D2. Zadania do wykładu
analiza A2

1. Korzystając ze wzoru Stirlinga i kryterium Cauchy'ego znaleźć przedziały zbieżności szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty}\binom{2n}{n}x^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\binom{3n}{n}x^n,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\binom{4n}{n}x^{2n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\binom{4n}{n}\pi^{2n}x^{5n+1},$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2n)!}n^n x^{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\binom{3n}{n}e^{n^2}x^{n!+n}.$$

2. Wiemy, że największym składnikiem w rozwinięciu w dwumian Newtona $4^n = (1+1)^{2n}$ jest środkowy wyraz $\binom{2n}{n}$. Pokazać, że dla $n = 100$ ten wyraz jest większy niż 5% sumy wszystkich 201 symboli Newtona, czyli 4^{100}. `Wskazówka:` Skorzystać z oszacowania udowodnionego na wykładzie:

$$n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n} \leqslant n! \leqslant n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\, e^{1/4n}.$$

3. Wiadomo, że

$$\pi = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,dx.$$

Znaleźć przybliżoną wartość π stosując:(i) metodę trapezów dla $n = 6$; (ii) metodę Simpsona dla $n = 4$.

4. Znaleźć przybliżoną wartość całki

$$\int_0^{\pi/2}\sqrt{1+\cos x}\,dx$$

stosując metodę Simpsona dla $n = 2$. Następnie obliczyć dokładną wartość całki i porównać wyniki. `Wskazówka`: $1+\cos x = 2\cos^2(x/2)$.

5. Jajko ma kształt elipsoidy otrzymanej przez obrót wokół osi x półelipsy

$$x = 2\cos t, \quad y = 3\sin t, \; 0 \leqslant t \leqslant \pi.$$

Oszacować powierzchnię jajka używając metody Simpsona dla $n = 6$.