RELATYWNE HOMOMORFIZMY INDUKOWANE

Niech $A \subset X$, $B \subset Y$ i $f: X \to Y$ ciągłe.

Mówimy że $f: (X,A) \to (Y,B)$ jest ciągłym odwzorowaniem par gdy ponadto $f(A) \subset B$.

Takie $f: (X,A) \to (Y,B)$ indukuje homomorfizmy

$$f_\# = f_\#^{rel}: C_n(X,A) \to C_n(Y,B)$$

ponieważ zwykłe homomorfizmy $f_\#: C_n X \to C_n Y$ odwzorowują podgrupę $C_n A < C_n X$ w podgrupę $C_n B < C_n Y$.

Zadane są one formułą $f_\#^{rel}([a]) = [f_\#(a)]$,

gdzie $[\ ]$ oznaczają tu obrazy przez $C_n X \to C_n X / C_n A$ i $C_n Y \to C_n Y / C_n B$.

Zachodzi też związek $f_\#^{rel} \partial^{rel} = \partial^{rel} f_\#^{rel}$, gdzie

$\partial^{rel}: C_n(X,A) \to C_{n-1}(X,A)$ jest podobnie zadane

przez $\partial^{rel}([a]) = [\partial(a)]$, ponieważ mamy

$$f_\#^{rel} \partial^{rel}([a]) = f_\#^{rel}[\partial(a)] = [f_\# \partial(a)] = [\partial f_\#(a)] =$$

$$= \partial^{rel}[f_\#(a)] = \partial^{rel} f_\#^{rel}([a]).$$

Zatem $f_\#^{rel}: C_*(X,A) \to C_*(Y,B)$ jest odwzorowaniem łańcuchowym. Stąd indukuje ono homomorfizmy homologii

$f_*: H_n(X,A) \to H_n(Y,B)$ wzorem

$$f_*([c]) = [f_\#^{rel}(c)].$$ (gdzie teraz $[\ ]$ oznacza klasę homologii cyklu)

FAKT. Jeśli odwzorowania $f, g : (X,A) \to (Y,B)$ są homotopijne poprzez odwzorowanie par $(X,A) \to (Y,B)$ to $f_* = g_* : H_n(X,A) \to H_n(Y,B)$.

<u>Dowód</u>: Niech $F : X \times [0,1] \to Y$ homotopia $f \simeq g$ j.w.

Wówczas operator pryzmy $P : C_n X \to C_{n+1}(X \times [0,1])$ złożony z homomorfizmem $F_\# : C_{n+1}(X \times I) \to C_{n+1} Y$, $F_\# P : C_n X \to C_{n+1} Y$, odwzorowuje $C_n A < C_n X$ w $C_{n+1} B < C_{n+1} Y$, a więc indukuje

$$(F_\# P)^{rel} : C_n(X,A) \to C_{n+1}(Y,B).$$

Rutynowo sprawdza się, że zachodzi

$$\partial^{rel} (F_\# P)^{rel} + (F_\# P)^{rel} \partial^{rel} = g_\#^{rel} - f_\#^{rel}$$

a więc $F_\# P$ jest homotopią łańcuchową pomiędzy $f_\#^{rel}$ i $g_\#^{rel}$.

Stąd teza FAKTU. $\square$

OBSERWACJA. Jeśli $B \subset A \subset X$ to mamy naturalny krótki ciąg dokładny relatywnych kompleksów singularnych łańcuchów

$$0 \to C_n(A,B) \xrightarrow{\alpha} C_n(X,B) \xrightarrow{\beta} C_n(X,A) \to 0$$

$$\begin{array}{ccc} \| & \| & \| \\ C_nA/C_nB & C_nX/C_nB & C_nX/C_nA \end{array}$$

Odwzorowania α i β są (indukowane przez włożenie par, a więc) dane przez: $\alpha(a + C_nB) = a + C_nB$,

$\beta(a + C_nB) = a + C_nA$.

- Dokładność wierszy dla ustalonego n to rutynowa algebra grup abelowych.
- Komutowanie z ∂^{rel} to bezpośrednie sprawdzenie:

np. dla $a \in C_nA$ oraz $a + C_nB \in C_nA/C_nB$ mamy

$$\partial^{rel}\alpha(a + C_nB) = \partial^{rel}(a + C_nB) = \partial(a) + C_{n-1}B$$

$$\alpha\,\partial^{rel}(a + C_nB) = \alpha(\partial(a) + C_{n-1}B) = \partial(a) + C_{n-1}B.$$

WNIOSEK. Stosując algebrę homologiczną otrzymujemy długi ciąg dokładny trójki $B \subset A \subset X$:

$$\ldots \to H_n(A,B) \xrightarrow{\alpha_*} H_n(X,B) \xrightarrow{\beta_*} H_n(X,A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A,B) \to \ldots$$

Nietrudno też wykazać, że homomorfizm dołączony

$\partial : H_n(X,A) \to H_{n-1}(A,B)$ ma następującą postać.

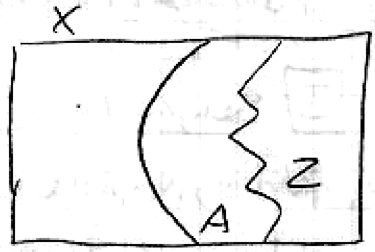
Jeśli $c \in C_n(X,A)$ jest relatywnym cyklem

(reprezentowanym przez łańcuch $c_0 \in C_n X$ takim, że $\partial c_0 \in C_n A$

lub równoważnie takim, że $c = c_0 + C_n A$)

to $\partial\, [c]_{H_n(X,A)} := [\partial(c)]_{H_n(A,B)} = [\partial c + C_n B]_{H_n A,B}$

TWIERDZENIE O WYCINANIU.

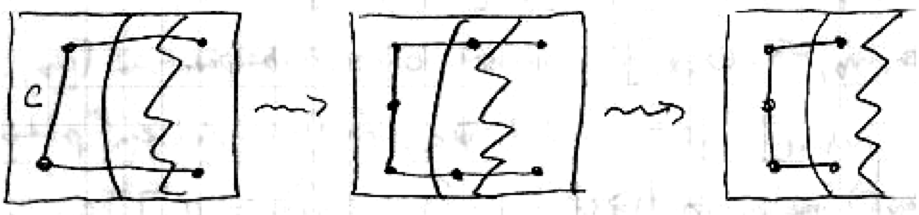


TW. Niech $Z\subset A\subset X$, gdzie $cl(Z)\subset \operatorname{int} A$. Wówczas włożenie $(X\setminus Z, A\setminus Z)\xrightarrow{i}(X,A)$ indukuje izomorfizm $H_n(X\setminus Z, A\setminus Z)\to H_n(X,A)$ dla każdego n.

RÓWNOWAŻNE SFORMUŁOWANIE. $A,B\subset X$, $\operatorname{int}A\cup\operatorname{int}B = X$ $(=A\cup B)$. Wówczas $(B,A\cap B)\to(X,A)$ indukuje izomorfizmy $H_n(B,A\cap B)\to H_n(X,A)$.

$A:=A$, $B:=X\setminus Z$

INTUICJA: Konstruujemy $\rho: H_n(X,A)\to H_n(X\setminus Z, A\setminus Z)$



rozdrabniamy (barycentryczne podrozbicie)

obcinamy

Rozdrabnianie:
- [metrycznie] aż średnice singularnych sympleksów dostatecznie małe
- [topologicznie] aż singularne sympleksy mają obrazy zawarte w zbiorach U pewnego otwartego pokrycia $\mathcal{U}$ przestrzeni X.

X przestrzeń top., $\mathcal{U}=\{U_j\}$ rodzina podzbiorów t.że $\{\operatorname{int} U_j\}$ jest pokryciem X,
$C_n^{\mathcal{U}}X\subset C_nX$: $C_n^{\mathcal{U}}X=\{\sum n_i\sigma_i\in C_nX : \forall_i \exists_j \operatorname{Im}\sigma_i\subset U_j\}$.
Obcięcie $\partial: C_nX\to C_{n-1}X$ do $C_n^{\mathcal{U}}X$ daje $\partial: C_n^{\mathcal{U}}X\to C_{n-1}^{\mathcal{U}}X$.
Dostajemy kompleks łańcuchowy $C_*^{\mathcal{U}}X$. Jego homologie oznaczamy $H_*^{\mathcal{U}}X$.

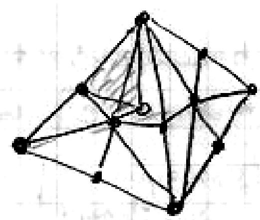
(o rozdrabnianiu)
STWIERDZENIE. Włożenie $\iota: C_*^{\mathcal{U}}X\to C_*X$ jest łańcuchową homotopijną równoważnością. Dokładniej, istnieje odwzorowanie łańcuchowe $\rho: C_*X\to C_*^{\mathcal{U}}X$ takie że złożenia $\iota\rho$ oraz $\rho\iota$ są łańcuchowo homotopijne z identycznościami. W szczególności $\iota: C_*^{\mathcal{U}}X\to C_*X$ indukuje izomorfizm $\iota_*: H_*^{\mathcal{U}}X\to H_*X$ homologii.

Powód [4 etapy]:

I Barycentryczne podrozbicie sympleksów liniowych

- liniowy sympleks n-wymiarowy $[v_0,\dots,v_n] \subset \mathbb{R}^m$ to
  $\{\sum_{i=0}^{n} t_i v_i : \sum t_i = 1, t_i \geq 0\}$, gdzie $v_1-v_0,\dots,v_n-v_0$ lin. niezal.
- ściany generowane przez podzbiory zbioru $v_0,\dots,v_n$ wierzchołków są sympleksami liniowymi
- barycentrum sympleksu $[v_0,\dots,v_n]$ to punkt $b = \frac{1}{n+1}\sum_i v_i$ $[t_i = \frac{1}{n+1}\ \forall i]$

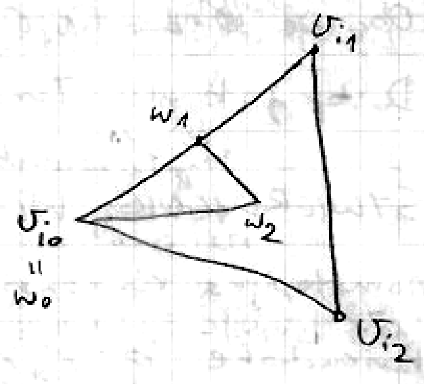
- barycentryczny podział sympleksu $[v_0,\dots,v_n]$ to podział na n-sympleksy postaci $[b,w_0,\dots,w_{n-1}]$ gdzie b jest barycentrum $[v_0,\dots,v_n]$ zaś $[w_0,\dots,w_{n-1}]$ jest, indukcyjnie, $(n-1)$-sympleksem podziału barycentrycznego pewnej $(n-1)$-ściany $[v_0,\dots,\hat{v}_i,\dots v_n]$ sympleksu $[v_0,\dots,v_n]$. Indukcję zaczynamy w $n=0$, gdzie barycentryczny podział $[v_0]$ jest pojedynczy sympleks $[v_0]$.



Z tej indukcyjnej definicji wynika że sympleks $[w_0,\dots,w_n]$ podziału barycentrycznego sympleksu $[v_0,\dots v_n]$ ma zawsze następującą postać:
istnieje przenumerowanie $v_{i_0},\dots,v_{i_n}$ wierzchołków $v_0,\dots,v_n$ t.że
$\forall 0 \le k \le n$ w_k jest barycentrum ściany $[v_{i_0},\dots,v_{i_k}]$ sympleksu $[v_0,\dots,v_n]$

FAKT 0. Sympleksy podziału barycentrycznego wraz ze swoimi ścianami tworzą kompleks symplicjalny będący triangulacją wyjściowego sympleksu.

[bez dowodu]



FAKT 1. Sympleksy barycentrycznego podziału n-sympleksu liniowego σ mają średnice $\leq \frac{n}{n+1}\operatorname{diam}(\sigma)$

1°. $\operatorname{diam}[v_0, \dots, v_n] = \max |v_i - v_j|$ bo dla $v, \sum t_i v_i \in [v_0, \dots, v_n]$ mamy $|v - \sum t_i v_i| = |\sum t_i (v - v_i)| \leq \sum t_i |v - v_i| \leq \sum t_i \max_i |v - v_i| =$

$$= \max_i |v - v_i|$$

Powtarzając to dla $v = \sum s_i v_i$ dostajemy

$$\left|\sum s_i v_i - \sum t_i v_i\right| \leq \max_{i,j} |v_i - v_j| \quad \square$$

2° Niech $\sigma' = [w_0, \dots w_n]$ będzie sympleksem podziału barycentrycznego sympleksu $\sigma = [v_0, \dots, v_n]$, przy czym $w_0 = b$ jest barycentrum σ

(A) Jeśli $\operatorname{diam} \sigma' = |w_i - w_j|$ dla $i \neq 0, j \neq 0$

to w_i, w_j są wierzchołkami barycentrycznego podziału pewnej ściany $\tau = [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$ sympleksu σ

Wtedy, z zał. indukcyjnego, $|w_i - w_j| \leq \frac{n-1}{n} \operatorname{diam}(\tau)$.

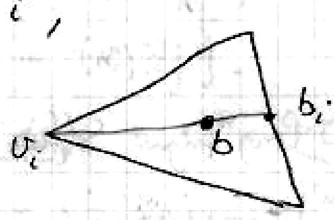
Ale $\operatorname{diam}(\tau) \leq \operatorname{diam}(\sigma)$ oraz $\frac{n-1}{n} < \frac{n}{n+1}$, stąd

$$\operatorname{diam}(\sigma') = |w_i - w_j| < \frac{n}{n+1} \operatorname{diam}(\sigma).$$

(B) Rozważmy więc przypadek gdy

$$\operatorname{diam}(\sigma') = |w_0 - w_j| = |b - w_j|$$

Ponieważ chcemy oszacować średnice wszystkich sympleksów podziału, i ponieważ mamy $|b - w_j| \leq |b - v_i|$ dla pewnego i, możemy przyjąć $w_j = v_i$ i szacować $|b - v_i|$.



Niech b_i barycentrum ściany $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots v_n]$

Wtedy $b = \frac{1}{n+1} v_i + \frac{n}{n+1} b_i$

a stąd mamy, że $|b - v_i| \leq \frac{n}{n+1} |b_i - v_i| \leq \frac{n}{n+1} \operatorname{diam}(\sigma)$. $\square$

UWAGA. FAKT 1 będzie dla nas ważny w zastosowaniu do r-krotnych iteracji barycentrycznego podziału. Średnice sympleksów r-tego barycentrycznego podziału dążą jednostajnie do 0 gdy $r \to \infty$, bo są szacowane przez $\left(\frac{n}{n+1}\right)^r \cdot \operatorname{diam}(\sigma)$, gdzie $n = \dim(\sigma)$.

II Barycentryczne podrozbicie liniowych łańcuchów

E przestrzeń liniowa (ogólniej, wypukły podzbiór w przestrzeni liniowej)
liniowe sympleksy $\sigma: \Delta^n \to E$, $\sigma(\Sigma t_i e_i) = \Sigma t_i v_i$
dla pewnych $v_0, \dots, v_n \in E$
OZN. $[v_0, \dots, v_n]$

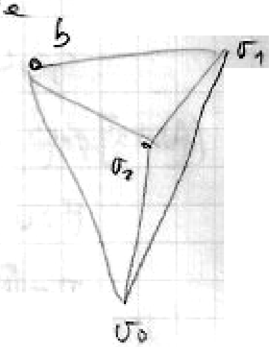
$LC_n(E)$ liniowe łańcuchy w E, $LC_n(E) < C_n E$

$\partial: LC_n(E) \to LC_{n-1} E$

$LC_{-1}(Y) = \mathbb{Z}$, $\partial[v_0] = 0$

$LC_*(E)$ kompleks łańcuchowy

* dla dowolnego $b \in E$ rozważmy homomorfizm stożkowania $b: LC_n(E) \to LC_{n+1}(E)$
przez $b[v_0, \dots, v_n] = [b, v_0, \dots, v_n]$. Ten homomorfizm spełnia



$$\partial b[v_0, \dots, v_n] = [v_0, \dots, v_n] - b(\partial[v_0, \dots, v_n])$$

a więc z liniowości mamy

$$\partial b(\alpha) = \alpha - b(\partial\alpha) \quad \text{dla każdego } \alpha \in LC_n(E).$$

Mamy więc $\partial b = \mathrm{id} - b\partial$

[UWAGA: b jest homotopią łańcuchową między id oraz odwzorowaniem zerowym]

* teraz określamy indukcyjnie homomorfizm podrozbijania

$$S: LC_n(E) \to LC_n(E).$$

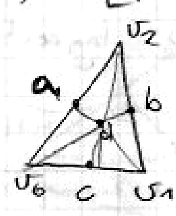
Niech $\lambda: \Delta^n \to E$ liniowy sympleks, b_λ - obraz barycentrum Δ^n przez λ
(czyli barycentrum obrazu $\lambda(\Delta^n)$)

Indukcyjna formuła na S:

$$S(\lambda) = b_\lambda(S(\partial\lambda))$$

Przy czym $S([v_0]) = [v_0]$.

$S([v_0, v_1]) = -[b, v_0] + [b, v_1]$



$$S(\partial[v_0, v_1, v_2]) = S([v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1])$$
$$= -[b, v_1] + [b, v_2] + [a, v_0] - [a, v_2] - [c, v_0] + [c, v_2]$$

$S[v_0, v_1, v_2] = -[d, b, v_1] + [d, b, v_2] + (d, a, v_0) - \dots$

* Sprawdźmy że $S: LC_n(E) \to LC_n(E)$ jest odwzorowaniem łańcuchowym, tzn $\partial S = S\partial$.

Indukcja po n

dla $n=0$ $\quad S: LC_0(E) \to LC_0(E)$ jest identycznością, więc OK.

dla $n=1$

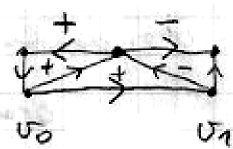
$$\partial S[v_0,v_1] = \partial(-[b v_0]+[b v_1]) = b - v_0 + v_1 - b = v_1 - v_0$$
$$S\partial[v_0,v_1] = S(v_1 - v_0) = v_1 - v_0$$

dla $n>1$ $\quad$ niech $\lambda: \Delta^n \to E$

$$\partial S\lambda = \partial(b_\lambda(S\partial\lambda)) \qquad [\partial b_\lambda = 1 - b_\lambda\partial]$$
$$= S\partial\lambda - b_\lambda \partial S \partial\lambda \qquad [\partial\lambda \in LC_{n-1}(E) \text{ więc indukcyjnie } \partial S = S\partial \text{ na } \partial\lambda]$$
$$= S\partial\lambda - b_\lambda \partial\partial S\lambda \qquad [\partial\partial = 0]$$
$$= S\partial\lambda \qquad \square$$

* Określamy homotopię łańcuchową $T: LC_*(E) \to LC_{*+1}(E)$ pomiędzy odwzorowaniem podrozbijania S oraz identycznością id

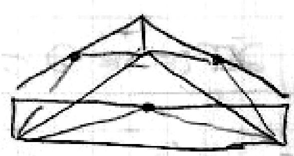
$$T: LC_0(E) \to LC_1(E) \qquad T[v_0] = [v_0, v_0]$$
$$T\lambda = b_\lambda(\lambda - T\partial\lambda) \quad \text{dla } n = \dim\lambda > 0$$



$T[v_0,v_1]$

Dowodzimy wzoru

$$\partial T = id - S - T\partial$$

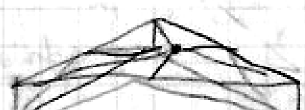


$\lambda - T\partial\lambda$

dla $n=0$

$$\partial T[v_0] = 0, \quad T\partial[v_0] = 0, \quad id = S \quad \text{OK.}$$

dla $n>0$



$T[v_0,v_1,v_2]$

$$\partial T\lambda = \partial(b_\lambda(\lambda - T\partial\lambda)) \qquad [\partial b_\lambda = id - b_\lambda\partial]$$
$$= \lambda - T\partial\lambda - b_\lambda(\partial(\lambda - T\partial\lambda)) =$$
$$= \lambda - T\partial\lambda - b_\lambda(\partial\lambda - \partial T\partial\lambda) = \qquad [id - \partial T = T\partial + S \text{ indukcyjnie}]$$
$$= \lambda - T\partial\lambda - b_\lambda(S\partial\lambda + T\partial\partial\lambda) = \qquad [\partial\partial = 0, \; b_\lambda S\partial\lambda = S\lambda]$$
$$= \lambda - T\partial\lambda - S\lambda \quad \square$$

III Barycentryczne podrobianie łańcuchów singularnych

- traktujemy Δ^n jako liniowo zanurzony w $E = \mathbb{R}^{n+1}$ i utożsamiamy go z odwzorowaniem id_{Δ^n} w siebie
- wtedy $S\Delta^n$ jest liniowym łańcuchem o obrazie w Δ^n
- dla singularnego sympleksu $\sigma : \Delta^n \to X$ określamy

$S\sigma := \sigma_\# S\Delta^n$ i rozszerzamy liniowo do $S : C_n X \to C_n X$

- $S : C_n X \to C_n X$ jest odwzorowaniem łańcuchowym, bo

$$\partial S(\sigma) = \partial \sigma_\# S\Delta^n = \sigma_\# \partial S \Delta^n = \sigma_\# S \partial \Delta^n$$

$$= \sigma_\# S \sum_i (-1)^i \Delta_i^n \quad \left[\text{gdzie jeśli } \Delta^n = [e_0, \dots, e_n] \text{ to } \Delta_i^n : \Delta^{n-1} \to [e_0, \dots, \hat{e_i}, \dots e_n] \quad \begin{array}{l} \Delta_i^n(e_j) = e_j \text{ dla } j < i \\ = e_{j+1} \text{ dla } j > i \end{array} \right]$$

$$= \sum_i (-1)^i \sigma_\# S \Delta_i^n \quad [\text{def } S\sigma]$$

$$= \sum_i (-1) S(\sigma \circ \Delta_i^n) =$$

$$= S\left(\sum_i (-1) \sigma \circ \Delta_i^n\right) = S(\partial\sigma) \qquad \square$$

- Podobnie określamy $T : C_* X \to C_{*+1} X$ poprzez

$$T\sigma = \sigma_\# T\Delta^n$$

oraz dowodzimy że tworzy homotopię łańcuchową pomiędzy $S : C_*X \to C_*X$ oraz id na C_*X :

$[\text{czyli że } \partial T = id - S - T\partial]$

$$\partial T\sigma = \partial \sigma_\# T\Delta^n = \sigma_\# \partial T \Delta^n = \sigma_\#\left(\Delta^n - S\Delta^n - T\partial\Delta^n\right) =$$

$$= \sigma - S\sigma - \sigma_\# T\partial\Delta^n = \sigma - S\sigma - T(\partial\sigma) \qquad \square$$

[gdzie $\sigma_\# T\partial\Delta^n = T\partial\sigma$

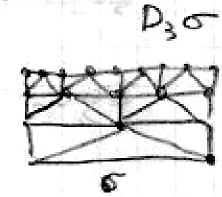
dowodzi się podobnie jak poprzednio

$\sigma_\# S\partial\Delta^n = S\partial\sigma$]

UWAGA. Używając operatora S każdemu singularnemu cyklowi C możemy przyporządkować homologiczny z nim cykl $S^r C$ który należy do $C_*^{\mathcal{U}} X$. PROBLEM: r nie jest wspólne dla wszystkich cykli singularnych, więc S^r nie zadaje się na odwzorowanie $C_* X \to C_*^{\mathcal{U}} X$.

N Podrozbijanie iterowane kontrolowane rozmiarami sympleksów

* operator $D_m: C_*X \to C_{*+1}X$ określony przez $D_m = \sum_{i=0}^{m-1} TS^i$ jest homotopią łańcuchową pomiędzy S^m oraz id



ponieważ

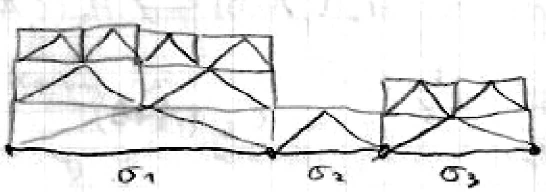
$$\partial D_m + D_m\partial = \sum_{i=0}^{m-1}[\partial TS^i + TS^i\partial] = \sum_{i=0}^{m-1}[\partial TS^i + T\partial S^i] =$$
$$= \sum_{i=0}^{m-1}(\partial T + T\partial)S^i = \sum_{i=0}^{m-1}(id - S)S^i = \sum_{i=0}^{m-1}(S^i - S^{i+1}) = id - S^m \quad \square$$

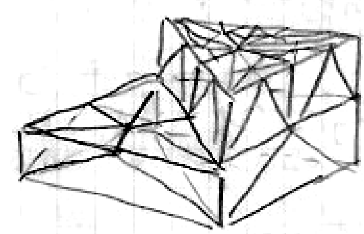
* dla każdego sympleksu singularnego $\sigma \in C_*X$ niech $m(\sigma)$ będzie najmniejszym $m \geq 0$ t.że $D_m\sigma \in C_*^{\mathcal{U}}X$

(takie $m(\sigma)$ istnieje, bo obraz σ jest zwarty, więc jego pokrycie zbiorami z $\mathcal{U}$ posiada dodatnią liczbę Lebesgue'a λ, więc wystarczy zejść ze średnicami sympleksów podrozbicia poniżej λ)

* operator kontrolowanego podrozbicia $D: C_*X \to C_*X$

$$D\left(\sum_i n_i\sigma_i\right) = \sum_i D_{m(\sigma_i)}\sigma_i$$





* Szukamy operatora $\rho: C_nX \to C_n^{\mathcal{U}}X$ dla którego D jest homotopią łańcuchową z identycznością:

$$\partial D\sigma + D\partial\sigma = \partial D_{m(\sigma)}\sigma + D_{m(\sigma)}\partial\sigma - \left[D_{m(\sigma)}\partial\sigma - D\partial\sigma\right] =$$
$$= \sigma - \left[S^{m(\sigma)}\sigma + D_{m(\sigma)}\partial\sigma - D\partial\sigma\right].$$

Określmy $\rho(\sigma) = S^{m(\sigma)}\sigma + D_{m(\sigma)}\partial\sigma - D\partial\sigma$

• $\rho(\sigma) \in C_*^{\mathcal{U}}X$. Jasne że $S^{m(\sigma)}\sigma \in C_*^{\mathcal{U}}X$ (z def. $m(\sigma)$).

Jeśli σ_j (obcięcie σ do j-tej ściany σ) jest składnikiem w $\partial\sigma$, to $m(\sigma_j) \leq m(\sigma)$. Wtedy $D_{m(\sigma)}\sigma_j - D\sigma_j = D_{m(\sigma)}\sigma_j - D_{m(\sigma_j)}\sigma_j = \sum_{i=m(\sigma_j)}^{m(\sigma)-1} TS^i(\sigma_j)$. $S^i(\sigma_j) \in C_*^{\mathcal{U}}X$ dla $i \geq m(\sigma_j)$, zaś T przeprowadza $C_*^{\mathcal{U}}X$ w $C_*^{\mathcal{U}}X$, więc ostatecznie $\rho(\sigma) \in C_*^{\mathcal{U}}X$.

$*$ z określenia ρ mamy $\partial D + D\partial = id - \rho$ albo $\rho \overset{(*)}{=} id - \partial D - D\partial$

<u>ρ jest odwzorowaniem łańcuchowym</u> bo z $(*)$ wynika

$$\partial\rho\sigma = \partial\sigma - \partial D\partial\sigma - \partial\partial D\sigma = \partial\sigma - \partial D\partial\sigma = (id - \partial D)\partial\sigma =$$
$$= (id - \partial D - D\partial)\partial\sigma = \rho\partial\sigma$$

$\boxed{V}$ Dowód stwierdzenia.

Równość $\partial D + D\partial = id - \rho$ można też zapisać jako

$\partial D + D\partial = id - \iota\rho$

gdzie $\iota : C^{\mathcal{U}}_* X \to C_* X$ jest kanonicznym włożeniem

Z kolei $\rho\iota = id$.

Zatem D jest homotopią łańcuchową id z $\iota\rho$

zaś 0 — " — id z $\rho\iota$. $\square$

DOWÓD TW O WYCINANIU (w wersji o dwóch zbiorach A, B):

$(B, A\cap B) \hookrightarrow (X, A)$ indukuje izomorfizm $H_*(B, A\cap B) \longrightarrow H_*(X, A)$.

Dla pokrycia $\mathcal{U} = \{A, B\}$ oznaczmy $C^{\mathcal{U}}_* X$ przez $C_*(A+B)$

Rozważmy diagram:

$$\begin{tikzcd}
\to C_{n+1}B/C_{n+1}(B\cap A) \arrow[r] \arrow[d, "\varkappa"] & C_n B/C_n(B\cap A) \arrow[r] \arrow[d, "\varkappa"] & C_{n-1}B/C_{n-1}(B\cap A) \to \arrow[d, "\varkappa"] \\
\to C_{n+1}(B+A)/C_{n+1}A \arrow[r] \arrow[d, "\iota"] & C_n(B+A)/C_n A \arrow[r] \arrow[d, "\iota"] & C_{n-1}(B+A)/C_{n-1}A \to \arrow[d, "\iota"] \\
\to C_{n+1}(B\cup A)/C_{n+1}A \arrow[r] & C_n(B\cup A)/C_n A \arrow[r] & C_{n-1}(B\cup A)/C_{n-1}A \to
\end{tikzcd}$$

- $\varkappa : C_n B / C_n(B\cap A) \to C_n(B+A)/C_n A$ jest izomorfizmem $\forall n$, więc indukuje izomorfizm $\varkappa_* : H_n(B, B\cap A) \to H_n\left(C_*(B+A)/C_* A\right) = H^{\mathcal{U}}_n(X, A)$
- ι indukuje izomorfizm $\iota_* : H^{\mathcal{U}}_n(X, A) \to H_n(X, A)$ bo $\rho : C_n(X, A) \to C^{\mathcal{U}}_n(X, A)$ jest łańcuchowo homotopijną odwrotnością dla ι
- $\iota\varkappa = i : C_*(B, B\cap A) \to C_*(X, A)$, więc $i_* = \iota_*\varkappa_*$ jest izo. $\square$

ZASTOSOWANIA

1 DOBRE PARY I ILORAZY

- (X,A) jest **dobrą parą** jeśli (A jest niepusty, domknięty oraz) istnieje otwarte otoczenie U zb A w X posiadające deformacyjną retrakcję na A.
  PRZYKŁADY $(D^n, \partial D^n = S^{n-1})$, (CW-kompleks, CW-podkompleks)

- FAKT. Dla dobrej pary (X,A) odwzorowanie ilorazowe $q:(X,A) \to (X/A, A/A)$ indukuje izomorfizm homologii
  $$q_* : H_n(X,A) \to H_n(X/A, A/A) \cong \tilde{H}_n(X/A) \text{ dla wszystkich } n.$$

<u>dowód</u>: mamy komutujący

$$\begin{tikzcd}
H_n(X,A) \arrow[r, "{[izo]}", "{[3]}"'] \arrow[d, "q_*"] & H_n(X,V) \arrow[d, "q_*"] & H_n(X \setminus A, V \setminus A) \arrow[l, "{[izo]}"', "{[wycinanie]}"] \arrow[d, "q_*\ {[izo,\ bo\ obcięcie\ q\ homeo]}"] \\
H_n(X/A, A/A) \arrow[r, "{[izo]}", "{[3]}"'] & H_n(X/A, V/A) & H_n(X/A - A/A, V/A - A/A) \arrow[l, "{[izo]}"', "{[wycinanie]}"]
\end{tikzcd}$$

Z ciągu dokładnego trójki (X,V,A) mamy

$$H_n(V,A) \to H_n(X,A) \to H_n(X,V) \to H_{n-1}(V,A)$$

Zaś z deformacyjnej retrakcji $V \to A$ mamy
$$H_*(V,A) = H_*(A,A) = 0.$$

Stąd
$$0 \to H_n(X,A) \to H_n(X,V) \to 0$$
czyli izomorfizm.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, dashed] & B \arrow[d] \\
C \arrow[r] & D
\end{tikzcd}$$

jeśli 3 są izo, to czwarty też

$\square$

WNIOSEK. Jeśli CW-kompleks X jest sumą podkompleksów A, B, to inkluzja $(B, A\cap B) \to (X,A)$ indukuje izomorfizmy $H_*(B, A\cap B) \to H_*(X,A)$.

<u>dowód</u>: Jeśli $A \cap B = \emptyset$ to trywialne. Jeśli nie, to mamy
$$H_*(B, A\cap B) = \tilde{H}_*(B/A\cap B) = \tilde{H}_*(X/A) = H_*(X,A) \quad \text{bo } B/A\cap B \cong X/A$$
i wszystkie izomorfizmy są naturalne. $\square$

(2) LOKALNE GRUPY HOMOLOGII.

TWIERDZENIE. Jeśli niepuste otwarte zbiory $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^n$ są homeomorficzne, to $m=n$.

dowód: dla $x \in U$, z wycięcia, mamy $H_k(U, U-\{x\}) \cong H_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m-\{x\})$.

Z długiego ciągu dokładnego pary $(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m-\{x\})$ dla homol. zred. mamy

$$H_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n-\{x\}) \cong \tilde{H}_{k-1}(\mathbb{R}^m-\{x\})$$

Z deformacyjnej retrakcji $\mathbb{R}^n-\{x\}$ na S^{m-1} mamy $\tilde{H}_{k-1}(\mathbb{R}^m-\{x\}) = \tilde{H}_{k-1} S^{m-1} =$

$$= \begin{cases} \mathbb{Z} & k=m \\ 0 & k\neq m \end{cases}$$

Zatem

$$H_k(U, U-\{x\}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k=m \\ 0 & k\neq m \end{cases}$$

Po tym odróżnimy U od V gdy $m\neq n$. □

DEF. Lokalne grupy homologii X w x to $H_*(X, X-\{x\})$.

* Z wycięcia, $H_*(X, X-\{x\}) = H_*(U, U-\{x\})$ dla dowolnego otwartego otoczenia U punktu x, stąd nazwa.

* homeo $f: X \to Y$ indukuje izomorfizm grup lokalnych $H_*(X, X-\{x\}) \to H_*(Y, Y-\{f(x)\})$ $\forall x$

* Lokalne grupy homologii mogą rozróżnić
  - przestrzenie z dokładnością do homeomorfizmu
  - punkty przestrzeni należące do różnych orbit pod działaniem grupy $Homeo(X)$ wszystkich homeomorfizmów

PRZYKŁAD. $\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \dots, x_n) : x_n \geq 0\}$, $\partial \mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \dots, x_n) : x_n = 0\}$.

Nie istnieje homeomorfizm $f: \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n_+$ który punkt $x \in \partial \mathbb{R}^n_+$ przeprowadza na punkt $y \notin \partial \mathbb{R}^n_+$, i na odwrót też.

Dla $x \in \partial \mathbb{R}^n_+$, mamy

$$H_k(\mathbb{R}^n_+, \mathbb{R}^n_+ - \{x\}) \cong \tilde{H}_{k-1}(\mathbb{R}^n_+ - \{x\}) = \tilde{H}_{k-1} D^{n-1} = 0 \quad \forall k.$$

NATURALNOŚĆ DŁUGIEGO CIĄGU DOKŁADNEGO

① Dla par przestrzeni.

Jeśli $f:(X,A)\to(Y,B)$ ciągła to następujący diagram komutuje

$$\begin{tikzcd}
\to H_n A \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "f_*"] & H_n X \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "f_*"] & H_n(X,A) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_*"] & H_{n-1} A \to \arrow[d, "f_*"] \\
\to H_n B \arrow[r, "i_*"] & H_n Y \arrow[r, "j_*"] & H_n(Y,B) \arrow[r, "\partial"] & H_{n-1} B \to
\end{tikzcd}$$

d-d: kwadraty zawierające i_* oraz j_* komutują już na poziomie łańcuchów

Homomorfizm ∂ homologii, jest indukowany przez zwykłe brzegowanie ∂ łańcuchów z $H_n X$ w $H_n Y$ reprezentujących cykle relatywne

Z kolei $f_*: H_n(X,A)\to H_n(Y,B)$ jest indukowany przez $f_\#$ zastosowany do łańcuchów w X reprezentujących cykle relatywne.

Ponieważ $\partial f_\# = f_\# \partial$ na poziomie łańcuchów, stąd komutowanie kwadratu zawierającego ∂. □

② W pełnej ogólności algebraicznej

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_* \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & B_* \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & C_* \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A'_* \arrow[r] & B'_* \arrow[r] & C'_* \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Komutujący diagram dwóch krótkich ciągów dokładnych kompleksów łańcuchowych

Indukuje komutujący diagram długich ciągów dokładnych homologii

$$\begin{tikzcd}
\to H_n A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_*"] & H_n B \arrow[r] \arrow[d, "\beta_*"] & H_n C \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\gamma_*"] & H_{n-1} A \to \arrow[d, "\alpha_*"] \\
\to H_n A' \arrow[r] & H_n B' \arrow[r] & H_n C' \arrow[r] & H_{n-1} A' \to
\end{tikzcd}$$

□ Ćw.

③ Podobnie dla ilorazowania oraz $f:(X,A)\to(Y,B)$ dla dobrych par. [Ćw]