10. Zadania do wykładu
Analiza IB, R. Szwarc

1. Sprawdzić różniczkowalność funkcji w podanych punktach.

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x^4} & \text{dla } x\neq 0\\ 0 & \text{dla } x=0\end{cases},\ x=0; \qquad f(x)=\begin{cases}2^x+3x^2 & \text{dla } x<2\\ \log_{\sqrt{2}}x+7x & \text{dla } x\geqslant 2\end{cases}, x=2.$$

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x^2}\cos\frac{1}{x} & \text{dla } x\neq 0\\ 0 & \text{dla } x=0\end{cases},\ x=0; \qquad f(x)=\begin{cases}x^3+x^2-\dfrac{1}{\pi}\sin\pi x & \text{dla } x\leqslant 1\\ x^5+x & \text{dla } x>1;\end{cases},\ x=1;$$

$$f(x)=\begin{cases}x^4+x^2 & \text{dla } x<1\\ \log x^3+\dfrac{1}{\log 3}3^x & \text{dla } x\geqslant 1\end{cases},\ x=1; \quad f(x)=\begin{cases}x^2\log|x| & \text{dla } x\neq 0\\ 0 & \text{dla } x=0;\end{cases},\ x=0;$$

2. Obliczyć granice korzystając z pochodnych odpowiednich funkcji.

$$\lim_n n^3[\cos(2n^{-3})-1] \qquad \lim_{x\to\infty}\log x[e^{-1/log^3 x}-1] \qquad \lim_n\left[2^n\sin^4\left(\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2^n}\right)-9\cdot 2^{n-4}\right]$$

3. Obliczyć pochodne funkcji.

$$\frac{1}{\cos x} \qquad \cos(\log\sin x) \qquad \frac{1}{x\sqrt{5-2x}} \qquad e^{\sin^4 x+\cos^4 x} \qquad (12x^3-3x+4)^{-68} \qquad \operatorname{tg}^5(\operatorname{ctg}^2 x)$$

4. Obliczyć pochodne funkcji, korzystając ze wzoru na pochodną funkcji odwrotnej.

$$\arcsin x \qquad \arccos x \qquad \operatorname{arctg} x \qquad \log x$$

5. Obliczyć pochodne podanych funkcji tam, gdzie to jest możliwe.

$$\frac{x^p(1-x)^q}{1+x} \qquad x^{1/x} \qquad e^x(1+\operatorname{ctg}\frac{x}{2}) \qquad \frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x+\log\sin x$$

$$\arcsin(\sin x) \qquad (\cos x)^{\sin x} \qquad \log_x e \qquad \log\frac{x^2-1}{x^2+1}$$

6. Obliczyć pochodną logarytmiczną: $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{d}{dx}\log|\,f(x)\,|$ funkcji:

$$f(x)=\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^n, \qquad f(x)=(x-a_1)^{b_1}(x-a_2)^{b_2}\dots(x-a_n)^{b_n}.$$

Obliczyć $f'(0)$ dla $f(x)=x(x-1)\dots(x-n)$.

7. Obliczyć pochodne funkcji i ich funkcji odwrotnych.

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}, x\in\mathbb{R}; \qquad \cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\ x>0.$$

`Wskazówka:` $\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$.

8. Funkcja $y=f(x)$ jest różniczkowalna, posiada funkcję odwrotną $x=g(y)$ i spełnia równanie

$$x^3=y^4+x^2\sin y+1.$$

Zakładając, że $f(1)=0$ znaleźć $f'(1)$ oraz pochodną funkcji odwrotnej w punkcie 0. Znaleźć równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x)$ i funkcji odwrotnej $g(y)$ w punktach $(1,0)$ i $(0,1)$ odpowiednio.

9. Udowodnić, że jeśli $f(x)$ jest funkcją ciągłą na przedziale $[a,b)$, różniczkowalną na (a,b) oraz $\lim_{x\to a^+}f'(x)=c$, to $f(x)$ ma prawostronną pochodną w punkcie a równą c. Czy funkcja $f(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x}$ dla $x\neq 0$ i $f(0)=0$ ma ciągłą pochodną w zerze?