11. Zadania do wykładu
Analiza IB, R. Szwarc

1. Znaleźć wartości największą i najmniejszą funkcji w podanych przedziałach.

$$x^3 - x^2 + 8x + 1,\ [-2,2]; \qquad x^5 + x + 1,\ [-1,1]; \qquad x^3 + 3|x| + 2,\ [-1,1];$$

$$\sin|x| + \cos x - \frac{\sqrt{3}-1}{2}x,\ [-\pi/2, \pi/2]; \qquad \frac{x+1}{x^2+1},\ [-1, \frac{1}{2}];$$

2. Załóżmy, że $|f'(x)| \leqslant M$ dla $a \leqslant x \leqslant b$. Korzystając z twierdzenia o wartości średniej pokazać, że $|f(b) - f(a)| \leqslant M(b-a)$, czyli $f(a) - M(b-a) \leqslant f(b) \leqslant f(a) + M(b-a)$.

3. Korzystając z poprzedniego zadania oszacować od góry liczbę $\sqrt{101}$ `Wskazówka:` Niech $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 100$ oraz $b = 101$.

4. Oszacować od góry liczby $28^{2/3}$ i $33^{1/5}$.

5. Niech $g(x) = x^4 - 20x^3 - 25x^2 - x + 1$. Pokazać, że dla pewnej liczby $c \in (-1,1)$ zachodzi $4c^3 - 60c^2 - 50c - 1 = 0$. `Wskazówka:` Pokazać wcześniej, że funkcja $g(x)$ ma przynajmniej dwa miejsca zerowe w przedziale $(-1,1)$.

6. Funkcja $g(x)$ jest ciągła w $[a,b]$ i różniczkowalna w (a,b). Pokazać, że jeśli $g'(x) \neq 0$ dla wszystkich $x \in (a,b)$, to funkcja $g(x)$ jest albo ściśle rosnąca albo ściśle malejąca.

7. $f(x) = xg(x)$ oraz funkcja $g(x)$ jest ciągła w zerze. Pokazać, że $f'(0)$ istnieje.

8. Pokazać, że jeśli $f'(0)$ istnieje oraz $f(0) = 0$, to istnieje funkcja g ciągła w zerze taka, że $f(x) = xg(x)$.

9. Pokazać, że pochodna dowolonej funkcji różniczkowalnej ma własność Darboux, tzn. jeśli $f'(a) < \alpha < f'(b)$, to dla pewnego punktu c leżącego pomiędzy punktami a i b zachodzi $f'(c) = \alpha$. `Wskazówka:` Rozważyć funkcję $g(x) = f(x) - \alpha x$. Skorzystać z zadania 6.

10. Pokazać, że jeśli wszystkie, tzn. w liczbie n, pierwiastki wielomianu $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ są liczbami rzeczywistymi, to również pochodne tego wielomianu mają tę własność.

11. Pokazać, że jeśli liczby rzeczywiste c_0, c_1, ..., c_n spełniają zależność

$$c_0 + \frac{c_1}{2} + \ldots + \frac{c_n}{n+1} = 0,$$

to wielomian $c_n x^n + \ldots + c_1 x + c_0$ ma przynajmniej jeden pierwiastek pomiędzy 0 i 1.

12. Załóżmy, że funkcja $f'(x)$ przyjmuje wartość m co najwyżej n razy. Pokazać, że każda prosta o nachyleniu m przecina wykres funkcji $y = f(x)$ co najwyżej $n+1$ razy.

13. Liczba a jest punktem stałym funkcji f jeśli $f(a) = a$. Pokazać, że jeśli $f'(x) < 1$ dla każdej liczby rzeczywistej x, to funkcja f może mieć co najwyżej jeden punkt stały. Pokazać, że funkcja $f(x) = \sin\frac{1}{2}x$ ma tylko jeden punkt stały $x = 0$.

∗14. Zbadać ilość dodatnich pierwiastków równania $a^x = x$ w zależności od parametru a. Pokazać, że równanie $a^{a^x} = x$ ma te same pierwiastki co równanie $a^x = x$ dla $a \geqslant e^{-e}$. Udowodnić, że dla $0 < a < e^{-e}$ równanie $a^{a^x} = x$ ma trzy rozwiązania $r_1 < x_0 < r_2$, gdzie x_0 jest jedynym rozwiązaniem równania $a^x = x$.

∗15. Udowodnić, że jeśli funkcja $f(x)$ jest różniczkowalna w przedziale (c,∞) i $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$, to $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$. Pokazać, że gdy $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) + xf'(x)] = 0$, to $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$. Czy odwrotna implikacja jest prawdziwa?

16. Udowodnić tożsamości:

$$\begin{aligned} 2\operatorname{arctg} x + \arcsin\frac{2x}{1+x^2} &= \pi \operatorname{sgn} x \ (|\ x\ | \geqslant 1), \\ \operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x} - \operatorname{arctg} x &= \frac{\pi}{4} \text{ lub } -\frac{3\pi}{4}, \quad x \neq 1, \\ 2\operatorname{arctg}\,(x+\sqrt{x^2+1}) - \operatorname{arctg} x &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

`Wskazówka:` Obliczyć pochodną lewej strony równości.