

D1. Zadania do wykładu  
analiza A2

1. Urządzenie do burzenia domów składa się z 1000 kg kuli zawieszanej na żurawiu za pomocą 40 m stalowej liny ważącej 10 kg na metr. W nocy lina zostaje zwinięta i kula jest zawieszona na wysokości 40 m nad ziemią. Znaleźć pracę potrzebną do podniesienia kuli.
2. Pełne wiadro z 20 litrami wody jest podnoszone w tempie 0,5 m na sekundę. Woda wycieka z wiadra w tempie 0,5 l na sekundę. Wiadro waży 1 kg. Wyznaczyć pracę  $W$  potrzebną do podniesienia wiadra aż będzie puste.
3. Jednym ze sposobów wykonania pierścienia jest usunięcie cylindra ze środka sfery. Pokazać, że jeśli pierścień ma grubość  $1/4$  cm, to objętość wynosi  $\pi/384$  cm<sup>3</sup> niezależnie od promienia  $r$  sfery, z której został wycięty (która może być nawet tak duża jak słońce).
4. Ser żółty jest dostarczany w kształcie (pionowego) cylindra kołowego o promieniu  $a$ . Wycinamy kawałek w kształcie klina wykonując poziome cięcie do środka cylindra a następnie cięcie do tego samego miejsca pod kątem  $\theta$  do poziomu. Obliczyć objętość  $V$  wyciętego kawałka sera.
5. Zegar wodny to pojemnik z wodą z otworkiem w dnie, przez który upływa woda. Zegar jest wykonany tak, aby mierzyć czas za pomocą kresek poziomych zaznaczonych na zewnątrz pojemnika, odpowiadających poziomom wody w równych odstępach czasu.

- (a) Niech  $f$  będzie funkcją ciągłą zmiennej  $y$  na przedziale  $[0, b]$  i założmy, że pojemnik ma kształt powierzchni otrzymanej przez obrót wykresu funkcji  $f$  wokół osi  $y$ . Niech  $V$  oznacza objętość wody a  $h$  wysokość poziomu wody. Wtedy  $h$  zależy od  $t$  natomiast  $V$  od  $h$  a zatem również od  $t$ . Pokazać, że

$$\frac{dV}{dt} = \pi f(h)^2 \frac{dh}{dt}.$$

- (b) Założmy, że pole otworu w dnie wynosi  $A$ . Jeśli otwór jest bardzo mały to z praw fizyki wynika, że tempo wypływu wody  $dV/dt$  wyraża się wzorem

$$\frac{dV}{dt} = cA\sqrt{h},$$

gdzie  $c$  jest (ujemną) stałą. Znaleźć wzór dla funkcji  $f$  jeśli  $dh/dt$  jest stałe (wtedy kolejne kreski na zewnątrz pojemnika położone są w równych odległościach w pionie).