

12. Zadania do wykładu
Analiza IB, R. Szwarc

1. Wykazać, że dla $x \neq y$, $x, y > 0$ zachodzi

$$\min(x, y) \leq \frac{x - y}{\log x - \log y} \leq \max(x, y)$$

$$\min(x, y) \leq \left(\frac{n x^m - y^m}{m x^n - y^n} \right)^{1/(m-n)} \leq \max(x, y).$$

2. Wykazać nierówności.

$$\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}, \quad (x \neq 0) \qquad \sin x > x - \frac{x^3}{6}, \quad (x > 0),$$

$$\log(1 + x) > x - \frac{x^2}{2}, \quad (x > 0) \qquad e^x \geq \left(\frac{ex}{n} \right)^n, \quad (x \geq 0).$$

3. Niech $h(x) = f(x)g(x)$. Wyrazić drugą pochodną funkcji $h(x)$ za pomocą funkcji $f(x)$ i $g(x)$ oraz ich pochodnych. Wyprowadzić wzór na n -tą pochodną funkcji $h(x)$

$$h^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x),$$

przy czym $f^{(0)}(x) = f(x)$.

4. Znaleźć wzór na n -tą pochodną funkcji $x^{-1} \log x$ i $e^x \cos x$.
5. Gracz baseballa biegnie po linii prostej, aby schwytać piłkę przy środku ogrodzenia boiska. Prędkość gracza w stopach na sekundę wynosi

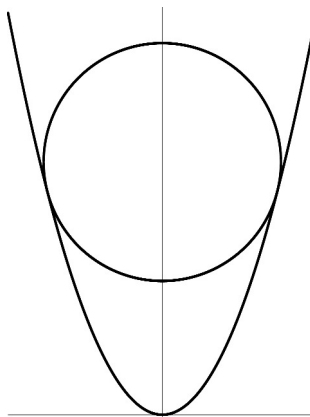
$$v(x) = \frac{1}{100}x^2 - \frac{11}{10}x + 25$$

gdy znajduje się w odległości x stóp od środka ogrodzenia. Jakie jest przyspieszenie gracza, gdy znajduje się w odległości 1 stopy od środka płotu ?

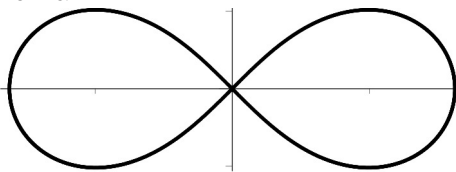
6. Zastosować różniczkowanie niejawne, aby obliczyć dy/dx w podanym punkcie.

$$x^2 + xy + 2y^2 = 4; \quad (-1, -1) \qquad (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{y} + 2) = 8; \quad (1, 4)$$

7. Znaleźć styczną do wykresu $x^3 + y^3 = 3xy$ w punkcie $(3/2, 3/2)$.
8. Okrąg o promieniu 1 i środku na osi y jest wpisany w parabolę $y = 2x^2$. Znaleźć punkty, w których parabola i okrąg stykają się. **Wskazówka:** W tych punktach okrąg i parabola mają wspólne styczne.



9. Lemniskata na rysunku poniżej zadana jest wzorem $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$. Znaleźć punkty wykresu, w których styczna jest pozioma.



10. Obliczyć d^2y/dx^2 w poniższych przykładach.

$$x^2 - y^4 = 6$$

$$x^2 \sin 2y = 1$$

11. W poniższych przykładach x i y są funkcjami różniczkowalnymi zmiennej t . Wyrazić dy/dt za pomocą x , y oraz dx/dt .

$$x \sin y = 2$$

$$x^2 + y^3 = x$$

$$y = \cos xy^2$$

$$\frac{2x + y}{xy^2} = 2$$

12. Znak drogowy w kształcie kwadratu o boku 50 cm i zaniedbywalnej grubości obraca się wokół swojej osi pionowej przechodzącej przez środek w tempie 10 obrotów na minutę. Osoba obserwująca znak z dużej odległości widzi go jako prostokąt o zmieniającej się szerokości. Jak szybko zmienia się szerokość znaku, gdy robi wrażenie prostokąta o szerokości 30 cm i szerokość się powiększa? **Wskazówka:** Rozważyć kąt jaki tworzy płaszczyzna znaku z linią łączącą go z obserwatorem.
13. Woda jest wypuszczana ze stożkowego pojemnika o wysokości 120 cm i promieniu 40 cm do pojemnika w kształcie prostopadłościanu, którego pole podstawy wynosi 1000 cm^2 . Gdy wysokość poziomej wody w stożku wynosi x cm wysokość ta maleje w tempie $100 - x$ cm na minutę. W jakim tempie podnosi się poziom wody w dolnym pojemniku, gdy wysokość wody w górnym pojemniku będzie równa 10 cm?
14. Nocna łódź patrolowa zbliża się do punktu $(0, 0)$ na brzegu wzdłuż krzywej $y = -\frac{1}{2}x^3$, $x < 0$. Oś x utożsamiamy z brzegiem. Łódź porusza się tak, że $dx/dt = -x$, jej reflektor jest skierowany na wprost. Jak szybko przesuwa się oświetlony punkt na brzegu, gdy $x = -2$?



15. Podać przybliżone wartości liczb używając wzoru $f(a + h) \approx f(a) + f'(a)h$.

$$\sqrt{101}$$

$$\sqrt[3]{29}$$

$$(28)^{4/3}$$

$$\cos(2\pi/13)$$

$$\text{tg}(99\pi/100)$$