrow})$ półprostych o wspólnym początku A istnieje co najmniej jedna taka prosta $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$, że $s_{\mathcal{D}}(AB^{\rightarrow}) = AC^{\rightarrow}$.*

V. Aksjomat Euklidesa o równoległych

Dla dowolnej prostej $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$ i dowolnego punktu $M \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{D}$ istnieje co najwyżej jedna prosta $\Delta \subset \mathcal{P}$ przechodząca przez M i rozłączna z $\mathcal{D}$.

W oparciu o przedstawione grupy aksjomatów I – V, dają się wyprowadzić wszystkie twierdzenia stanowiące treść geometrii euklidesowej płaskiej. Samą zaś *geometrię euklidesową płaską* można w sposób poprawny określić jako układ twierdzeń dających się wyprowadzić z aksjomatów I – V. Płaszczyznę euklidesową natomiast, możemy zdefiniować formalnie, przyjmując następujące określenie:

8.1.1. Definicja. Zbiór $\mathcal{P}$ wraz ze zbiorem prostych i odległością geometryczną spełniający aksjomaty I – V nazywamy *płaszczyzną euklidesową*.

8.2. Zagadnienie niesprzeczności i niezależności układu aksjomatów geometrii

Pojęcia geometryczne takie jak punkt, prosta, odległość geometryczna czy symetria osiowa możemy traktować jako *dowolne* obiekty spełniające wymienione w poprzednim paragrafie aksjomaty. Dlatego też nie jest rzeczą obojętną wiedzieć, czy obiekty takie istnieją. Gdyby można było udowodnić, że obiekty takie istnieć nie mogą, to rozpatrywany układ aksjomatów

ZAPOZNAJMY SIĘ Z AKSJOMATAMI
ZA POMOCĄ MODELU GEOMETRII

CZĘŚĆ GEOMETRII EUKLIDESOWEJ
dotycząca tylko pojęć punktu i prostych
oraz relacji należenia

— TEORIA INCYDENCJI.

Pojęcia pierwotne — punkt, prosta, rel. należenia

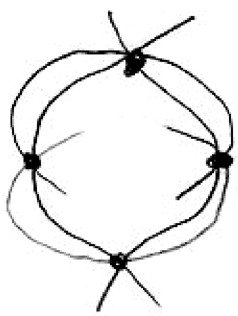
Aksjomaty: I1, I2, I3, R

<u>Model teorii incydencji</u>:

Czteroelementowy zbiór, w którym

- punktami są elementy tego zbioru
- prostymi są wszystkie 3-elementowe podzbiory
- należenie, to zwykłe należenie

Schematyczny obrazek:



I1 NIE

I2 TAK

I3 NIE

R NIE

ZAPOZNAJMY SIĘ Z AKSJOMATAMI
ZA POMOCĄ MODELU GEOMETRII

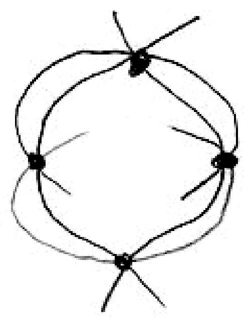
CZĘŚĆ GEOMETRII EUKLIDESOWEJ
dotycząca tylko pojęć punktu i prostych
oraz relacji należenia
– TEORIA INCYDENCJI.

Pojęcia pierwotne – punkt, prosta, rel. należenia
Aksjomaty: I1, I2, I3, R

Model teorii incydencji:

Czteroelementowy zbiór, w którym
- punktami są elementy tego zbioru
- prostymi są wszystkie 3-elementowe podzbiory
- należenie, to zwykłe należenie

Schematyczny obrazek:



I1 NIE
I2 TAK
I3 NIE

R NIE

Interpretacja dalszych pojęć pierwotnych w tym modelu: (uzupełnienie do modelu geom. euklidesowej).

porządek (na prostych) – zgodnie z narysowanymi liniami

mierzenie odcinków

tak przyjmujemy

mierzenie kątów – wszystkie równe $\frac{\pi}{2}$

P1 TAK

P2 TAK (w sposób sztuczny, bo nie istnieją trójki niewspółliniowych punktów)

M1 TAK

M2 NIE

M3 TAK

K1 TAK

K2 NIE

K3 TAK (w sposób sztuczny, tak jak P2)

WYJAŚNIENIA WOKÓŁ DEFINICJI PÓŁPŁASZCZYZNY

STW 1 Jeśli $A <_p B <_p C$ to $m(AB) < m(AC)$ i

$m(BC) < m(AC)$.

d-d: $m(AB) + m(BC) \overset{M3}{=} m(AC) \; / - m(BC)$

$m(AB) = m(AC) - m(BC) < m(AC)$ bo $m(BC) \overset{M1}{>} 0$.

podobnie $m(BC) = m(AC) - m(AB) < m(AC)$ bo $m(AB) \overset{M1}{>} 0$. □

WN 2. Jeśli $A <_p B$ i $A <_p C$ i $m(AB) < m(AC)$ to $B \in AC$.

d-d: gdyby $C <_p B$ to $m(CA) \overset{STW1}{<} m(AB)$, sprzeczność.

Zatem $B \overset{P1(B)}{<_p} C$, czyli $B \in AC$. □

STW 3. Dla każdej prostej p istnieją punkty C_1, C_2 nieleżące na p i takie, że $C_1C_2 \cap p \neq \emptyset$.

d-d: Istnieje $C_1 \notin p$, np. któryś z 3 punktów nieleżących na jednej prostej wymienionych w aksjomacie I3.

Niech $Q \in p$ - dowolny. [istnieje, z I2]

Powiedzmy, że na prostej $m = pr(C_1Q)$ mamy $C_1 <_m Q$.

Niech $d > m(C_1Q)$ będzie liczbą, i

weźmy C_2 : $C_1 <_m C_2$, $d(C_1, C_2) = d$. [aksjomat M2]

Wtedy z WN 2 $Q \in C_1C_2$ czyli $C_1C_2 \cap p \neq \emptyset$.

Ponadto $C_2 \notin p$ bo inaczej $Q, C_2 \in p$ $Q, C_2 \in m$

i dzięki I1 byłoby $p = m$, ale $C_1 \in m$, $C_1 \notin p$, sprzeczność.

$C_1, C_2 \notin p$, $C_1C_2 \cap p \neq \emptyset$. □

STW 4. [Wersja aksjomatu Pascha dla punktów współliniowych]

A, B, C - parami różne współliniowe punkty (na prostej m), prosta p nie przechodzi przez A, B, C.

Jeśli p przecina odcinek AB, to przecina też dokładnie jeden spośród odcinków AC, BC.

dowód: przyjmijmy że $A <_m B$. i że $A <_m P <_m B$ gdzie $P \in p$.

Z aksjomatu I1 punkt P jest jedynym wspólnym punktem prostych p i m, więc jest też jedynym potencjalnym punktem wspólnym p z odcinkami AC i BC

Z aksjomatu P1 (własność porządku) mamy cztery przypadki (dotyczące położenia C względem A, B, P)

1°. $C <_m A <_m P <_m B$

wtedy $P \in BC$, $P \notin AC$, więc p przecina BC i nie przecina AC

2°. $A <_m C <_m P <_m B$

wtedy $P \in BC$, $P \notin AC$ i — " —

3° $A <_m P <_m C <_m B$

wtedy $P \in AC$, $P \notin BC$, więc p przecina AC i nie przecina BC

4° $A <_m P <_m B <_m C$

wtedy $P \in AC$, $P \notin BC$, — " — .

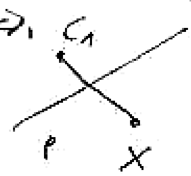
We wszystkich przypadkach teza zachodzi. □

OZN. $C \notin p$. półpłaszczyznę z def. wyznaczoną przez p i C oznaczamy pC.

STW 5. $C_1, C_2 \notin p$, $C_1C_2 \cap p \neq \emptyset$. Dla punktów X nie leżących na p mamy

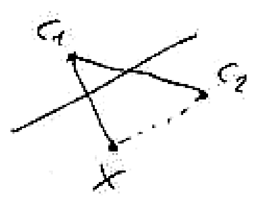
$X \notin pC_1 \iff X \in pC_2$. X należy do dokładnie jednej z półpłaszczyzn pC_1, pC_2

dowód: $\Rightarrow$,



1° $X = C_2$ ok.

2° $X \neq C_2$



P2 (Pascha) i STW 4.

dla implikacji $\Leftarrow$ podobnie. □

WN 6. $pC_1 \cup pC_2 = \{\text{wszystkie punkty płaszczyzny}\}$, $pC_1 \cap pC_2 = \{\text{punkty z } p\}$.

STW 7. $BC \cap p = \emptyset$ to $pC = pB$.

WN 8. Jeśli C_1, C_2, C_3 nie leżą na p, $C_1C_2 \cap p \neq \emptyset$. To $pC_3 = pC_1$ lub $pC_3 = pC_2$. □

Każda prosta wyznacza dokładnie dwie półpłaszczyzny których jest brzegiem.