

13. Zadania do wykładu
Analiza IB, R. Szwarz

1. Obliczyć granice

$$\begin{array}{cccc} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{tg} x}{x^2} & \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{\sin x} & \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{1/x}}{\log x} & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(1+x)}{\log x} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{\log(\log x)} & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4^x - 3^x - 1}{x^3 - 1} & \lim_{x \rightarrow \pi/2} (\pi^2 - 4x^2) \operatorname{tg} x & \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x & \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right) & \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(1 - x \sin \frac{1}{x}\right) & \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\log \frac{1}{x}\right)^x \end{array}$$

2. Obliczyć granice

$$\begin{array}{cccc} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} & \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x - x^{-1}) & \lim_{x \rightarrow 0} (x^{-2} - \operatorname{ctg}^2 x) \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x^\varepsilon}, (\varepsilon > 0) & \lim_{x \rightarrow 0} x^{-100} e^{-1/x} & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{1/x^2} & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{2006}}{\log^{1003}(x^2 + 1)} \end{array}$$

3. Obliczyć granice ciągów.

$$\lim_n n(5^{1/n} - 3^{1/n}) \quad \lim_n n^{1-\sqrt{2}}[(n+1)^{\sqrt{2}} - n^{\sqrt{2}}] \quad \lim_n \frac{e^{1/n^2} - 1}{e^{1/n} - 1} \quad \lim_n \frac{\log_4 n}{\sqrt{n}}$$

4. Niech

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x}{x^2 - \pi^2/4} & x \neq \pm \frac{\pi}{2} \\ -\frac{1}{\pi} & x = \pm \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Pokazać, że funkcja f jest ciągła i różniczkowalna w punktach $-\pi/2$ i $\pi/2$.

5. (a) Pokazać, że $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{(x^x)} = 0$.

(b) Pokazać, że $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^x)^x = 1$.

6. Sprawdzić efekt zastosowania reguły de l'Hospitala do granicy $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x}$.

7. Pokazać, że założenia twierdzenia Cauchy'ego, które służy do wyprowadzenia reguły de l'Hospitala, można osłabić zastępując żądanie $g'(x) \neq 0$ dla $a < x < b$ przez $g(b) \neq g(a)$ oraz $g'(x) \neq 0$ dla każdego x , dla którego $f'(x) = 0$.

8. Niech R będzie prostokątem leżącym w pierwszej ćwiartce, którego podstawa leży na osi x , jeden z wierzchołków znajduje się w początku układu, a przeciwny wierzchołek leży na wykresie funkcji $y = e^{-x}$.

(a) Pokazać, że dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ pole R jest mniejsze niż ε , jeśli podstawa prostokąta jest odpowiednio duża.

(b) Pokazać, że prostokąt o największym możliwym polu ma podstawę równą 1.

9. Trójkąt prostokątny T leży w pierwszej ćwiartce. Przyprostokątne znajdują się na osiach, a przeciwprostokątna jest styczna do wykresu $y = e^{-x}$.

(a) Pokazać, że dla $\varepsilon > 0$ pole trójkąta T jest mniejsze niż ε jeśli podstawa jest odpowiednio duża.

(b) Pokazać, że podstawa trójkąta o największym polu jest równa 2.