ZADANIA Z TOPOLOGII ALGEBRAICZNEJ 1

LISTA 5. Nakrycia, podniesienia i podgrupy odpowiadające nakryciom

1. Dla nakrycia $p : Y \to X$ oraz dla podprzestrzeni $A \subset X$, niech $B = p^{-1}(A)$. Pokaż, że obcięcie $p : B \to A$ jest nakryciem.
2. Niech $p_1 : Y_1 \to X_1$ i $p_2 : Y_2 \to X_2$ będą nakryciami. Uzasadnij, że odwzorowanie produktowe $p_1 \times p_2 : Y_1 \times Y_2 \to X_1 \times X_2$ jest też nakryciem. Jaka jest krotność tego nakrycia (gdy X_1 i X_2 są spójne)?
3. Niech X będzie przestrzenią lokalnie spójną (tzn. w każdym otwartym otoczeniu dowolnego punktu z X zawiera się spójne otwarte otoczenie tego punktu). Niech $p : Y \to X$ będzie nakryciem. Uzasadnij, że obcięcie p do dowolnej komponenty spójności w Y jest też nakryciem X.
4. Niech $p : Y \to X$ będzie nakryciem, którego wszystkie włókna $p^{-1}(x)$, $x \in X$, są skończone. Uzasadnij, że jeśli X jest zwarta, to Y też jest zwarta.
5. Rozważmy podprzestrzeń $\Sigma \subset R^2$ (z topologią indukowaną), zwaną *warszawskim okręgiem*, określoną we współrzędnych biegunowych (r, θ) jako

$$\Sigma := \{(1 + \frac{1}{2}\sin\frac{4\pi^2}{\theta}, \theta) : \theta \in (0, 2\pi]\} \cup \{(r, 0) : r \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]\}.$$

   Odwzorowanie $(r, \theta) \to e^{i\theta}$ obcięte do Σ daje ciągłe odwzorowanie $f : \Sigma \to S^1$. Uzasadnij, że
   (a) Σ nie jest lokalnie drogowo spójna;
   (b) f nie podnosi się do nakrycia $R \to S^1$.
   Korzystając z tego przykładu uzasadnij, że założenie lokalnej drogowej spójności jest istotne w kryterium istnienia podniesienia.
6. Na przykładzie warszawskiego okręgu pokaż, że spójne nakrycie drogowo spójnej przestrzeni nie musi być drogowo spójne.
7. Uzasadnij, że spójna i lokalnie drogowo spójna przestrzeń jest drogowo spójna. Wywnioskuj, że każde spójne nakrycie przestrzeni lokalnie drogowo spójnej jest drogowo spójne.
8. Rozważmy odwzorowanie $p : C \setminus \{0\} \to C \setminus \{0\}$ (gdzie C to zbiór liczb zespolonych) zadane przez $p(z) = z^2$.
   (1) Uzasadnij, że p jest nakryciem.
   (2) Wybór podniesienia $x \in p^{-1}(u)$ liczby u względem nakrycia p to wybór jednego z jej pierwiastków kwadratowych (czyli spierwiastkowanie tej liczby). Niech X będzie spójną i lokalnie drogowo spójną przestrzenią, i niech $f : X \to C \setminus \{0\}$ będzie ciągłą funkcją zespoloną. Podaj warunek (w terminach topologio-algebraicznych) na to, by funkcja f dała się w sposób ciągły spierwiastkować.
9. Niech G będzie spójną i lokalnie drogowo spójną grupą topologiczną. Niech $p : \widetilde{G} \to G$ będzie dowolnym spójnym nakryciem G, i niech $\tilde{e} \in p^{-1}(e)$.
   (1) Niech $m : \widetilde{G} \times \widetilde{G} \to G$ będzie zadane przez $m(x, y) = p(x) \cdot p(y)$. Uzasadnij, że $m_*[\pi_1(\widetilde{G} \times \widetilde{G}, (\tilde{e}, \tilde{e}))]$ zawiera się w $p_*[\pi_1(\widetilde{G}, \tilde{e})]$.
   (2) Wywnioskuj, że na nakryciu $\widetilde{G}$ istnieje (jednoznaczna) struktura grupy topologicznej, dla której $\tilde{e}$ jest jednością, i dla której p jest grupowym homomorfizmem.

10. Niech X będzie przestrzenią spójną i lokalnie drogowo spójną, i niech $\widetilde{X}$ będzie jednospójnym nakryciem X.
    (1) Uzasadnij, że $\widetilde{X}$ jest jednoznaczna z dokładnością do izomorfizmu zbazowanych nakryć.
    (2) Uzasadnij, że każde spójne nakrycie X jest nakrywane przez $\widetilde{X}$ (stąd nazwa *nakrycie uniwersalne*).
11. Opisz spójne i jednospójne nakrycia nastepujących przestrzeni (wraz z odwzorowaniami nakrywającymi):
    (a) suma sfery S^2 oraz jednej z jej średnic;
    (b) torus $S^1 \times S^1$ z wklejonym dyskiem $D^2 \times \{s_0\}$;
    (c) suma sfery i przecinającego ją w dwóch punktach okręgu;
    (d) iloraz sfery S^2 powstay poprzez sklejenie bieguna północnego z południowym.
12. Niech $p : Y \to X$ będzie drogowo spójnym nakryciem, i niech $y_0, y_1 \in p^{-1}(x_0)$. Uzasadnij, że podgrupy $p_*(\pi_1(Y, y_0))$ i $p_*(\pi_1(Y, y_1))$ są sprzężone w grupie $\pi_1(X, x_0)$.
13. Niech $p : Y \to X$ będzie jednospójnym nakryciem, niech $A \subset X$ będzie spójną i lokalnie drogowo spójną podprzestrzenią, i niech B będzie komponentą drogowej spójności w $p^{-1}(A)$. Wykaż, że obcięcie $p : B \to A$ jest nakryciem, i że związana z nim podgrupa $p_*(\pi_1 B) < \pi_1 A$ pokrywa się z jądrem homomorfizmu $\pi_1 A \to \pi_1 X$ indukowanego przez włożenie.
14. Niech S_n będzie okręgiem o środku $(0, \frac{1}{n})$ i promieniu $\frac{1}{n}$, i niech $X = \cup_{n=1}^{\infty} S_n$, z topologią indukowaną z topologii płaszczyzny (jest to tzw. *hawajski kolczyk*). Uzasadnij, że X nie posiada spójnego i jednospójnego nakrycia.
15. Rozważmy nakrycie $p : Y \to X \times [0, 1]$ przestrzeni produktowej $X \times [0, 1]$. Uzasadnij, że dla $i = 0, 1$ obcięte nakrycia $p_i : p^{-1}(X \times \{i\}) \to X \times \{i\}$ są izomorficzne jako nakrycia X (względem naturalnych utożsamień przestrzeni $X \times \{i\}$ z przestrzenią X).
16. Niech $p : \widetilde{X} \to X$ będzie nakryciem, i niech $f : Y \to X$ będzie ciągłym odwzorowaniem. Zdefiniujmy przestrzeń

$$f^*(\widetilde{X}) = \{(y, z) \in Y \times \widetilde{X} \mid f(y) = p(z)\},$$

    z indukowaną z produktu topologią. Określmy też odwzorowanie $f^*(p) : f^*(\widetilde{X}) \to Y$, jako obcięcie rzutowania $Y \times \widetilde{X} \to Y$.
    (1) Uzasadnij, że $f^*(p) : f^*(\widetilde{X}) \to Y$ jest nakryciem. Nakrycie to nazywa się *cofnięciem* (pullback) nakrycia $p : \widetilde{X} \to X$ względem f.
    (2) Pokaż, że jeśli $f, f' : Y \to X$ są odwzorowaniami homotopijnymi, to cofnięcia nakrycia $p : \widetilde{X} \to X$ względem f oraz f' są nakryciami izomorficznymi.
    (3) Uzasadnij, że jeśli odwzorowanie $f : Y \to X$ jest homotopijne z odwzorowaniem stałym to cofnięcie nakrycia $p : \widetilde{X} \to X$ względem f jest nakryciem trywialnym.
    (4) Niech $y_0 \in Y$, $x_0 = f(y_0)$, oraz niech $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$. Uzasadnij, że podgrupa w $\pi_1(Y, y_0)$ odpowiadająca cofniętemu nakryciu $f^*(p) : (f^*(\widetilde{X}), (y_0, \tilde{x}_0)) \to (Y, y_0)$ ma postać

$$[f^*(p)]_*[\pi_1(f^*(\widetilde{X}), (y_0, \tilde{x}_0))] = f_*^{-1}[p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0))],$$

    gdzie $f_* : \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(X, x_0)$ jest homomorfizmem indukowanym przez odwzorowanie f.