

Uniwersytet Wrocławski  
Wydział Matematyki i Informatyki  
Instytut Matematyczny  
*specjalność: teoretyczna*

*Mikołaj Czapp*

## Konstruktywny opis kompaktów Markowa

Praca licencjacka  
napisana pod kierunkiem  
prof. dr hab. Jacka Świątkowskiego

Wrocław 2019

# Spis treści

<b>0</b>	<b>Preliminaria</b>	<b>4</b>
<b>1</b>	<b>Assembly system</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Symplicjalny assembly system wyznaczony przez reguły zastępowania i etykietowanie</b>	<b>11</b>
2.1	Dobra rodzina sympleksów . . . . .	11
2.2	Reguły zastępowania . . . . .	12
2.3	Etykietowanie . . . . .	16
2.4	Konstrukcja . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Konstruktywna definicja kompaktu Markowa</b>	<b>22</b>

## Wstęp

W niniejszej pracy zajmujemy się konstruktywnym ujęciem pewnego typu przestrzeni topologicznej, nazywanej w pracach [Dra06], [Paw15] *kompaktem Markowa*. Z definicji jest to granica odwrotna pewnego dość szczególnego ciągu odwrotnego kompleksów symplecjialnych. Definicje Dranishnikova i Pawlik są niekonstruktywne w tym sensie, że opisują warunki na z góry zadany ciąg odwrotny kompleksów symplecjialnych. Motywacją do zaprezentowanego w tej pracy podejścia była obserwacja, że pewna klasa kompaktów Markowa jest *skończenie opisywalna*, to znaczy przy pewnych założeniach jest jednoznacznie zdeterminowana przez skończoną ilość danych (za pośrednictwem odpowiedniej algorytmicznej procedury). Definicja zaprezentowana w tej pracy wychodzi od opisanie pewnego skończonego zestawu danych, które pozwolą na rekurencyjne opisanie odpowiedniego ciągu odwrotnego - i w tym sensie jest konstruktywna.

W pracy tej nie zawarto dowodu twierdzenia, że przedstawiona tutaj definicja kompaktu Markowa jest równoważna z poprzednimi. Autor pozwala sobie stwierdzić, że przy odpowiedniej ostrożności i pewnym nakładzie pracy jest to jednak wykonalne, i w świetle wprowadzonych tu definicji nietrudne, choć niewątpliwie nie natychmiastowe.

Ze względu na miejscami techniczny charakter rozumowań oraz konieczność wprowadzenia wielu oznaczeń, przy pierwszym czytaniu poleca się zapoznanie z przykładami 3.3 oraz 3.6. Zaprezentowane tam obiekty oraz rozumowania zawierają kluczowe elementy konstrukcji oraz pokazują końcowy efekt, kształt którego pozwala na zrozumienie kolejności oraz charakteru wprowadzanych w pracy pojęć.

## Podziękowania

Bardzo dziękuję mojemu promotorowi, Profesorowi Jackowi Świątkowskiemu, za zaproponowanie tematyki pracy, nieocenioną pomoc w procesie pisania oraz wielką cierpliwość przy pracy redakcyjnej.

## 0 Preliminaria

W tej sekcji przywołamy definicję kompleksu symplecjajalnego, używaną w dalszej części pracy. Definicja ta oparta jest na idei z Rozdziału 2 książki [Hat02].

**Definicja 0.1.** *Standardowym  $i$ -wymiarowym sympleksem* nazwiemy zbiór

$$\Delta^i = \{(t_0, \dots, t_i) \in \mathbf{R}^{i+1} : \sum_j t_j = 1 \text{ oraz } t_j \geq 0 \text{ dla wszystkich } j\}$$

*Wierzchołkami*  $\Delta^i$  są standardowe wersory  $e_j \in \mathbf{R}^{i+1}$ ,  $0 \leq j \leq i$ . *Ściana* sympleksu  $\Delta^i$  to kombinacja afiniczna dowolnego niepustego podzbioru wierzchołków  $\Delta^i$ . Ścianę nazwiemy *właściwą* jeśli odpowiadający jej zbiór wierzchołków jest właściwym podzbiorem wierzchołków  $\Delta^i$ . *Brzegiem*  $\partial\Delta^i$  sympleksu  $\Delta^i$  nazwiemy sumę wszystkich właściwych ścian  $\Delta^i$ , a *wnętrzem* zbiór  $\text{int}\Delta^i = \Delta^i \setminus \partial\Delta^i$ .

**Definicja 0.2.** *Geometryczny  $i$ -wymiarowy sympleks* w przestrzeni topologicznej  $X$  to podprzestrzeń  $\sigma \subset X$  wraz z homeomorfizmem  $\phi_\sigma : \Delta^i \rightarrow \sigma$  ze standardowego  $i$ -wymiarowego sympleksu. Nie rozróżniamy homeomorfizmów różniących się o uprzednie złożenie z afinicznym izomorfizmem  $\Delta^i$ . Homeomorfizm  $\phi_\sigma$  nazywamy *odwzorowaniem charakterystycznym* sympleksu  $\sigma$ . *Ścianą* geometrycznego sympleksu nazwiemy obraz  $\tau = \phi_\sigma(\Delta^j)$  dowolnej ściany  $\Delta^j \subset \Delta^i$ ,  $j \leq i$ , wraz z obcięciem  $\phi_{\sigma|_{\Delta^j}} : \Delta^j \rightarrow \tau$ . Ściana  $\tau$  geometrycznego sympleksu  $\sigma$  jak wyżej jest *właściwa*, gdy odpowiadający jej przez  $\phi_\sigma$  sympleks  $\Delta^j$  jest właściwą ścianą w sympleksie  $\Delta^i$ . *Brzegiem*  $\partial\sigma$  geometrycznego sympleksu  $\sigma$  nazwiemy obraz przez  $\phi_\sigma$  brzegu odpowiadającego sympleksu  $\Delta^i$ , a *wnętrzem*  $\text{int}(\sigma)$  geometrycznego sympleksu  $\sigma$  nazwiemy obraz przez  $\phi_\sigma$  wnętrza odpowiadającego sympleksu  $\Delta^i$ .

**Definicja 0.3.** *Kompleksem symplecjajalnym* nazwiemy przestrzeń topologiczną  $X$  wyposażoną w wyróżnioną rodzinę  $S(X)$  geometrycznych sympleksów spełniających warunki

1.  $S(X)$  jest zamknięta na branie ścian,
2. każdy punkt  $X$  należy do wnętrza dokładnie jednego sympleksu z  $S(X)$ ,
3. przecięcie dwóch sympleksów z  $S(X)$  jest puste lub jest ścianą każdego z nich,
4. dla każdego sympleksu  $\sigma \subset X$  suma wnętrz wszystkich sympleksów w  $X$  zawierających  $\sigma$  jest otwartym podzbiorem  $X$ .

Rodzinę  $S(X)$  nazwiemy *zbiorem sympleksów kompleksu  $X$* . Geometryczny  $i$ -wymiarowy sympleks z  $S(X)$  jest  $i$ -wymiarowym sympleksem w  $X$ . *Wierzchołkiem*  $X$  jest taki punkt  $p \in X$ , że singleton  $\{p\}$  jest 0-sympleksem w  $X$ . Zauważmy, że warunek 3 pociąga fakt, że każdy sympleks w  $X$ , jako element rodziny  $S(X)$ , jest jednoznacznie zdeterminowany przez swoje wierzchołki, dlatego możemy mówić, że sympleks jest *rozpinany* przez swoje wierzchołki.

Kompleks symplecjajalny  $X$  jest *skończony*, jeśli odpowiadająca rodzina  $S(X)$  jest skończona.

**Definicja 0.4.** Niech  $X$  oraz  $Y$  będą kompleksami symplecjajnymi. Ciągłe odwzorowanie  $f : X \rightarrow Y$  jest *simplicjalne*, jeśli dla każdego sympleksu  $\sigma \subset X$  istnieje sympleks  $\tau \subset Y$  taki, że obcięcie  $f|_\sigma$  jest afinicznym odwzorowaniem na  $\tau$ . Precyzyjniej, oznacza to, że jeśli  $\phi_\sigma : \Delta^{\dim\sigma} \rightarrow \sigma$  oraz  $\phi_\tau : \Delta^{\dim\tau} \rightarrow \tau$  są odwzorowaniami charakterystycznymi dla  $\sigma$  oraz  $\tau$ , to złożenie  $\phi_\tau^{-1} \circ f \circ \phi_\sigma : \Delta^{\dim\sigma} \rightarrow \Delta^{\dim\tau}$  jest surcją i odwzorowaniem afinicznym. *Simplicjalny izomorfizm* to ciągła bijekcja  $f$  taka, że zarówno  $f$  jak i  $f^{-1}$  są odwzorowaniami symplecjajnymi.

## 1 Assembly system

W tej sekcji opiszemy ogólną konstrukcję pewnej przestrzeni topologicznej, nazywaną *assembly systemem*. Nazwa ma swoje korzenie w [BN17].

**Definicja 1.1.** Niech  $K$  będzie kompleksem symplecjajnym. Załóżmy, że

- dla każdego sympleksu  $\tau \subset K$  dana jest przestrzeń topologiczna  $Y_\tau$ ,
- dla każdej pary  $\rho \subset \tau$  sympleksów z  $K$  dane jest włożenie  $i_{\rho\tau} : Y_\rho \rightarrow Y_\tau$ .

Zakładamy też, że odwzorowania z rodziny  $\{i_{\rho\tau}\}_{\rho \subset \tau}$  spełniają następujący warunek: jeśli dla sympleksów  $\rho, \tau, \nu$  z kompleksu  $K$  zachodzi  $\rho \subset \tau \subset \nu$ , to  $i_{\rho\nu} = i_{\tau\nu} \circ i_{\rho\tau}$  (konwencja:  $i_{\rho\rho} = id_{Y_\rho}$ ). Warunek ten nazwiemy *warunkiem złożenia*. Zakładamy także, że jeśli dla pewnych sympleksów  $\tau_1, \tau_2$  oraz  $\sigma$  z kompleksu  $K$  zachodzi  $\tau_1, \tau_2 \subset \sigma$ , to  $i_{\tau_1\sigma}(Y_{\tau_1}) \cap i_{\tau_2\sigma}(Y_{\tau_2}) = i_{\tau_1 \cap \tau_2 \sigma}(Y_{\tau_1 \cap \tau_2})$  (konwencja:  $i_{\emptyset\sigma}(Y_\emptyset) = \emptyset$ ). Ten zaś warunek nazwiemy *warunkiem przekroju*.

Układ  $\mathcal{A} = (\{Y_\tau\}_{\tau \in S(K)}, \{i_{\rho\tau}\}_{\rho \subset \tau})$  spełniający powyższe założenia nazywamy *assembly systemem* nad kompleksem  $K$ . Gdzie nie będzie to prowadzić do niejednoznaczności, zamiast "niech będzie dany assembly system  $\mathcal{A} = (\{Y_\tau\}_{\tau \in S(K)}, \{i_{\rho\tau}\}_{\rho \subset \tau})$ ", będziemy pisać po prostu "niech będzie dany assembly system  $\mathcal{A}$ " i zakładać, że została ustalona kolekcja przestrzeni topologicznych  $\{Y_\tau\}_{\tau \in S(K)}$  oraz włożeń  $\{i_{\rho\tau}\}_{\rho \subset \tau}$  spełniających warunki definicji.

**Definicja 1.2.** Niech będzie dany assembly system  $\mathcal{A}$  nad kompleksem symplecjajnym  $K$ .  $\mathcal{A}$ -ilorazem nazywamy przestrzeń topologiczną

$$Y = \coprod_{\tau \subset K} Y_\tau / \sim \quad (1)$$

gdzie  $\sim$  jest najmniejszą relacją równoważności generowaną przez relację  $\approx$ :

$$p \approx q \iff p \in Y_\rho, q \in Y_\tau, \rho \neq \tau, \rho \subset \tau \text{ oraz } i_{\rho\tau}(p) = q \quad (2)$$

Relacja  $\sim$  jest efektywnie scharakteryzowana w następującym lemacie.

**Lemat 1.3.** Niech będzie dany assembly system  $\mathcal{A}$  nad kompleksem symplecjajnym  $K$  oraz niech  $\sim$  będzie relacją równoważności z Definicji 1.2. Ustalmy sympleksy  $\rho, \tau \subset K$  oraz punkty  $p \in Y_\tau, q \in Y_\rho$ . Wtedy  $p \sim q \iff \tau \cap \rho \neq \emptyset$  i istnieje punkt  $r \in Y_{\tau \cap \rho}$  taki, że  $i_{\tau \cap \rho \tau}(r) = p$  oraz  $i_{\tau \cap \rho \rho}(r) = q$ .

**Komentarz.** W sytuacji jak w tezie Lematu 1.3 mówimy, że punkt  $r$  *skleja* punkty  $p$  i  $q$ .

*Dowód.*

( $\Rightarrow$ ) Ponieważ relacja  $\sim$  jest generowana przez  $\approx$ , zachodzi

$$p \sim q \iff \text{istnieje ciąg punktów } (a_1, \dots, a_n) \text{ taki, że } a_1 = p, a_n = q \quad (3)$$

$$\text{oraz } a_1 \approx a_2 \text{ lub } a_2 \approx a_1, \dots, a_{n-1} \approx a_n \text{ lub } a_n \approx a_{n-1}.$$

Przeprowadzimy dowód indukcyjny względem  $n$  - liczby elementów w powyższym ciągu punktów.

1.  $n = 2$ . Zachodzi  $p \approx q$  lub  $q \approx p$ . Bez straty ogólności założmy pierwszy przypadek. Spójrzmy na wzór (2). Wystarczy zatem wziąć  $r = p$ .
2.  $n \rightarrow n + 1$ . Założmy, że teza jest prawdziwa dla ciągu złożonego z  $n$  elementów, i niech  $p \sim q$  w taki sposób, że istnieje ciąg relacji jak w (3) złożony z  $n + 1$  elementów. Oznaczmy  $a_n = b$ . Mamy więc  $p \in Y_\tau, b \in Y_\mu$  dla pewnego  $\mu \subset K$ ,  $\tau \cap \mu \neq \emptyset$  i  $r$  skleja  $p$  oraz  $b$ . Należy rozpatrzeć dwa przypadki:

(a)  $b \approx q$  lub

(b)  $q \approx b$ .

*Ad. (a).* Po odczytaniu założeń otrzymujemy, że istnieje następujący ciąg inkluzji:  $\tau \supset \tau \cap \mu \subset \mu \subset \rho$ , gdzie  $q \in Y_\rho$ . Z założenia indukcyjnego  $\tau \cap \mu \neq \emptyset$ , a ponieważ  $\mu \subset \rho$ , to  $\tau \cap \rho \neq \emptyset$ . Naturalnie  $\tau \cap \mu \subset \tau \cap \rho$ . Niech  $r' = i_{\tau \cap \mu \tau \cap \rho}(r)$ . Sprawdźmy, że  $r'$  skleja  $p$  oraz  $q$ .

Korzystając z warunku złożenia z definicji assembly systemu, otrzymujemy, że

$$i_{\tau \cap \rho \rho}(r') = (i_{\tau \cap \rho \rho} \circ i_{\tau \cap \mu \tau \cap \rho})(r) = i_{\tau \cap \mu \rho}(r) = (i_{\mu \rho} \circ i_{\tau \cap \mu \mu})(r) = i_{\mu \rho}(b) = q.$$

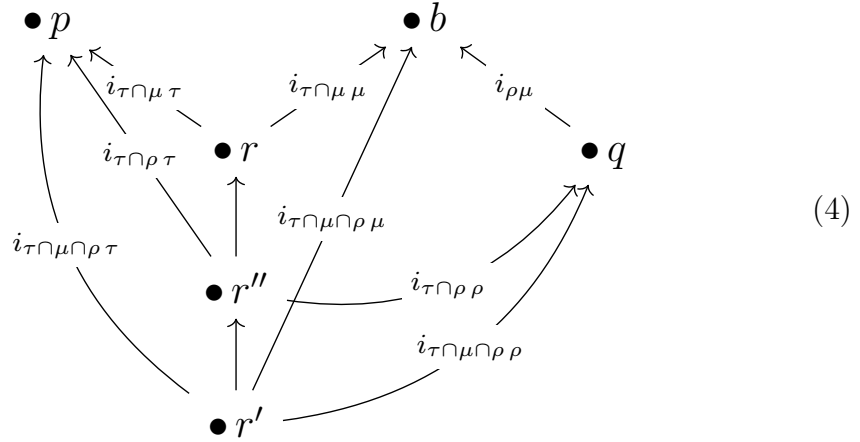
Analogicznie pokazujemy, że  $i_{\tau \cap \rho \tau}(r') = p$ .

*Ad. (b).* Jeśli  $\tau \cap \rho = \emptyset$ , to także  $\tau \cap \mu \cap \rho = \emptyset$ . Z warunku przekroju z definicji assembly systemu odczytujemy, że wtedy

$$i_{\tau \cap \mu \mu}(Y_{\tau \cap \mu}) \cap i_{\rho \mu}(Y_\rho) = i_{\tau \cap \mu \cap \rho \mu}(Y_{\tau \cap \mu \cap \rho}) = i_{\emptyset \mu}(Y_\emptyset) = \emptyset,$$

co przeczy temu, że  $p \sim q$ , a konkretnie temu, że  $r \approx b$  oraz  $q \approx b$ .

Musi zatem zachodzić  $\tau \cap \rho \neq \emptyset$ . Ponownie korzystając warunku przekroju odczytujemy, że  $i_{\tau \cap \mu \mu}(Y_{\tau \cap \mu}) \cap i_{\rho \mu}(Y_\rho) = i_{\tau \cap \mu \cap \rho}(Y_{\tau \cap \mu \cap \rho})$ . Z założenia zachodzi  $i_{\tau \cap \mu \mu}(r) = b = i_{\rho \mu}(q)$ , a zatem z warunku przekroju otrzymujemy, że  $b = i_{\tau \cap \mu \cap \rho}(r')$  dla pewnego  $r' \in Y_{\tau \cap \mu \cap \rho}$ . Rozważmy  $r'' = i_{\tau \cap \mu \cap \rho \tau \cap \rho}(r')$ . Rozumując podobnie jak w *Ad. (a)* możemy pokazać, że  $i_{\tau \cap \rho \tau}(r'') = p$  oraz  $i_{\tau \cap \rho \rho}(r'') = c$ , co sprowadza się do sprawdzenia, że poniższy diagram jest przemienny:



Choć ten warunek przemienności wygląda skomplikowanie, jego uzasadnienie wymaga jedynie wykorzystania założenia, że odwzorowania z rodziny  $\{i_{\rho\tau}\}_{\rho\subset\tau}$  są różnowartościowe oraz spełniają warunek złożenia. Sprawdzenie przemienności diagramu (4) pozostawiamy Czytelnikowi.

( $\Leftarrow$ ) Oznaczmy sympleks  $\sigma := \tau \cap \rho$ . Mamy  $i_{\sigma\tau}(r) = p$ , czyli  $r \approx p$ , a zatem i także  $r \sim p$ . Podobnie otrzymujemy  $r \sim q$ . Z symetryczności relacji  $\sim$  otrzymujemy  $p \sim r$ . Ponieważ relacja  $\sim$  jest tranzytywna, otrzymujemy  $p \sim q$ .  $\square$

**Fakt 1.4.** Niech będzie dany assembly system  $\mathcal{A}$  nad kompleksem symplecjajalnym  $K$  oraz niech  $Y$  będzie  $\mathcal{A}$ -ilorazem. Odwzorowanie ilorazowe  $\pi : \coprod_{\tau \subset K} Y_\tau \rightarrow Y$  po ograniczeniu do każdego z  $Y_\tau$  jest  $1 - 1$ .

*Dowód.* Niech  $p, q \in Y_\tau$  dla pewnego  $\tau \subset K$ . Jeśli  $\pi(p) = \pi(q)$ , z Lematu 1.3 wynika, że  $p = q$ .  $\square$

**Uwaga.** W dalszej części pracy będziemy utożsamiać przestrzenie  $Y_\tau$  z odpowiadającymi im podprzestrzeniami w  $Y$ , zaś punkty z  $Y_\tau$  z ich obrazami w  $Y$ .

Na potrzeby rozważań w dalszej części pracy, opiszemy także wersję symplecjajalną assembly systemu.

**Definicja 1.5.** Symplecjajalnym assembly systemem nad kompleksem  $K$  nazwiemy taki assembly system  $\mathcal{A}$ , w którym  $\{Y_\tau\}_{\tau \in S(K)}$  jest rodziną kompleksów symplecjajalnych, zaś  $\{i_{\rho\tau}\}_{\rho\subset\tau}$  jest rodziną symplecjajalnych włożeń.

**Lemat 1.6.** Niech  $\mathcal{A}$  będzie symplecjajalnym assembly systemem. Jeśli dla pewnych punktów  $z_i \in \text{int}(\sigma_i) \subset Y_{\tau_i}$ ,  $i = 1, 2$  zachodzi  $z_1 \sim z_2$ , to wówczas istnieje sympleks  $\sigma \subset Y_{\tau_1 \cap \tau_2}$  taki, że  $i_{\tau_1 \cap \tau_2 \tau_i}(\sigma) = \sigma_i$  dla  $i = 1, 2$ . W takim wypadku zachodzi też równość  $\pi(\sigma_1) = \pi(\sigma_2)$ .

**Komentarz.** W sytuacji jak w tezie Lematu 1.6 mówimy, że sympleks  $\sigma$  skleja sympleksy  $\sigma_1$  oraz  $\sigma_2$ .

*Dowód.* Korzystamy z faktów, że

- każdy punkt w kompleksie symplecjajalnym należy do wnętrza dokładnie jednego sympleksu oraz
- dla odwzorowania symplecjajalnego  $f : X \rightarrow Y$  między kompleksami symplecjajalnymi  $X$  i  $Y$  oraz punktów  $x \in \text{int}(\tau) \subset X$ ,  $y \in \text{int}(\sigma) \subset Y$  takich, że  $f(x) = y$  zachodzi  $f(\tau) = \sigma$ .

Niech  $z_1 \in \text{int}(\sigma_1)$ ,  $z_2 \in \text{int}(\sigma_2)$  będą takie, że  $z_1 \sim z_2$ . Z Lematu 1.3 wynika, że istnieje punkt  $z \in Y_{\tau_1 \cap \tau_2}$ , który skleja  $z_1$  oraz  $z_2$ . Z pierwszego faktu powyżej  $z \in \text{int}(\sigma)$  dla pewnego sympleksu  $\sigma \subset Y_{\tau_1 \cap \tau_2}$ . Ponieważ włożenia  $i_{\tau_1 \cap \tau_2 \tau_i}$ ,  $i = 1, 2$  są odwzorowaniami symplecjajalnymi, z drugiego faktu powyżej otrzymujemy, że  $i_{\tau_1 \cap \tau_2 \tau_i}(\sigma) = \sigma_i$  dla  $i = 1, 2$ . Ostatnia równość pokazuje także, że  $\pi(\sigma_1) = \pi(\sigma_2)$ .  $\square$

**Lemat 1.7.** *Niech  $A$  będzie symplecjajalnym assembly systemem nad kompleksem symplecjajalnym  $K$ , zaś  $Y$  będzie  $A$ -ilorazem. Wtedy na  $Y$  można w naturalny sposób zadać strukturę kompleksu symplecjajalnego.*

*Dowód.* Wiemy, że dla każdego  $\tau \subset K$  przestrzeń  $Y_\tau$  wyposażona jest w wyróżnioną rodzinę  $S(Y_\tau)$  geometrycznych sympleksów; stąd przestrzeń  $\coprod_{\tau \subset K} Y_\tau$  wyposażona jest w rodzinę  $\mathcal{Y} = \bigcup_{\tau \subset K} S(Y_\tau)$ .

Przez geometryczne sympleksy w  $A$ -ilorazie będziemy rozumieć podzbiory postaci  $\pi(\sigma)$ , gdzie  $\pi : \coprod_{\tau \subset K} Y_\tau \rightarrow Y$  jest odwzorowaniem ilorazowym, a  $\sigma \in \mathcal{Y}$ . Odwzorowaniami charakterystycznymi dla tychże są złożenia  $\pi \circ \phi_\sigma$ , gdzie  $\phi_\sigma : \Delta^i \rightarrow \sigma$  jest odwzorowaniem charakterystycznym dla  $\sigma$  pochodzącym z zadania struktury kompleksu symplecjajalnego na każdym z  $Y_\tau$ . Oznaczmy  $S(Y) = \{(\pi(\sigma), \pi \circ \phi_\sigma)\}_{\sigma \in \mathcal{Y}}$ . Poniższe obserwacje weryfikują poprawność takiej definicji.

**Obserwacja 1.8.** *Dla każdego  $\sigma \in \mathcal{Y}$  odwzorowanie  $\pi \circ \phi_\sigma : \Delta^i \rightarrow \pi(\sigma)$  jest homeomorfizmem.*

*Dowód (Obserwacji 1.8).* Istotnie,  $\phi_\sigma : \Delta^i \rightarrow \sigma$  jest homeomorfizmem z założenia. Dalej, z Faktu 1.4 otrzymujemy, że przyporządkowanie  $\sigma \mapsto \pi(\sigma)$  jest 1-1. Jako odwzorowanie ilorazowe  $\pi$  jest też oczywiście surjektywne. Stąd przyporządkowanie  $\sigma \mapsto \pi(\sigma)$  jest bijekcją z przestrzeni zwartej w przestrzeń Hausdorffa, a zatem jest homeomorfizmem. Wynika z tego, że złożenie  $\pi \circ \phi_\sigma : \Delta^i \rightarrow \pi(\sigma)$  także jest homeomorfizmem.  $\square$

**Obserwacja 1.9.** *Każdy geometryczny sympleks w  $Y$  wyposażony jest w jedyne odwzorowanie charakterystyczne.*

*Dowód (Obserwacji 1.9).* Jeśli  $\pi(\sigma_1) = \pi(\sigma_2)$  dla pewnych  $\sigma_1 \subset Y_\rho$ ,  $\sigma_2 \subset Y_\tau$ , to z Lematu 1.6 otrzymujemy, że w  $K$  zachodzi  $\rho \cap \tau \neq \emptyset$ . Niech sympleks  $\nu \subset Y_{\rho \cap \tau}$  skleja  $\sigma_1$  oraz  $\sigma_2$ . Oznaczmy  $\rho \cap \tau = \varsigma$ . Niech  $\phi_\nu : \Delta^i \rightarrow \nu$  będzie odwzorowaniem charakterystycznym dla  $\nu$  pochodzącym z zadania struktury kompleksu symplecjajalnego na  $Y_\varsigma$ , analogicznie  $\phi_{\sigma_1} : \Delta^i \rightarrow \sigma_1$  oraz  $\phi_{\sigma_2} : \Delta^i \rightarrow \sigma_2$ .



Zauważmy, że  $i_{\varsigma\rho} \circ \phi_\nu = \phi_{\sigma_1} \circ \phi_{\sigma_1}^{-1} \circ i_{\varsigma\rho} \circ \phi_\nu$  i podobnie  $i_{\varsigma\tau} \circ \phi_\nu = \phi_{\sigma_2} \circ \phi_{\sigma_2}^{-1} \circ i_{\varsigma\tau} \circ \phi_\nu$ . Otrzymujemy przemienny diagram:

$$\begin{array}{ccccc}
\sigma_2 & \xleftarrow{i_{\varsigma\tau}} & \nu & \xrightarrow{i_{\varsigma\rho}} & \sigma_1 \\
\uparrow \phi_{\sigma_2} & & \uparrow \phi_\nu & & \uparrow \phi_{\sigma_1} \\
\Delta^i & \xleftarrow{\phi_{\sigma_2}^{-1} \circ i_{\varsigma\tau} \circ \phi_\nu} & \Delta^i & \xrightarrow{\phi_{\sigma_1}^{-1} \circ i_{\varsigma\rho} \circ \phi_\nu} & \Delta^i
\end{array} \tag{5}$$

Oznaczmy dla przejrzystości dalszego rozumowania  $\lambda_1 := (\phi_{\sigma_1}^{-1} \circ i_{\varsigma\tau} \circ \phi_\nu)^{-1}$  oraz  $\lambda_2 := (\phi_{\sigma_2}^{-1} \circ i_{\varsigma\rho} \circ \phi_\nu)^{-1}$ . Zauważmy, że  $\lambda_i, i = 1, 2$  są afinicznymi izomorfizmami  $\Delta^i$ . Mamy zatem  $\pi \circ \phi_{\sigma_i} = \pi \circ \phi_\nu \circ \lambda_i, i = 1, 2$ . Pozostaje zauważyć, że odwzorowania charakterystyczne dla  $\sigma_1, \sigma_2$  różnią się o afiniczny izomorfizm  $\Delta^i$ . Ale mamy

$$\pi \circ \phi_{\sigma_1} = \pi \circ \phi_\nu \circ \lambda_1 \text{ oraz } \pi \circ \phi_{\sigma_2} = \pi \circ \phi_\nu \circ \lambda_2,$$

czyli dla  $\lambda : \Delta^i \rightarrow \Delta^i, \lambda := \lambda_2^{-1} \circ \lambda_1$  otrzymujemy, że  $\pi \circ \phi_{\sigma_1} = \pi \circ \phi_{\sigma_2} \circ \lambda$ . Stąd otrzymujemy jedność odwzorowań charakterystycznych. To kończy dowód Obserwacji 1.9. □

Pozostaje sprawdzić, że rodzina  $S(Y)$  spełnia warunki

1.  $S(Y)$  jest zamknięta na branie ścian,
2. każdy punkt  $Y$  należy do wnętrza dokładnie jednego sympleksu z  $S(Y)$ ,
3. przecięcie dwóch sympleksów z  $S(Y)$  jest puste lub jest ścianą każdego z nich,
4. dla każdego sympleksu  $\sigma \subset Y$  suma wewnątrz wszystkich sympleksów w  $Y$  zawierających  $\sigma$  jest otwartym podzbiorem  $Y$ .

*Ad. 1.* Wynika to z faktu, że dla każdego  $\tau$  rodzina  $S(Y_\tau)$  jest zamknięta na branie ścian, a  $\pi : \sigma \rightarrow \pi(\sigma)$  jest homeomorfizmem dla każdego  $\sigma \in \mathcal{Y}$ .

*Ad. 2.* Niech  $p \in Y$ . Załóżmy nie wprost, że  $p \in \text{int}(\pi(\sigma)), p \in \text{int}(\pi(\rho))$ , przy czym  $\pi(\sigma) \neq \pi(\rho), \sigma \subset Y_{\tau_1}, \rho \subset Y_{\tau_2}$  dla pewnych  $\tau_1, \tau_2 \subset K$ . Wtedy  $p = \pi(q), p = \pi(r)$  dla pewnych  $q \in Y_{\tau_1}, r \in Y_{\tau_2}$ . Ponieważ  $Y_{\tau_1}, Y_{\tau_2}$  są kompleksami symplecjajnymi,  $q \in \text{int}(\sigma), r \in \text{int}(\rho)$  dla jednoznacznie określonych sympleksów  $\sigma$  oraz  $\rho$ . Wówczas z Lematu 1.6 otrzymujemy, że ponieważ  $q \sim r$ , zachodzi równość  $\pi(\sigma) = \pi(\rho)$ , co stoi w sprzeczności z założeniem.

*Ad. 3.* Niech  $\pi(\tau_1), \pi(\tau_2) \in S(Y)$ . Wtedy  $\tau_1 \in Y_{\sigma_1}, \tau_2 \in Y_{\sigma_2}$  dla pewnych  $\sigma_1, \sigma_2 \subset K$ . Załóżmy, że  $\pi(\tau_1) \cap \pi(\tau_2) \neq \emptyset$  i niech  $p \in \pi(\tau_1) \cap \pi(\tau_2)$ . Wtedy istnieją dwa punkty  $a_1 \in Y_{\sigma_1}, a_2 \in Y_{\sigma_2}$  takie, że  $\pi(a_1) = p = \pi(a_2)$ . Stąd  $p \in Y_{\sigma_1 \cap \sigma_2}$ . Ponieważ  $Y_{\sigma_1 \cap \sigma_2}$  jest kompleksem symplecjajnym,  $p$  leży we wnętrzu dokładnie jednego sympleksu:  $p \in \text{int}(\sigma)$  dla pewnego  $\sigma \in Y_{\sigma_1 \cap \sigma_2}$ . Używając ponownie drugiego faktu z dowodu Lematu

1.6 stwierdzamy, że  $i_{\sigma_1 \cap \sigma_2 \sigma_i}(\sigma)$  jest ścianą sympleksu  $\tau_i, i = 1, 2$ , ponieważ  $i_{\sigma_1 \cap \sigma_2 \sigma_i}$  są odwzorowaniami symplecjajnymi. Ponieważ  $\pi \circ i_{\sigma_1 \cap \sigma_2 \sigma_i} = \pi|_{Y_{\sigma_1 \cap \sigma_2}}$ , otrzymujemy, że  $\pi(i_{\sigma_1 \cap \sigma_2 \sigma_1}(\sigma)) \cap \pi(i_{\sigma_1 \cap \sigma_2 \sigma_2}(\sigma)) = \pi(\sigma) \cap \pi(\sigma) = \pi(\sigma)$  jest ścianą w  $\pi(\tau_i)$ .

*Ad. 4.* Ustalmy sympleks  $\sigma \subset Y$ . Rozważmy zbiory  $St_Y(\sigma) = \{\tau \subset Y : \sigma \subset \tau\}$  oraz  $U_\sigma = \bigcup_{\tau \in St_Y(\sigma)} \text{int}(\tau)$ . Chcemy pokazać, że zbiór  $\pi^{-1}(U_\sigma)$  jest otwarty w  $\coprod_{\rho \subset K} Y_\rho$ .

Wystarczy pokazać, że dla każdego  $\rho \subset K$  zbiór  $\pi^{-1}(U_\sigma) \cap Y_\rho$  jest otwarty w  $Y_\rho$ . W tym celu zauważmy, że dla każdego sympleksu  $\tau \subset Y$  zbiór  $\pi^{-1}(\tau) \cap Y_\rho = \pi_{|Y_\rho}^{-1}(\tau)$ , o ile jest niepusty, jest pojedynczym sympleksem w  $Y_\rho$ . Istotnie, łatwo wynika to z Faktu 1.4 oraz uzasadnionej już wyżej własności 2 dla  $Y$ .

W szczególności otrzymujemy, że  $\pi^{-1}(\sigma) \cap Y_\rho$  jest sympleksem w  $Y_\rho$ . Ponieważ  $Y_\rho$  jest kompleksem symplecjajnym, zbiór  $U = \bigcup_{\tau \in St_{Y_\rho}(\pi^{-1}(\sigma))} \text{int}(\tau)$  jest otwartym podzbiorem

$Y_\rho$ . Dalej, zauważmy, że  $U = \pi^{-1}(U_\sigma) \cap Y_\rho$ :

- $\subset$ : ustalmy punkt  $p \in \text{int}(\tau)$ , gdzie  $\tau$  jest sympleksem w  $Y_\rho$  oraz  $\pi^{-1}(\sigma) \subset \tau$ . Wówczas  $\pi(p) \in \pi(\text{int}(\tau)) = \text{int}(\pi(\tau))$ , przy czym  $\sigma \subset \pi(\tau)$ , ponieważ  $\pi^{-1}(\sigma) \subset \tau$ .
- $\supset$ : Ustalmy punkt  $q \in Y_\rho$  taki, że  $q \in \pi^{-1}(\text{int}(\tau))$ , gdzie  $\tau \subset Y$  oraz  $\sigma \subset \tau$ . Chcemy, by dla pewnego sympleksu  $\theta \subset Y_\rho$  zachodziło  $q \in \text{int}(\theta)$  oraz  $\pi_{|Y_\rho}^{-1}(\sigma) \subset \theta$ . Wystarczy wziąć  $\theta := \pi^{-1}(\tau) \cap Y_\rho$ .

Uzasadniliśmy więc, że dla każdego  $\rho \subset K$  zbiór  $\pi^{-1}(U_\sigma) \cap Y_\rho$  jest otwarty w  $Y_\rho$ . To kończy uzasadnienie punktu 4 oraz dowód Lematu 1.7. □

W końcowej części tego rozdziału omówimy jeszcze przydatną konstrukcję odwzorowań ciągłych (odpowiednio: symplecjajnych), których dziedziną jest  $\mathcal{A}$ -iloraz  $Y$  (odpowiednio:  $A$ -iloraz gdy  $A$  jest symplecjajnym assembly systemem).

**Lemat 1.10.** *Niech będzie dany assembly system  $\mathcal{A}$  nad pewnym kompleksem symplecjajnym  $K$ , dowolna przestrzeń topologiczna  $Z$  oraz niech  $Y$  będzie  $\mathcal{A}$ -ilorazem. Jeśli dla każdego  $\tau \in S(K)$  dane jest odwzorowanie ciągłe  $f_\tau : Y_\tau \rightarrow Z$  oraz zachodzi następujący warunek zgodności: dla  $\rho \subset \tau \in S(K)$  diagram*

$$\begin{array}{ccc}
 Y_\rho & & \\
 \downarrow i_{\rho\tau} & \searrow f_\rho & \\
 & & Z \\
 & \nearrow f_\tau & \\
 Y_\tau & & 
 \end{array} \tag{6}$$

jest przemienny, to otrzymujemy dobrze określone, indukowane z odwzorowań  $f_\tau$  ciągłe odwzorowanie  $F : Y \rightarrow Z$  domykające poniższy diagram:

$$\begin{array}{ccc}
\coprod_{\tau \subset Z} Y_\tau & & \\
\pi \downarrow & \searrow f & \\
Y & \dashrightarrow F & Z
\end{array} \tag{7}$$

Ponadto gdy  $\mathcal{A}$  jest symplecjalnym assembly systemem,  $Z$  jest kompleksem symplecjalnym oraz dla każdego  $\tau \in S(K)$  odwzorowanie  $f_\tau : Y_\tau \rightarrow Z$  jest symplecjalne, to odwzorowanie  $F$  też jest symplecjalne.

*Dowód.* Mamy naturalne odwzorowanie  $f : \coprod_{\tau \subset Z} Y_\tau \rightarrow Z$  zadane przez  $f(p) = f_\rho(p)$  gdzie  $p \in Y_\rho$ . Ustalmy  $p, q \in \coprod_{\tau \subset Z} Y_\tau, p \in Y_\rho, q \in Y_\tau$  takie, że  $p \sim q$  w  $Y$ . Z Lematu 1.3 istnieje punkt  $r \in Y_{\rho \cap \tau}$ , który skleja  $p$  oraz  $q$ . Zauważmy, że wtedy  $f(p) = f(q)$ :

$$f(q) = f_\tau(q) = f_\tau(i_{\rho \cap \tau}(r)) = f_{\rho \cap \tau}(r) = f_\rho(i_{\rho \cap \tau}(r)) = f_\rho(p) = f(p) \tag{8}$$

Z uniwersalności przestrzeni ilorazowej istnieje jedyne odwzorowanie ciągłe  $F : Y \rightarrow Z$  takie, że  $F \circ \pi = f$ .

Udowodnimy teraz drugą część lematu dotyczącą sytuacji symplecjalnej. Ustalmy sympleks  $\sigma \subset Y$ . Chcemy, by istniał sympleks  $\tau \subset Z$  taki, że obcięcie  $F|_\sigma$  jest odwzorowaniem afinicznym na  $\tau$  (po wyrażeniu  $F|_\sigma$  w terminach odwzorowań charakterystycznych dla  $\sigma$  oraz  $\tau$ ). Niech  $\pi \circ \phi_\sigma$  będzie odwzorowaniem charakterystycznym dla  $\sigma$ . Korzystając z rozumowania w pierwszej części dowodu, widzimy, że  $F|_\sigma = F|_\sigma \circ \pi \circ \phi_\sigma = f|_\sigma \circ \phi_\sigma$ . Ponieważ  $f|_\sigma$  jest odwzorowaniem symplecjalnym, istnieje  $\tau \subset Z$  taki, że  $\psi_\tau^{-1} \circ f|_\sigma \circ \phi_\sigma$  jest surjekcją i odwzorowaniem afinicznym, gdzie  $\psi_\tau : \Delta^{\dim(\tau)} \rightarrow \tau$  jest odwzorowaniem charakterystycznym dla  $\tau$ . Znaleźliśmy zatem sympleks  $\tau \subset Z$  o żądanych własnościach, co pokazuje, że  $F$  jest symplecjalne.  $\square$

## 2 Symplecjalny assembly system wyznaczony przez reguły zastępowania i etykietowanie

W tej sekcji wprowadzimy pojęcia, które pozwolą w wygodny oraz ścisły sposób opisać konstrukcję kompaktu Markowa.

### 2.1 Dobra rodzina sympleksów

**Definicja 2.1.** Dobrą rodziną sympleksów nazwiemy parę  $\mathcal{D} = [\Sigma, \{z_\beta\}_{\beta \in B}]$ , gdzie

- $\Sigma$  to zbiór sympleksów (niekoniecznie skończony);
- $B$  to zbiór wszystkich właściwych ścian we wszystkich sympleksach  $\sigma \in \Sigma$
- Dla każdego sympleksu  $\sigma \in \Sigma$  oraz dla każdej właściwej ściany  $\beta \subset \sigma$ ,  $z_\beta : \sigma_\beta \rightarrow \sigma$  jest symplecjalnym włożeniem na ścianę  $\beta$  dla pewnego  $\sigma_\beta \in \Sigma$ .

Wymagamy jedyności odwzorowania  $z_\beta$  dla ustalonego  $\beta \in B$  oraz zamkniętości rodziny  $\{z_\beta\}_{\beta \in B}$  na składanie.

**Przykład 2.2.** Rozważmy rodzinę sympleksów  $\mathcal{D}_{\leq n}$ , zdefiniowaną następująco: zbiór  $\Sigma = \{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n\}$  zawiera po jednym sympleksie wymiarów od 0 do  $n$ , przy czym każdy sympleks jest zaopatrzony w porządek wierzchołków. Rodzinę  $\{z_\beta\}_{\beta \in B}$  określamy zaś w następujący sposób: dla każdego  $k \leq n$  oraz  $j$ -wymiarowej ściany  $\beta \subset \sigma_k$  kładziemy  $(\sigma_k)_\beta = \sigma_j$ ; wówczas za  $z_\beta : \sigma_\beta \rightarrow \beta$  przyjmujemy jedyny izomorfizm afiniczny  $\sigma_j \rightarrow \beta$  respektujący przyjęty porządek wierzchołków. Jasne jest, że tak określona rodzina  $\mathcal{D}_{\leq n}$  jest dobrą rodziną sympleksów.

**Przykład 2.3.** Niech  $K$  będzie dowolnym kompleksem symplecjajalnym. Rozważmy rodzinę  $\mathcal{D}_K$ , w której  $\Sigma = S(K)$ , zaś dla  $\beta, \sigma \in S(K)$  takich, że  $\beta \subset \sigma$  kładziemy  $\sigma_\beta = \beta$  oraz  $z_\beta = id_\beta$ . Naturalnie jest to dobra rodzina sympleksów.

## 2.2 Reguły zastępowania

Niech dana będzie dobra rodzina sympleksów  $\mathcal{D} = [\Sigma, \{z_\beta\}_{\beta \in B}]$ .

**Definicja 2.4.** *Regułą zastępowania* dla  $\sigma \in \Sigma$  nazwiemy parę  $(P_\sigma, \pi_\sigma)$ , taką, że

- $P_\sigma$  jest skończonym kompleksem symplecjajalnym,
- $\sigma' \xleftarrow{\pi_\sigma} P_\sigma$  jest odwzorowaniem symplecjajalnym na pierwsze podrozbiecie barycentryczne  $\sigma'$  sympleksu  $\sigma$ .

*Rodziną reguł zastępowania dla  $\mathcal{D}$*  nazwiemy taką rodzinę reguł zastępowania  $\{(P_\sigma, \pi_\sigma) : \sigma \in \Sigma\}$ , w której każdy sympleks ze zbioru  $\Sigma$  zaopatrzony jest w dokładnie jedną regułę zastępowania, a ponadto dana jest rodzina *odwzorowań łączących*  $\{P_{z_\beta} : \beta \in B\}$  taka, że dla  $\sigma \in \Sigma$  oraz właściwej ściany  $\beta \subset \sigma$  (zaopatrzonej w odwzorowanie  $z_\beta : \sigma_\beta \rightarrow \sigma$  dla pewnego  $\sigma_\beta \in \Sigma$ ) odwzorowanie  $P_{z_\beta} : P_{\sigma_\beta} \rightarrow P_\sigma$  jest symplecjajalnym włożeniem.

Zakładamy, że odwzorowania z rodziny  $\{P_{z_\beta}\}$  spełniają następujące warunki:

1. Dla reguł zastępowania  $(P_\sigma, \pi_\sigma)$  oraz  $(P_{\sigma_\beta}, \pi_{\sigma_\beta})$  dla sympleksów  $\sigma_\beta$  oraz  $\sigma$  odpowiednio, zachodzi  $\pi_\sigma \circ P_{z_\beta} = z'_\beta \circ \pi_{\sigma_\beta}$ , czyli diagram

$$\begin{array}{ccc} \sigma'_\beta & \xleftarrow{\pi_{\sigma_\beta}} & P_{\sigma_\beta} \\ z'_\beta \downarrow & & \downarrow P_{z_\beta} \\ \sigma' & \xleftarrow{\pi_\sigma} & P_\sigma \end{array} \quad (9)$$

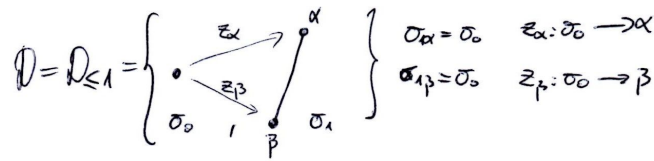
jest przemienny, gdzie  $z'_\beta$  to indukowane przez  $z_\beta$  odwzorowanie symplecjajalne między barycentrycznymi podrozbieciami sympleksów  $\sigma_\beta$  oraz  $\sigma$ . Żądamy, aby zachodziła równość  $\pi_\sigma^{-1}(\beta) = P_{z_\beta}(P_{\sigma_\beta})$ .

2. Dla sympleksów  $\beta \subset \sigma$  oraz  $\alpha \subset \sigma_\beta$ , dla których (jako elementów dobrej rodziny  $\mathcal{D}$ ) zachodzi  $z_\beta \circ z_\alpha = z_{z_\beta(\alpha)}$ , zachodzi również  $P_{z_\beta} \circ P_{z_\alpha} = P_{z_{z_\beta(\alpha)}}$ .

Rodzinę reguł zastępowania dla dobrej rodziny  $\mathcal{D}$  będziemy oznaczać przez  $\mathcal{R}_{\mathcal{D}}$ . Gdzie nie prowadzi to do niejednoznaczności, będziemy omijać indeks i pisać po prostu  $\mathcal{R}$ . Domyślnie  $\mathcal{R}$  będzie zestawem danych  $\left[ \{(P_{\sigma}, \pi_{\sigma}) : \sigma \in \Sigma\}, \{P_{z_{\beta}} : \beta \in B\} \right]$  postaci opisanej powyżej.

**Uwaga 2.5.** Dla jednej dobrej rodziny  $\mathcal{D}$  mogą istnieć różne rodziny reguł zastępowania.

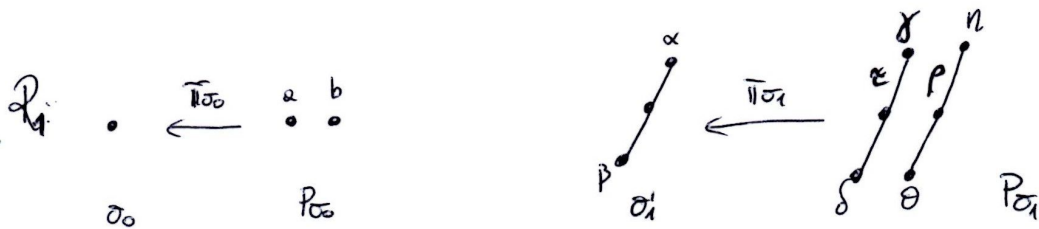
**Przykład 2.6.** Rozważmy dobrą rodzinę  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\leq 1}$  jak w Przykładzie 2.2, w której  $\Sigma = \{\sigma_0, \sigma_1\}, B = \{\alpha, \beta\}$ . (Rysunek 1).



Rysunek 1: Dobra rodzina  $\mathcal{D}_{\leq 1}$

Rozważmy dwie rodziny  $\mathcal{R}_1$  oraz  $\mathcal{R}_2$  reguł zastępowania dla  $\mathcal{D}$ . Za rodzinę  $\mathcal{R}_1$  przyjmijmy następujący zestaw reguł (Rysunek 2):

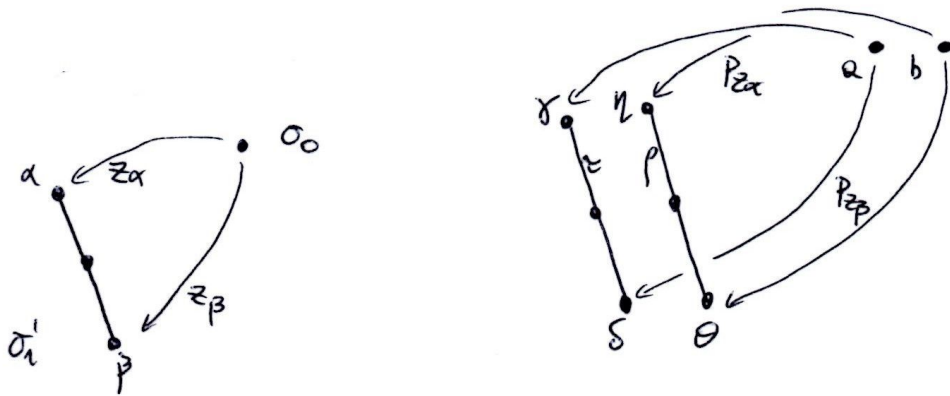
- określamy  $P_{\sigma_0}$  jako przestrzeń złożoną z dwóch 0-sympleksów  $a$  oraz  $b$ , zaś  $\pi_{\sigma_0}$  jako odwzorowanie przeprowadzające sympleksy  $a$  oraz  $b$  w  $\sigma_0$ ;
- $P_{\sigma_1}$  składa się z dwóch 1-sympleksów  $\tau$  oraz  $\rho$ , a odwzorowanie  $\pi_{\sigma_1}$  jest symplijalnym odwzorowaniem przedłużającym odwzorowanie przyporządkowujące wierzchołki  $\gamma$  i  $\delta$  sympleksu  $\tau$  wierzchołkom  $\alpha$  i  $\beta$  odpowiednio, oraz  $\eta$  i  $\theta$  sympleksu  $\rho$  wierzchołkom sympleksu  $\alpha$  i  $\beta$  odpowiednio.



Rysunek 2: Rodzina  $\mathcal{R}_1$  dla  $\mathcal{D}_{\leq 1}$

Opiszemy jeszcze odwzorowania łączące występujące w Definicji 2.4 (Rysunek 3).

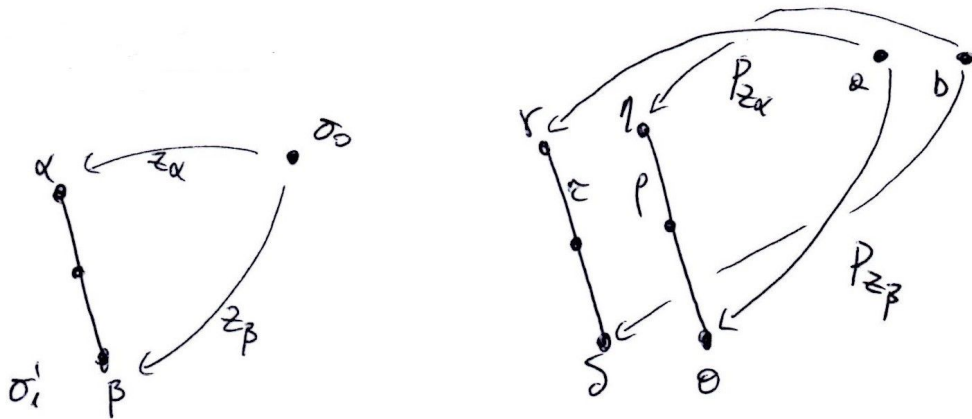
- Dla odwzorowania  $z_{\alpha}$  określamy włożenie  $P_{z_{\alpha}}$  przyporządkowujące sympleks  $a$  ścianie  $\gamma$ , zaś sympleks  $b$  ścianie  $\eta$ ,



Rysunek 3: Odwzorowania łączące dla  $\mathcal{R}_1$

- dla odwzorowania  $z_\beta$  określamy włożenie  $P_{z_\beta}$  przyporządkowujące sympleks  $a$  ścianie  $\delta$ , zaś sympleks  $b$  ścianie  $\theta$ .

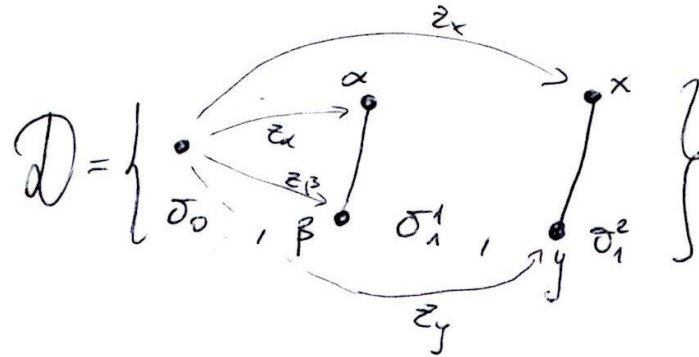
Za rodzinę reguł  $\mathcal{R}_2$  przyjmujemy ten sam zestaw reguł, co w rodzinie  $\mathcal{R}_1$ , zmieniając jedynie włożenie  $P_{z_\beta}$ , które w tym przypadku przyporządkowuje sympleks  $a$  ścianie  $\theta$ , zaś sympleks  $b$  ścianie  $\delta$  (Rysunek 4).



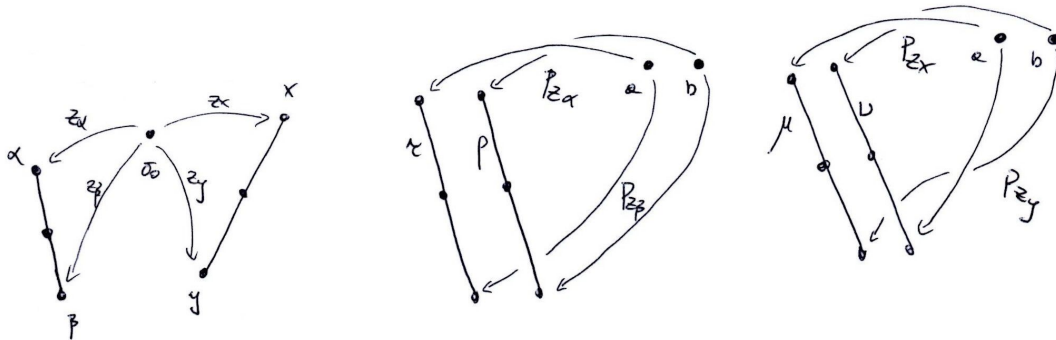
Rysunek 4: Odwzorowania łączące dla  $\mathcal{R}_2$

Jak zobaczymy później, rodziny  $\mathcal{R}_1$  oraz  $\mathcal{R}_2$  dla  $\mathcal{D}_{\leq 1}$  prowadzą do istotnie różnych rezultatów w konstrukcjach kompaktów Markowa.

**Przykład 2.7.** Rozważmy dobrą rodzinę  $\mathcal{D}$ , w której zbiór  $\Sigma$  składa się z jednego 0-sympleksu  $\sigma_0$  oraz dwóch 1-sympleksów  $\sigma_1^1$  oraz  $\sigma_1^2$ . Ściany sympleksu  $\sigma_1^1$  oznaczmy przez  $\alpha$  oraz  $\beta$ , zaś sympleksu  $\sigma_1^2$  przez  $x$  oraz  $y$ . Każde odwzorowanie z rodziny  $\{z_\beta\}$  przyporządkowuje  $\sigma_0$  odpowiedniej ścianie w 1-sympleksach  $\sigma_1^1$  oraz  $\sigma_1^2$  (Rysunek 5).



Rysunek 5: Dobra rodzina  $\mathcal{D}$  dla Przykładu 2.7



Rysunek 6: Odwzorowania łączące dla rodziny  $\mathcal{R}$  z Przykładu 2.7

Rodzinę  $\mathcal{R}$  dla  $\mathcal{D}$  definiujemy podobnie jak w poprzednim przykładzie, przyporządkowując każdemu sympleksowi z  $\mathcal{D}$  dwa sympleksy tego samego wymiaru. Oznaczmy sympleksy przyporządkowane sympleksowi  $\sigma_1^1$  przez  $\tau$  i  $\rho$ , zaś sympleksy przyporządkowane sympleksowi  $\sigma_1^2$  przez  $\mu$  i  $\nu$ . Odwzorowania  $\{\pi_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma}$  kolapsują powielone sympleksy w ich wyjściowe postaci jak w Przykładzie 2.6. Odwzorowania łączące dla włożeń  $z_\alpha$  oraz  $z_\beta$  definiujemy jak w rodzinie  $\mathcal{R}_1$  z poprzedniego przykładu, zaś dla włożeń  $z_x$  oraz  $z_y$  jak w rodzinie  $\mathcal{R}_2$  (por. Rysunek 6)

Powyższy przykład jest ścisłym i formalnym zapisem intuicyjnej idei przedstawionej w Przykładzie 3.5 w pracy Bell-Nagórko [BN17].

**Przykład 2.8.** Niech będą dane kompleksy symplecjalne  $K, L$  oraz surjektywne odwzorowanie symplecjalne  $h : L \rightarrow K'$  na podrozbicie barycentryczne  $K'$  kompleksu

$K$ . Określmy rodzinę reguł zastępowania  $\mathcal{R}_h$  dla dobrej rodziny sympleksów  $\mathcal{D}_K$  z Przykładu 2.3: dla  $\sigma \in \Sigma = S(K)$  kładziemy  $P_\sigma := h^{-1}(\sigma')$ , gdzie  $\sigma'$  jest podrozbiem barycentrycznym sympleksu  $\sigma$ , zaś  $\pi_\sigma := h|_{h^{-1}(\sigma')}$ . Naturalnie dla  $\beta \subset \sigma$  przyjmujemy  $z_\beta = id_\beta$  oraz  $P_{z_\beta} = id_{h^{-1}(\beta')} : h^{-1}(\beta') \rightarrow h^{-1}(\sigma')$ .

## 2.3 Etykietowanie

Mając już w ręku narzędzia i teorię opisującą zachowanie assembly systemu, chcemy budować rozmaite assembly systemy nad danym kompleksem symplecjajalnym  $X$ . W tym celu pokażemy, jak "etykietować" kompleksy symplecjajalne regułami zastępowania, by można było z nich utworzyć odpowiedni assembly system nad  $X$ .

**Definicja 2.9.** Dana jest dobra rodzina sympleksów  $\mathcal{D}$ .  $\mathcal{D}$ -etykietowaniem kompleksu symplecjajalnego  $X$  nazwiemy parę  $\Lambda = [\lambda, \{u_\sigma\}_{\sigma \in S(X)}]$  gdzie

- $\lambda : S(X) \rightarrow \Sigma$  jest mnogościowym przyporządkowaniem sympleksom z  $X$  sympleksów ze zbioru  $\Sigma$  tak, że dla każdego  $\sigma \in S(X)$  mamy  $\dim(\sigma) = \dim(\lambda(\sigma))$ ,
- dla każdego  $\sigma \in S(X)$  odwzorowanie  $u_\sigma : \sigma \rightarrow \lambda(\sigma)$  jest izomorfizmem sympleksów (utożsamienie sympleksu  $\sigma$  z sympleksem  $\lambda(\sigma)$  będącym jego etykietą), przy czym spełniony jest warunek

$$\text{dla } \rho \subset \tau \text{ zachodzi } \lambda(\rho) = \lambda(\tau)_{u_\tau(\rho)} \quad (10)$$

(symbol  $\lambda(\tau)_{u_\tau(\rho)}$  jest tu rozumiany w takim sensie jak symbol  $\sigma_\beta$  w sekcji 3:  $u_\tau(\rho)$  jest właściwą ścianą w  $\lambda(\tau)$  odpowiadającą ścianie  $\rho$  w  $\tau$ ). Ponadto żądamy, aby poniższy diagram był przemienny:

$$\begin{array}{ccc} \rho & \xrightarrow{\quad} & \tau \\ u_\rho \downarrow & & \downarrow u_\tau \\ \lambda(\rho) & \xrightarrow{z_{u_\tau(\rho)}} & \lambda(\tau) \end{array} \quad (11)$$

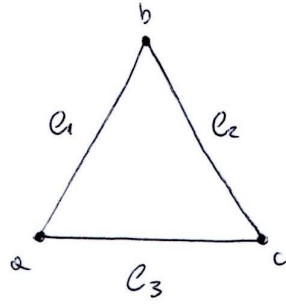
### Przykład 2.10.

Rozważmy kompleks symplecjajalny  $X$  złożony z trzech 1-sympleksów  $e_1, e_2$  oraz  $e_3$ , złączonych wzdłuż ścian w ten sposób, by otrzymać tylko trzy 0-sympleksy  $a, b$  oraz  $c$  (Rysunek 7).

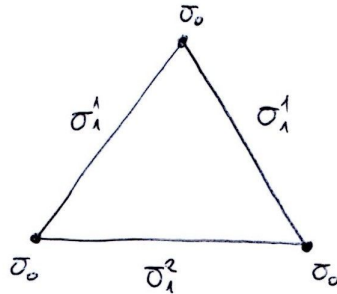
Rozważmy  $\mathcal{D}$ -etykietowanie dobrą rodziną  $\mathcal{D}$  z Przykładu 2.7 w następujący sposób: dla 0-sympleksów  $a, b, c$  określamy  $\lambda(a) = \lambda(b) = \lambda(c) = \sigma_0$ , zaś dla 1-sympleksów określamy  $\lambda(e_1) = \lambda(e_2) = \sigma_1^1$ ,  $\lambda(e_3) = \sigma_1^2$ . Dla każdego  $\sigma \in S(X)$  określamy  $u_\sigma : \sigma \rightarrow \lambda(\sigma)$  jako dowolny symplecjajalny izomorfizm między sympleksem  $\sigma$  a  $\lambda(\sigma)$ . W rezultacie możemy utożsamiać sympleksy z  $X$  z sympleksami z dobrej rodziny  $\mathcal{D}$  (Rysunek 8).

**Przykład 2.11.** Opiszemy tautologiczne etykietowanie kompleksu  $K$  dobrą rodziną  $\mathcal{D}_K$  jak w Przykładzie 2.3. Niech będzie dany kompleks symplecjajalny  $K$  oraz rodzina  $\mathcal{D}_K$ . Możemy wówczas rozważyć parę  $\Lambda = [id_{S(K)}, \{id_\sigma\}_{\sigma \in S(K)}]$ . Naturalnie jest to  $\mathcal{D}_K$ -etykietowanie kompleksu  $K$ .





Rysunek 7: Komplex X



Rysunek 8: Komplex X z  $\mathcal{D}$ -etykietowaniem

**Przykład 2.12.** Dla kompleksów symplecjalnych  $K, L$ , dobrej rodziny  $\mathcal{D}_K$  oraz  $h : L \rightarrow K$  - niezdegenerowanego odwzorowania symplecjalnego, mamy następujące  $\mathcal{D}_K$ -etykietowanie kompleksu  $L$ : dla  $\sigma \in S(L)$  przyjmujemy  $\lambda(\sigma) := h(\sigma)$  oraz  $u_\sigma := h|_\sigma$ .

## 2.4 Konstrukcja

W tej sekcji pokażemy, jak wykonać pierwszy krok w konstrukcji kompaktu Markowa. Wychodząc od dobrej rodziny  $\mathcal{D}$ , rodziny reguł zastępowania  $\mathcal{R}$  dla  $\mathcal{D}$  oraz  $\mathcal{D}$ -etykietowania pewnego kompleksu symplecjalnego  $X_0$  opiszemy symplecjalny assembly system  $A$  nad  $X_0$ ,  $A$ -iloraz  $Y$  oraz odwzorowanie symplecjalne  $Y \rightarrow X_0$ .

Niech będą dane dobra rodzina  $\mathcal{D} = [\Sigma, \{z_\beta\}_{\beta \in B}]$ , kompleks symplecjalny  $X_0$ ,  $\mathcal{D}$ -etykietowanie  $\Lambda = [\lambda, \{u_\sigma\}_{\sigma \in S(X_0)}]$  kompleksu  $X_0$ , oraz rodzina  $\mathcal{R} = [\{(P_\sigma, \pi_\sigma) : \sigma \in \Sigma\}, \{P_{z_\beta} : \beta \in B\}]$  reguł zastępowania dla  $\mathcal{D}$ . Z tych danych jesteśmy w stanie zadać strukturę symplecjalnego assembly systemu  $A = A(X_0, \mathcal{D}, \mathcal{R}, \Lambda)$  nad kompleksem  $X_0$ .

Istotnie, dla każdego sympleksu  $\tau \subset X_0$  możemy przyjąć

$$Y_\tau := P_{\lambda(\tau)} \tag{12}$$

gdzie  $\lambda(\tau)$  jest etykietą  $\tau$  względem etykietowania  $\Lambda$  (dla każdego  $\tau \subset X_0$  mamy osobną kopię kompleksu  $P_{\lambda(\tau)}$ ).

Zdefiniujemy teraz odwzorowania  $i_{\rho\tau}$  występujące w definicji assembly systemu. Niech  $\rho, \tau$  będą sympleksami w  $X_0$  takimi, że  $\rho \subset \tau$ , oraz niech  $\lambda(\rho), \lambda(\tau)$  będą ich etykietami względem etykietowania  $\Lambda$ . Z warunków (9) oraz (11) otrzymujemy, że poniższy diagram jest przemienny:

$$\begin{array}{ccccc}
\rho & \xrightarrow{u_\rho} & \lambda(\rho) & \longleftarrow & P_{\lambda(\rho)} \\
\downarrow & & \downarrow z_{u_\tau(\rho)} & & \downarrow P_{z_{u_\tau(\rho)}} \\
\tau & \xrightarrow{u_\tau} & \lambda(\tau) & \longleftarrow & P_{\lambda(\tau)}
\end{array} \quad (13)$$

gdzie  $P_{z_{u_\tau(\rho)}}$  jest symplecjajalnym włożeniem będącym odwzorowaniem łączącym z  $\mathcal{R}$ . Dla każdej pary sympleksów  $\rho \subset \tau$  w  $X_0$  definiujemy  $i_{\rho\tau} := P_{z_{u_\tau(\rho)}}$ .

Przekonajmy się, że tak zdefiniowane odwzorowania  $i_{\rho\tau}$  spełniają warunek złożenia. Ustalmy sympleks  $\nu \subset X_0$  taki, że  $\rho \subset \tau \subset \nu$ . Niech sympleks  $\lambda(\nu)$  będzie etykietą  $\nu$ . Z warunku (13) otrzymujemy przemienny diagram:

$$\begin{array}{ccccc}
\rho & \hookrightarrow & \tau & \hookrightarrow & \nu \\
u_\rho \downarrow & & \downarrow u_\tau & & \downarrow u_\nu \\
\lambda(\rho) & \xrightarrow{z_{u_\tau(\rho)}} & \lambda(\tau) & \xrightarrow{z_{u_\nu(\tau)}} & \lambda(\nu) \\
\pi_{\lambda(\rho)} \uparrow & & \uparrow \pi_{\lambda(\tau)} & & \uparrow \pi_{\lambda(\nu)} \\
P_{\lambda(\rho)} & \xrightarrow{P_{z_{u_\tau(\rho)}}} & P_{\lambda(\tau)} & \xrightarrow{P_{z_{u_\nu(\tau)}}} & P_{\lambda(\nu)}
\end{array} \quad (14)$$

Z warunku 2 nałożonego w Definicji 2.4 na rodzinę  $\{P_{z_\beta}\}$  odwzorowań łączących, otrzymujemy, że

$$i_{\rho\nu} = P_{z_{u_\nu(\rho)}} = P_{z_{u_\nu(\tau)}(u_\tau(\rho))} = P_{z_{u_\tau(\rho)}} \circ P_{z_{u_\nu(\tau)}} = i_{\tau\nu} \circ i_{\rho\tau}. \quad (15)$$

Wykażemy teraz, że jeśli dla pewnych sympleksów  $\tau_1, \tau_2, \sigma \subset X_0$  zachodzi  $\tau_1, \tau_2 \subset \sigma$ , to  $i_{\tau_1\sigma}(Y_{\tau_1}) \cap i_{\tau_2\sigma}(Y_{\tau_2}) = i_{\tau_1\cap\tau_2\sigma}(Y_{\tau_1\cap\tau_2})$ . Z warunku 1 z Definicji 2.4 otrzymujemy, że

$$\begin{aligned}
i_{\tau_1\sigma}(Y_{\tau_1}) \cap i_{\tau_2\sigma}(Y_{\tau_2}) &= P_{z_{u_\sigma(\tau_1)}}(P_{\lambda(\tau_1)}) \cap P_{z_{u_\sigma(\tau_2)}}(P_{\lambda(\tau_2)}) = \pi_{\lambda(\sigma)}^{-1}(\lambda(\tau_1)) \cap \pi_{\lambda(\sigma)}^{-1}(\lambda(\tau_2)) = \\
&= \pi_{\lambda(\sigma)}^{-1}(\lambda(\tau_1) \cap \lambda(\tau_2)) = P_{z_{u_\sigma(\tau_1\cap\tau_2)}}(P_{\lambda(\tau_1\cap\tau_2)}) = i_{\tau_1\cap\tau_2\sigma}(Y_{\tau_1\cap\tau_2}).
\end{aligned} \quad (16)$$

Definiujemy A-iloraz  $X_1$  wzorem

$$X_1 := \coprod_{\tau \subset X_0} Y_\tau / \sim \quad (17)$$

gdzie  $\sim$  jest relacją równoważności z Definicji 1.2 odpowiednią dla assembly systemu  $A(X_0, \mathcal{D}, \mathcal{R}, \Lambda)$ . Ponieważ spełnione są warunki Lematu 1.7,  $X_1$  jest kompleksem

symplicjalnym.

Rozumując jak w Lemacie 1.10, zdefiniujemy teraz niezbędne do opisanie konstrukcji kompaktów Markowa odwzorowanie symplecjajalne, którego dziedziną jest A-iloraz  $X_1$ , zaś obrazem barycentryczne podrozbicie  $X'_0$  kompleksu  $X_0$ .

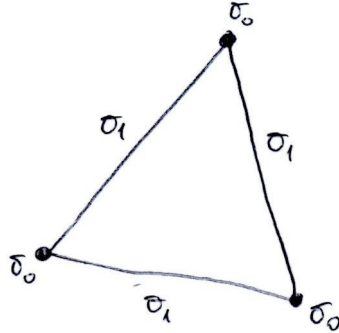
Dla każdego sympleksu  $\tau \in S(X_0)$  określmy  $f_\tau : Y_\tau \rightarrow X_0$  jako  $f_\tau := u_\tau^{-1} \circ \pi_{\lambda(\tau)}$ , gdzie przeciwdziedzinę  $\tau'$  tego odwzorowania traktujemy jako podzbiór w  $X'_0$  (podrozbiciu barycentrycznym kompleksu  $X_0$ ). Sprawdźmy, że tak określone odwzorowania  $f_\tau$  spełniają warunek zgodności opisany w Lemacie 1.10. Ustalmy sympleks  $\rho \in S(X_0)$  taki, że  $\rho \subset \tau$ . Mamy

$$f_\tau \circ i_{\rho\tau} = u_\tau^{-1} \circ \pi_{\lambda(\tau)} \circ P_{z_{u_\tau(\rho)}} \stackrel{(13)}{=} u_\tau^{-1} \circ z_{u_\tau(\rho)} \circ \pi_{\lambda(\rho)} \stackrel{(13)}{=} u_\rho^{-1} \circ \pi_{\lambda(\rho)} = f_\rho \quad (18)$$

Ponieważ  $A$  jest symplecjajalnym assembly systemem,  $X_0$  jest kompleksem symplecjajalnym oraz każde z odwzorowań  $f_\tau$  jest symplecjajalne, z Lematu 1.10 otrzymujemy dobrze określone, indukowane z odwzorowań  $f_\tau$  odwzorowanie symplecjajalne  $\Pi_0 : X_1 \rightarrow X'_0$ .

**Definicja 2.13.** Mając dany kompleks symplecjajalny  $X_0$  wraz z  $\mathcal{D}$ -etykietowaniem  $\Lambda$  oraz rodzinę  $\mathcal{R}$  reguł zastępowania dla  $\mathcal{D}$ , skonstruowaną jak wyżej przestrzeń  $X_1$  nazywamy  $(\Lambda, \mathcal{D}, \mathcal{R})$ -ilorazem nad  $X_0$ , a odwzorowanie  $\Pi_0$  nazywamy  $(\Lambda, \mathcal{D}, \mathcal{R})$ -odwzorowaniem z  $X_1$  do  $X_0$ .

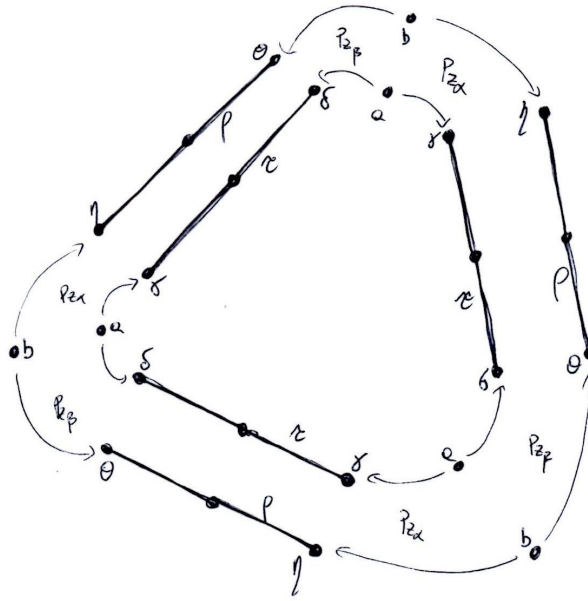
**Przykład 2.14.** Rozważmy kompleks symplecjajalny  $X$  jak w Przykładzie 2.10, z  $\mathcal{D}$ -etykietowaniem rodziną  $\mathcal{D}$  z Przykładu 2.6 (w narzucający się sposób) oraz rodziną reguł  $\mathcal{R}_1$  (Rysunek 9).



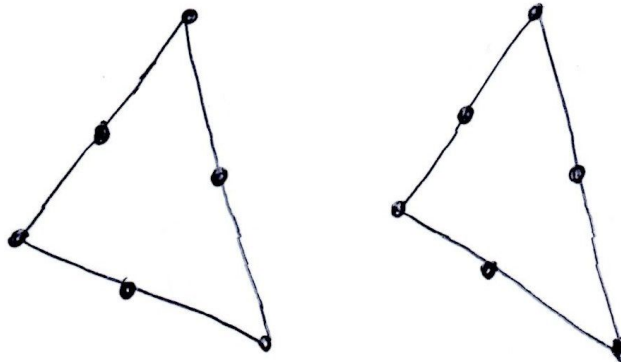
Rysunek 9: Kompleks  $X$

Tworzymy assembly system zgodnie z procedurą opisaną powyżej w tej sekcji. Na Rysunku 10 przedstawiono przestrzeń  $\coprod_{\tau \in X_0} Y_\tau$  z pomocniczo zaznaczonymi włożeniami  $\{P_{z_\beta}\}_{\beta \in B}$  pochodzącymi od odwzorowań łączących dla rodziny  $\mathcal{R}_1$ .

Otrzymujemy A-iloraz  $X_1$  będący dwoma rozłącznymi kopiami kompleksu  $X$  (Rysunek 11).  $(\Lambda, \mathcal{D}, \mathcal{R}_1)$ -odwzorowanie  $\Pi_0$  przeprowadza obie kopie z powrotem w kompleks  $X$ .



Rysunek 10: Przestrzeń  $\coprod_{\tau \subset X_0} Y_\tau$  z zaznaczonymi włożeniami pochodzącymi z  $\mathcal{R}_1$

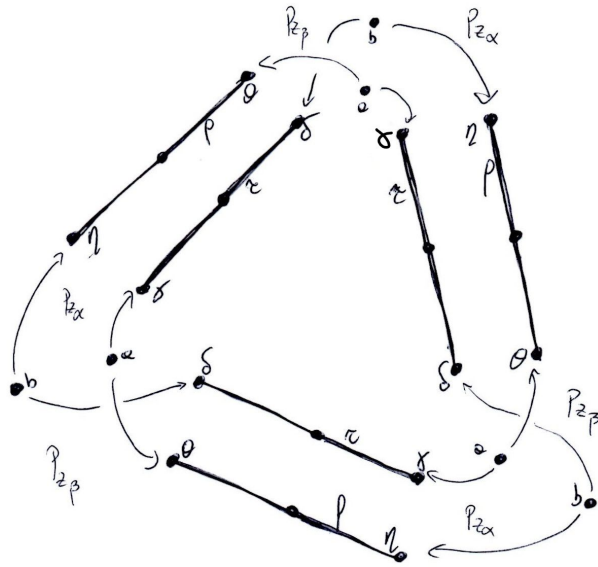


Rysunek 11:  $(\Lambda, \mathcal{D}, \mathcal{R}_1)$ -iloraz nad X

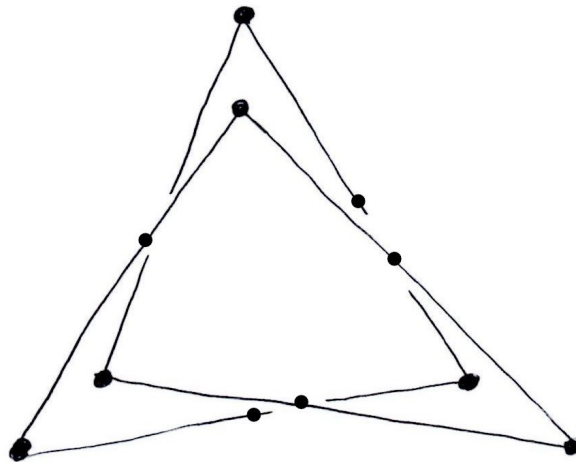
Przekonajmy się teraz, że  $\mathcal{D}$ -etykietowanie tego samego kompleksu X rodziną reguł  $\mathcal{R}_2$  skutkuje istotnie innym  $(\Lambda, \mathcal{D}, \mathcal{R})$ -ilorazem. Rozważmy zatem ten sam kompleks X i to samo  $\mathcal{D}$ -etykietowanie, lecz zamiast rodziny  $\mathcal{R}_1$  rozważmy rodzinę  $\mathcal{R}_2$  reguł zastępowania. Na rysunku 12 przedstawiono przestrzeń  $\coprod_{\tau \subset X_0} Y_\tau$  z pomocniczo zaznaczonymi włożeniami  $\{P_{z_\beta}\}_{\beta \in B}$  pochodzącymi od odwzorowań łączących dla rodziny  $\mathcal{R}_2$ .

Tym razem jako A-iloraz otrzymujemy spójny 1-wymiarowy kompleks (Rysunek 13).  $(\Lambda, \mathcal{D}, \mathcal{R}_2)$ -odwzorowanie  $\Pi_0$  przeprowadza  $X_1$  z powrotem w kompleks X.

**Przykład 2.15.** Niech będą dane kompleksy symplecjialne K, L oraz surjektywne odwzorowanie symplecjialne  $h : L \rightarrow K'$  na podrozbicie barycentryczne  $K'$  kompleksu K. Rozważmy tautologiczne  $\mathcal{D}_K$  - etykietowanie  $\Lambda$  kompleksu K jak w Przykładzie



Rysunek 12: Przestrzeń  $\coprod_{\tau \in X_0} Y_\tau$  z zaznaczonymi włożeniami pochodzącymi z  $\mathcal{R}_2$



Rysunek 13: A-iloraz  $X_1$

2.11 oraz rodzinę reguł zastępowania  $\mathcal{R}_h$  dla  $\mathcal{D}_K$  jak w Przykładzie 2.8. Wówczas  $(\Lambda, \mathcal{D}_K, \mathcal{R}_h)$ -iloraz nad  $K$  dla assembly systemu  $A(K, \mathcal{D}_K, \mathcal{R}_h, \Lambda)$  można utożsamić z kompleksem  $L$ , zaś  $(\Lambda, \mathcal{D}, \mathcal{R})$ -odwzorowanie  $\Pi_0$  pokrywa się z odwzorowaniem  $h$ .

### 3 Konstruktywna definicja kompaktu Markowa

Niech  $\mathcal{D}$  będzie dobrą rodziną sympleksów oraz niech  $\mathcal{R}$  będzie rodziną reguł zastępowania dla  $\mathcal{D}$ .

**Definicja 3.1.**  $\mathcal{D}$ -etykietowaniem rodziny  $\mathcal{R}$  nazwiemy  $\mathcal{D}$ -etykietowanie  $\Lambda_{\mathcal{R}} = [\lambda_{\mathcal{R}}, \{u_{\tau}^{\mathcal{R}}\}_{\tau \subset \coprod_{\sigma \in \Sigma} P_{\sigma}}]$  kompleksu  $\coprod_{\sigma \in \Sigma} P_{\sigma}$  takie, że dla dowolnych  $\sigma_{\beta}, \sigma \in \Sigma$  takich, że  $z_{\beta} : \sigma_{\beta} \rightarrow \sigma$  jest włożeniem z dobrej rodziny  $\mathcal{D}$  oraz dowolnych sympleksów  $\rho_1 \subset P_{\sigma_{\beta}}, \rho_2 \subset P_{\sigma}$  takich, że  $P_{z_{\beta}}(\rho_1) = \rho_2$  mamy  $\lambda_{\mathcal{R}}(\rho_1) = \lambda_{\mathcal{R}}(\rho_2)$  oraz diagram

$$\begin{array}{ccc}
 \rho_1 & \xrightarrow{P_{z_{\beta}}} & \rho_2 \\
 & \searrow^{u_{\rho_1}^{\mathcal{R}}} & \swarrow_{u_{\rho_2}^{\mathcal{R}}} \\
 & \lambda_{\mathcal{R}}(\rho_1) = \lambda_{\mathcal{R}}(\rho_2) & 
 \end{array} \tag{19}$$

jest przemienny.

**Lemat 3.2.** Niech będzie dany kompleks symplecjalny  $X_0$  wraz z  $\mathcal{D}$ -etykietowaniem  $\Lambda$  oraz rodzina  $\mathcal{R}$  reguł zastępowania dla  $\mathcal{D}$ . Wówczas  $\mathcal{D}$ -etykietowanie  $\Lambda_{\mathcal{R}}$  rodziny  $\mathcal{R}$  indukuje  $\mathcal{D}$ -etykietowanie  $(\Lambda, \mathcal{D}, \mathcal{R})$ -ilorazu  $X_1$ .

*Dowód.* Niech  $\pi : \coprod_{\tau \subset X_0} Y_{\tau} \rightarrow X_1$  będzie odwzorowaniem ilorazowym dla symplecjalnego  $A$ -ilorazu definiującego  $X_1$ . Pokażemy, że na  $X_1$  istnieje dokładnie jedno  $\mathcal{D}$ -etykietowanie  $\Lambda_1 = [\lambda_1, \{u_{\sigma}^1\}_{\sigma \in S(X_1)}]$  takie, że jeśli dla pewnych sympleksów  $\sigma_1 \subset \coprod_{\tau \subset X_0} Y_{\tau}$  oraz  $\sigma \subset Y$  zachodzi  $\pi(\sigma_1) = \sigma$ , to  $\lambda_1(\sigma) = \lambda_{\mathcal{R}}(\sigma_1)$  oraz  $u_{\sigma}^1 \circ \pi = u_{\sigma_1}^{\mathcal{R}}$ .

Jednoznaczność jest na podstawie powyższych warunków oczywista, uzasadnienia wymaga natomiast dobra określoność  $\Lambda_1$ .

Na początku zauważmy, że  $\mathcal{D}$ -etykietowanie  $\Lambda_{\mathcal{R}}$  rodziny  $\mathcal{R}$  w naturalny sposób indukuje  $\mathcal{D}$ -etykietowanie kompleksu  $\coprod_{\tau \subset X_0} Y_{\tau}$ , które także będziemy oznaczać przez  $\Lambda_{\mathcal{R}}$ . Zaczniemy od sprawdzenia, że jeśli dla pewnych  $\sigma_1, \sigma_2 \subset \coprod_{\tau \subset X_0} Y_{\tau}$  mamy  $\pi(\sigma_1) = \pi(\sigma_2) = \sigma$ , to  $\lambda_{\mathcal{R}}(\sigma_1) = \lambda_{\mathcal{R}}(\sigma_2)$ . Niech zatem  $\sigma_1 \subset Y_{\rho}, \sigma_2 \subset Y_{\tau}$  dla pewnych  $\rho, \tau \subset X_0$ ,  $\sigma_1 = i_{\rho \cap \tau \rho}(\varsigma), \sigma_2 = i_{\rho \cap \tau \tau}(\varsigma)$  gdzie sympleks  $\varsigma \subset Y_{\rho \cap \tau}$  skleja  $\sigma_1$  oraz  $\sigma_2$ . Mamy

$$\lambda_{\mathcal{R}}(\sigma_1) = \lambda_{\mathcal{R}}(i_{\rho \cap \tau \rho}(\varsigma)) = \lambda_{\mathcal{R}}(\varsigma) = \lambda_{\mathcal{R}}(i_{\rho \cap \tau \tau}(\varsigma)) = \lambda_{\mathcal{R}}(\sigma_2). \tag{20}$$

Istnieje zatem jedyne odwzorowanie  $\lambda_1 : S(X_1) \rightarrow \Sigma$  takie, że  $\lambda_1 \circ \pi = \lambda_{\mathcal{R}}$ .

Dalej, sprawdzimy dobrą określoność odwzorowań  $\{u_{\sigma}^1\}_{\sigma \in S(X_1)}$ . Chcemy, by dla sympleksów  $\sigma_1, \sigma_2$  jak wyżej zachodziło  $u_{\sigma_1}^{\mathcal{R}} = u_{\sigma_2}^{\mathcal{R}}$ . Korzystając z (19) otrzymujemy, że

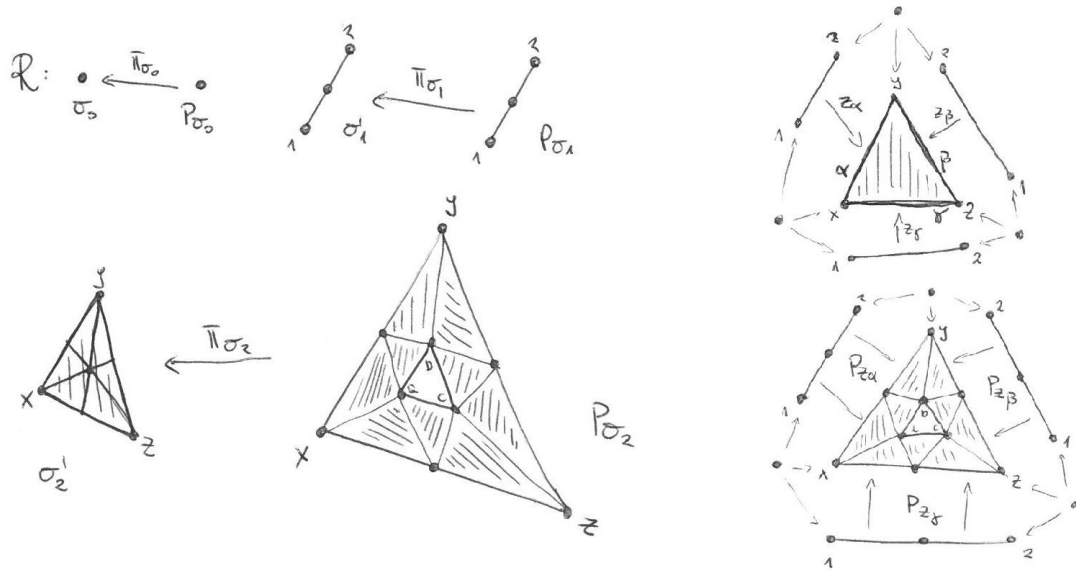
$$u_{\sigma_1}^{\mathcal{R}} = u_{\sigma_1}^{\mathcal{R}} \circ i_{\tau_1 \cap \tau_2 \tau_1} = u_{\varsigma}^{\mathcal{R}} = u_{\sigma_1}^{\mathcal{R}} \circ i_{\tau_1 \cap \tau_2 \tau_2} = u_{\sigma_2}^{\mathcal{R}} \tag{21}$$

□

**Przykład 3.3.** Rozważmy dobrą rodzinę  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\leq 2}$  jak w Przykładzie 2.2. Określmy rodzinę reguł zastępowania dla  $\mathcal{D}$  w sposób następujący (Rysunek 14):

- za  $P_{\sigma_0}$  przyjmijmy kopię sympleksu  $\sigma_0$ , zaś za  $\pi_{\sigma_0}$  przyjmijmy odwzorowanie przeprowadzającą ową kopię w  $\sigma_0$ ;

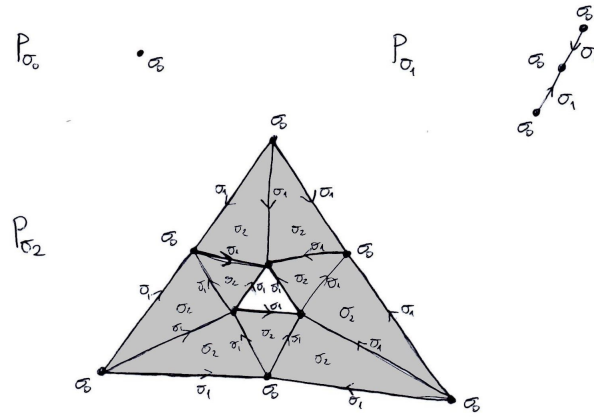
- za  $P_{\sigma_1}$  przyjmijmy kopię sympleksu  $\sigma_1$ , podrozbity barycentrycznie, zaś za  $\pi_{\sigma_1}$  przyjmijmy odwzorowanie przeprowadzającą ową kopię afinicznie w  $\sigma_1$ ;
- za  $P_{\sigma_2}$  przyjmijmy kopię sympleksu  $\sigma_2$ , z wnętrza którego usunięty został obszar w kształcie trójkąta; rozbijamy  $P_{\sigma_2}$  na 9 2-sympleksów, łącząc wierzchołki  $a, b, c$  owego trójkąta z wierzchołkami wyjściowego sympleksu oraz ze środkami jego ścian. Za  $\pi_{\sigma_2}$  przyjmijmy odwzorowanie przeprowadzające  $a, b, c$  w barycentrum  $\sigma_2$ , oryginalne wierzchołki kopii  $\sigma_2$  w wierzchołki  $\sigma_2$ ; przedłużamy to odwzorowanie afinicznie na całe  $P_{\sigma_2}$ ;
- dla każdej pary sympleksów  $\sigma_\beta \subset \sigma \in \Sigma$  oraz reguł zastępowania  $(P_\sigma, \pi_\sigma)$ ,  $(P_{\sigma_\beta}, \pi_{\sigma_\beta})$  za odwzorowanie łączące między  $P_{\sigma_\beta}$  oraz  $P_\sigma$  przyjmujemy afiniczne włożenie  $P_{\sigma_\beta}$  na podkompleks  $P_\sigma$  odpowiadający ścianie  $\beta$  w  $\sigma$ .



Rysunek 14: Rodzina  $\mathcal{R}$  dla  $\mathcal{D}$

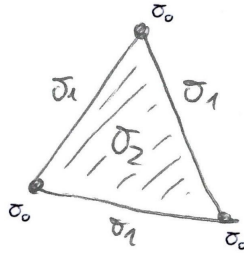
Naturalnie jest to rodzina reguł zastępowania dla  $\mathcal{D}$ . Opiszemy teraz  $\mathcal{D}$ -etykietowanie  $\Lambda_{\mathcal{R}}$  rodziny  $\mathcal{R}$  (Rysunek 15).

- dla każdego 0-sympleksu  $\tau_0 \subset \coprod_{\sigma \in \Sigma} P_\sigma$  przyjmujemy  $\lambda_{\mathcal{R}}(\tau_0) = \sigma_0$ ;
- dla każdego 1-sympleksu  $\tau_1 \subset \coprod_{\sigma \in \Sigma} P_\sigma$  przyjmujemy  $\lambda_{\mathcal{R}}(\tau_1) = \sigma_1$ ;
- dla każdego 2-sympleksu  $\tau_2 \subset \coprod_{\sigma \in \Sigma} P_\sigma$  przyjmujemy  $\lambda_{\mathcal{R}}(\tau_2) = \sigma_2$ ;
- na kompleksie  $\coprod_{\sigma \in \Sigma} P_\sigma$  przyjmijmy pomocniczy częściowy porządek wierzchołków, który po obcięciu do każdego sympleksu jest porządkiem liniowym, zachowywany przez odwzorowania z rodziny  $\{P_{z_\beta}\}$ ; przykładowo porządek indukowany przez strzałki zaznaczone na Rysunku 15;
- Dla każdego  $\tau \subset \coprod_{\sigma \in \Sigma} P_\sigma$  określamy  $u_\tau : \tau \rightarrow \lambda(\tau)$  jako symplecjalny izomorfizm między sympleksem  $\tau$  a  $\lambda(\tau)$  zachowujący porządek na kompleksie  $\coprod_{\sigma \in \Sigma} P_\sigma$ .



Rysunek 15:  $\mathcal{D}$ -etykietowanie  $\Lambda_{\mathcal{R}}$  rodziny  $\mathcal{R}$

Rozważmy teraz kompleks  $X$  będący pojedynczym 2-sympleksem. Określmy  $\mathcal{D}$ -etykietowanie przyjmując  $\lambda(\tau_n) = \sigma_n$  dla każdego sympleksu  $\tau_i \subset X$  wymiaru  $i = 0, 1, 2$ , zaś za  $u_\tau : \tau \rightarrow \lambda(\tau)$  dowolny symplecjalny izomorfizm między sympleksem  $\tau_i$  a  $\lambda(\tau_i)$  (Rysunek 16).



Rysunek 16:  $\mathcal{D}$ -etykietowanie  $\Lambda$  kompleksu  $X$

Tworzymy assembly system zgodnie z procedurą opisaną w sekcji 2. Na rysunku poniżej przedstawiono przestrzeń  $\coprod_{\tau \subset X} Y_\tau$  wraz z  $\Lambda_{\mathcal{R}}$ -etykietowaniem oraz pomocniczo zaznaczonymi włożeniami  $\{P_{z_\beta}\}_{\beta \in B}$  pochodzącymi od odwzorowań łączących dla rodziny  $\mathcal{R}$ .

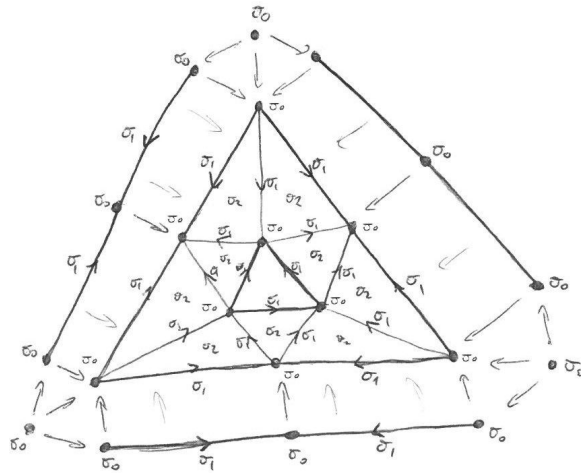
Nietrudno się przekonać, w jaki sposób  $\mathcal{D}$ -etykietowanie  $\Lambda_{\mathcal{R}}$  indukuje  $\mathcal{D}$ -etykietowanie  $(\Lambda, \mathcal{D}, \mathcal{R})$ -ilorazu  $X_1$  oraz w jaki sposób reguły zastępowania indukują  $(\Lambda, \mathcal{D}, \mathcal{R})$ -odwzorowanie  $\Pi_0 : X_1 \rightarrow X$ , które w tym przypadku pokrywa się z odwzorowaniem  $\pi_{\sigma_2}$  (Rysunek 18).

**Definicja 3.4.** Niech będą dane skończona dobra rodzina sympleksów  $\mathcal{D}$ , skończony kompleks symplecjalny  $X_0$  wraz z  $\mathcal{D}$ -etykietowaniem  $\Lambda$ , rodzina  $\mathcal{R}$  reguł zastępowania dla  $\mathcal{D}$  oraz  $\mathcal{D}$ -etykietowanie  $\Lambda_{\mathcal{R}}$  rodziny  $\mathcal{R}$ . Rozważmy system odwrotny

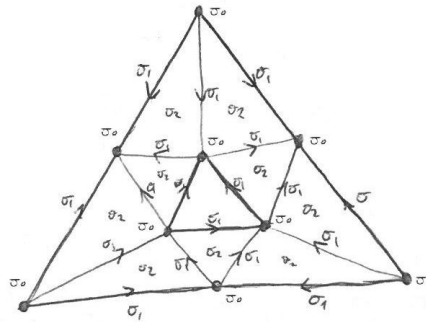
$$\mathcal{I} = \mathcal{I}(X_0, \mathcal{D}, \mathcal{R}, \Lambda, \Lambda_{\mathcal{R}}) = (\{X_i : i \geq 1\}, \{\Pi_i : i \geq 0\}), \quad (22)$$

w którym kompleksy  $X_i$  wraz z ich pomocniczymi  $\mathcal{D}$ -etykietowaniami  $\Lambda_i$  oraz odwzorowania  $\Pi_i$  zdefiniowane są rekurencyjnie w następujący sposób:





Rysunek 17:  $\coprod_{\tau \subset X} Y_\tau$  wraz z  $\Lambda_{\mathcal{R}}$ -etykietowaniem i włożeniami dla  $\mathcal{R}$



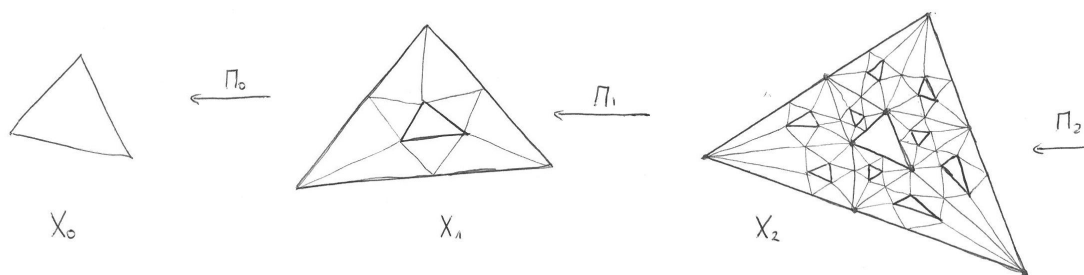
Rysunek 18:  $(\Lambda, \mathcal{D}, \mathcal{R})$ -iloraz  $X_1$  wraz z  $\mathcal{D}$  etykietowaniem

- dla  $i = 0$  za  $X_i$  przyjmujemy  $X_0$ , zaś za  $\Lambda_i$  przyjmujemy  $\Lambda$ ;
- Zakładając, że mamy już zdefiniowany kompleks  $X_n$  z  $\mathcal{D}$ -etykietowaniem  $\Lambda_n$ , definiujemy  $X_{n+1}$  jako  $(\Lambda_n, \mathcal{D}, \mathcal{R})$ -iloraz nad  $X_n$ , wraz z  $\mathcal{D}$ -etykietowaniem  $\Lambda_{n+1}$  indukowanym przez  $\mathcal{D}$ -etykietowanie rodziny  $\mathcal{R}$  jak w Lemacie 3.2;
- Dla każdego  $i \geq 0$  otrzymujemy także symplecjalne  $(\Lambda, \mathcal{D}, \mathcal{R})$ -odwzorowanie  $\Pi_i : X_{i+1} \rightarrow X'_i$  na podrozbicie barycentryczne kompleksu  $X_i$ .

*Systemem Markowa* nazywamy dowolny system odwrotny postaci  $\mathcal{I}(X_0, \mathcal{D}, \mathcal{R}, \Lambda, \Lambda_{\mathcal{R}})$ , jak wyżej.

**Definicja 3.5.** *Konstruktywnym kompaktem Markowa* nazwiemy granicę odwrotną dowolnego systemu Markowa.

**Przykład 3.6.** Rozważmy dobrą rodzinę  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\leq 2}$ , kompleks symplecjalny  $X_0$  wraz z  $\mathcal{D}$ -etykietowaniem  $\Lambda$ , rodzinę  $\mathcal{R}$  reguł zastępowania dla  $\mathcal{D}$  oraz  $\mathcal{D}$  - etykietowanie  $\Lambda_{\mathcal{R}}$  rodziny  $\mathcal{R}$  jak w Przykładzie 3.3. Rozważmy system Markowa  $\mathcal{I}(X_0, \mathcal{D}, \mathcal{R}, \Lambda, \Lambda_{\mathcal{R}})$



Rysunek 19: Początek systemu Markowa  $\mathcal{I}$

dla tych danych. Na rysunku 19 przedstawiono pierwsze trzy kompleksy symplecjalne z systemu  $\mathcal{I}$  (pominięto pomocnicze etykietowanie dla przejrzystości rysunku).

Można udowodnić, że konstruktywny kompakt Markowa będący granicą odwrotną powyższego systemu Markowa jest homeomorficzny z dywanem Sierpińskiego. Ponieważ dowód odbiega od tematyki oraz rezultatów obranych za cel tej pracy, nie będziemy go przeprowadzać.

W dalszych badaniach będziemy chcieli uzasadnić, że klasa konstruktywnych kompaktów Markowa opisana w niniejszej pracy dokładnie pokrywa się z klasą kompaktów Markowa opisaną w Sekcji 1.2 w pracy Dominiki Pawlik [Paw15].

## References

- [BN17] G. C. Bell and A. Nagórko. “Detecting topological properties of Markov compacta with combinatorial properties of their diagrams”. In: *arXiv e-prints*, arXiv:1711.08227 (Nov. 2017), arXiv:1711.08227. arXiv: 1711.08227 [math.GT].
- [Dra06] Alexander Dranishnikov. “Cohomological dimension of Markov compacta”. In: *arXiv Mathematics e-prints*, math/0611028 (Nov. 2006), math/0611028. arXiv: math/0611028 [math.GT].
- [Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge: Cambridge University Press, 2002, pp. 102–107. ISBN: 0-521-79540-0.
- [Paw15] Dominika Pawlik. “Gromov boundaries as Markov compacta”. In: *arXiv e-prints*, arXiv:1503.04577 (Mar. 2015), arXiv:1503.04577. arXiv: 1503.04577 [math.GT].