14. Zadania do wykładu
Analiza IB, R. Szwarc

1. Sprawdzić zbieżność szeregów i zbadać różniczkowalność sumy.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n^2x}{2^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(nx^2+1)}{n\sqrt{n}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(n^2x^2)\right)$$

2. Obliczyć promienie zbieżności szeregów potęgowych oraz szeregów pochodnych.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n} x^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}x^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} 4^n x^{n^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} x^n$$

3. Rozłożyć wielomian $P(x) = 1 + 3x + 5x^2 - 2x^3$ względem potęg dwumianu $x + 1$.

4. Rozłożyć funkcje względem potęg zmiennej x do podanego rzędu włącznie.

$$f(x) = \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2};\ \ x^4 \qquad g(x) = e^{2x-x^2};\ x^5 \qquad h(x) = \sqrt[3]{1-2x-x^3};\ \ x^3$$
$$u(x) = \log(\cos x);\ x^6 \qquad v(x) = \sin(\sin x);\ \ x^4$$

Obliczyć $f^{(4)}(0),\ g^{(3)}(0),\ h''(0),\ u^{(5)}(0),\ v^{(3)}(0)$.

5. Znaleźć rozkład funkcji $f(h) = \log(x + h),\ (x > 0)$, względem potęg h do miejsca h^n.

6. Funkcja f jest $(n + 1)$-krotnie różniczkowalna i $f^{(n+1)}$ jest funkcją ciągłą. Niech

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x + \theta(h)h) \quad (0 < \theta(h) < 1)$$

przy czym $f^{(n+1)}(x) \neq 0$. Pokazać, że $\theta(h) \to \frac{1}{n+1}$, gdy $h \to 0$.

7. Załóżmy, że $f(x) = 1 + kx + g(x)$ oraz $\lim_{x\to 0}(g(x)/x) = 0$. Pokazać, że $\lim\limits_{x\to 0} f(x)^{1/x} = e^k$.

8. Funkcja $f(x)$ jest dwukrotnie różniczkowalna w sposób ciągły na odcinku $[0, 1]$ oraz $f(0) = f(1) = 0$, $|\ f''(x)\ | \leqslant A$ dla $x \in (0, 1)$. Pokazać, że $|\ f'(x)\ | \leqslant A/2$ dla $0 \leqslant x \leqslant 1$.

9. Niech $f(x)$ będzie funkcją dwukrotnie różniczkowalną na półprostej dodatniej i $M_n = \sup\limits_x \ |\ f^{(n)}(x)\ |$ dla $n = 0, 1, 2$. Udowodnić nierówność $M_1^2 \leqslant 4M_0M_2$. Pokazać na przykładzie, że stała 4 jest optymalna.

∗10. Niech $f(x)$ będzie funkcją dwukrotnie różniczkowalną na prostej i $M_n = \sup\limits_x \ |\ f^{(n)}(x)\ |$ dla $n = 0, 1, 2$. Udowodnić nierówność $M_1^2 \leqslant 2M_0M_2$. Pokazać na przykładzie, że stała 2 jest optymalna.

11. Obliczyć wielkości z podaną dokładnością.

$$e;\ 10^{-9} \qquad \sin 1^\circ;\ 10^{-8} \qquad \sqrt{5};\ 10^{-4} \qquad \log_{10} 11;\ 10^{-5}$$

12. Znaleźć szereg Taylora dla podanych funkcji w punkcie a.

$$f(x) = \sin 2x;\ a = 0 \quad f(x) = \log 3x;\ a = 1 \quad g(x) = x\log(1+x^2);\ a = 0 \quad h(x) = \sin^2 x;\ a = 0$$

13. Znaleźć szereg Taylora dla funkcji

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x - x}{x^3} & x \neq 0 \\ -\dfrac{1}{6} & x = 0 \end{cases}$$

$*$14. Niech a_n będzie ciągiem Fibonacciego określonym przez $a_1 = a_2 = 1$ oraz $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ dla $n \geqslant 1$.

(a) Pokazać, że promień zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ wynosi przynajmniej $1/2$. `Wskazówka:` Pokazać, że $0 \leqslant a_n \leqslant 2a_{n-1}$, czyli $a_n \leqslant 2^n$.

(b) Pokazać, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \frac{x}{1-x-x^2} \text{ dla } |x| < \frac{1}{2}.$$

`Wskazówka:` Pokazać, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - x \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - x^2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = x$$

15. Znaleźć punkt na wykresie funkcji $y = x^{1/2}$ położony najbliżej punktu $(4, 0)$.

16. Pojemnik w kształcie cylindra jest wypełniony wodą do wysokości H. W miejscu położonym h m poniżej poziomu wody znajduje się mały otwór. Według prawa Torricelliego prędkość (pozioma) wody przepływającej przez otwór wynosi $\sqrt{2gh}$. Strumień wody spada w pewnej odległości R od dolnej krawędzi cylindra. Wyznaczyć wartość h dla której R jest maksymalne. Następnie obliczyć maksymalną wartość R.